

## О СЕМИНАРЕ ПО ПРОБЛЕМАМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ В МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА\*)

Ниже публикуются краткие аннотации докладов, состоявшихся в осеннем семестре 2024 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале “Дифференциальные уравнения”. 2024. Т. 60. № 8; дополнительная информация по адресу [iline@cs.msu.ru](mailto:iline@cs.msu.ru)\*\*) )

**А. В. Ильин, А. С. Фурсов** (МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия) “О построении универсального стабилизатора для переключаемой линейной системы с соизмеримыми запаздываниями” (23 сентября 2024 г.).

Исследуется задача построения цифрового универсального стабилизатора для переключаемой линейной системы в случае, когда её режимы имеют различные запаздывания в управлении, а именно, рассматривается непрерывная скалярная переключаемая система с соизмеримыми запаздываниями в управлении

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + b_\sigma u(t - \theta_\sigma), \quad y(t) = c_\sigma x(t), \quad \sigma \in S_{\mu, \gamma}, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где  $\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$  — непрерывная справа кусочно-постоянная функция (ненаблюдаемый переключающий сигнал);  $S_{\mu, \gamma}$  — множество переключающих сигналов  $\sigma$ , точки разрыва которых принадлежат множеству  $\{l\gamma\}$ ,  $\gamma$  — некоторое положительное число, а  $l = 0, 1, 2, \dots$ , при этом время между любыми двумя соседними переключениями не меньше  $\tau = \mu\gamma$ ;  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния;  $y \in \mathbb{R}$  — измеряемый скалярный выход;  $u \in \mathbb{R}$  — управляющий вход;  $A_\sigma = A \circ \sigma$  — композиция отображения  $A: I \rightarrow \{A_1, \dots, A_m\}$  и переключающего сигнала  $\sigma$ ;  $b_\sigma = b \circ \sigma$ ,  $c_\sigma = c \circ \sigma$  и  $\theta_\sigma = \theta \circ \sigma$  — аналогичные композиции для отображений  $b: I \rightarrow \{b_1, \dots, b_m\}$ ,  $c: I \rightarrow \{c_1, \dots, c_m\}$  и  $\theta: I \rightarrow \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$  ( $\theta_i > 0$  — величины постоянных запаздываний, причём  $\theta_i/\theta_j$  — рациональные числа для любых  $i, j \in I$ ).

Значение функции  $\sigma$  в каждый момент времени определяет активный режим переключаемой системы (1), описываемый линейной стационарной системой с запаздыванием в управлении

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i u(t - \theta_i), \quad y(t) = c_i x(t).$$

Решением уравнения состояния системы (1) при заданном управлении  $u(t)$  (считаем, что  $u(t) \equiv 0$  при  $t \leq 0$ ), переключающем сигнале  $\sigma \in S_{\mu, \gamma}$  и начальном условии  $x(0) = x_0$  является решение линейной нестационарной системы с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) + b_{\sigma(t)} u(t - \theta_{\sigma(t)}), \quad x(0) = x_0.$$

\*) Семинар основан академиками РАН С.В. Емельяновым и С.К. Коровиным.

\*\*) Составитель хроники А.В. Ильин.

Требуется для переключаемой линейной системы (1) с заданными  $\gamma > 0$  и  $\mu \in \mathbb{N}$  построить цифровой регулятор вида

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor t/T \rfloor} u[jT]S(t-jT), \quad S(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T), \\ 0, & t \notin [0, T), \end{cases} \quad (2)$$

$$v[(l+1)T] = Qv[lT] + qy[lT], \quad u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], \quad v[0] = v_0, \quad (3)$$

обеспечивающий глобальную равномерную асимптотическую устойчивость замкнутой непрерывно-дискретной системы

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_\sigma x(t) + b_\sigma u(t - \theta_\sigma), & x(0) &= x_0, \\ v[(l+1)T] &= Qv[lT] + qc_\sigma x[lT], & v[0] &= v_0, \end{aligned} \quad \sigma(t) \in S_{\mu, \gamma}, \quad (4)$$

где

$$u(t - \theta_i) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\lfloor (t - \theta_i)/T \rfloor} (Hv[lT] + hc_\sigma x[lT])S(t - \theta_i - jT), & \text{если } t \geq \theta_i, \\ 0, & \text{если } 0 \leq t < \theta_i. \end{cases}$$

Система (4) записана при условии, что моменты времени  $t$  и  $lT$  согласованы,  $l = \lfloor t/T \rfloor$ , т.е.

$$lT \leq t < (l+1)T, \quad l = 1, 2, \dots$$

Здесь  $T$  — период квантования по времени  $t$  (считаем, что  $T < \gamma$ , существует число  $l_0 \in \mathbb{N}$  такое, что  $\gamma = l_0 T$ , и для любого  $i$  найдётся такое  $l_i \in \mathbb{N}$ , что  $\theta_i = l_i T$ );  $[\cdot]$  — целая часть действительного числа;  $Q \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $q \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{1 \times r}$  ( $r$  — порядок регулятора),  $h \in \mathbb{R}$ ;  $u[\cdot]$ ,  $y[\cdot]$ ,  $v[\cdot]$  — дискретные функции, определённые на последовательности  $\{lT\}_{l=0}^{+\infty}$ ; формирующий элемент представлен фиксатором нулевого порядка [1, с. 25].

Замкнутую непрерывно-дискретную систему (4) называем *глобально равномерно асимптотически устойчивой*, а регулятор (2), (3) *стабилизирующим*, если для любых  $x(0)$ ,  $v[0]$  и  $\sigma \in S_{\mu, \gamma}$  для соответствующего решения выполнено

$$\left\| \begin{matrix} x(t) \\ v[lT] \end{matrix} \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad l = \lfloor t/T \rfloor.$$

Для решения поставленной задачи предлагается использовать подходы, разработанные в статьях [2, 3]. В [2] исследовалась проблема цифровой стабилизации переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении. При этом предполагалось, что запаздывание одно и то же для всех режимов рассматриваемой переключаемой системы. Для указанной системы была сформулирована задача построения цифрового стабилизирующего регулятора в форме динамической обратной связи по выходу, для решения которой предложен алгоритм, включающий два основных шага: переход от исходной непрерывной системы к её точной дискретной модели (вообще говоря, более высокого динамического порядка) и поиск дискретного динамического регулятора для полученной переключаемой дискретной системы. Одним из важных предположений, при котором решалась указанная задача, являлось условие синхронности моментов переключений стабилизируемой системы с моментами времени работы дискретного регулятора.

В работе [3] приведённая задача стабилизации обобщена на случай, когда режимы переключаемой системы имеют различные запаздывания в управлении. Тогда методика, изложенная в [2], приводит к задаче стабилизации переключаемой дискретной системы с режимами различных динамических порядков, для решения которой в [3] было предложено использовать метод расширения динамического порядка, позволяющий перейти к переключаемой системе с режимами единого порядка и далее, на основе метода функций Ляпунова, свести задачу поиска стабилизирующего регулятора к задаче разрешимости системы линейных матричных неравенств. Дискретный регулятор, полученный в результате применения указанной методики, обеспечивает стабилизацию исходной системы при произвольных переключениях данного типа.

В настоящей работе рассматривается та же задача стабилизации переключаемой линейной системы с соизмеримыми запаздываниями в управлении, что и в статье [3], с той лишь разницей, что переключающие сигналы теперь имеют ограничения на величину промежутков (времени задержки) между двумя соседними переключениями, т.е. фактически изучается переключаемая система с медленными переключениями. Как и в работе [3], с помощью метода точной дискретизации данная система приводится к переключаемой дискретной системе с режимами различных динамических порядков, но затем для поиска стабилизирующего регулятора используется иной подход, предполагающий поиск универсального регулятора, основанный на методе одновременной стабилизации конечного семейства динамических порядков с последующей оценкой времени задержки для переключающих сигналов, обеспечивающего устойчивость соответствующей замкнутой системы.

Предлагается общая схема построения цифрового регулятора (2), (3), включающая следующие основные шаги:

- 1) переход от непрерывной системы (1) к её точной дискретной модели с учётом, что на её входе используется фиксатор нулевого порядка (точная дискретная модель фактически представляет собой переключаемую дискретную систему с режимами, описываемыми системами разностных уравнений, вообще говоря, различных динамических порядков, не содержащих запаздываний);
- 2) описание режимов полученной переключаемой линейной дискретной системы через передаточные функции;
- 3) построение процедуры численного поиска универсального стабилизирующего дискретного регулятора в виде передаточной функции заданного порядка на основе методов одновременной стабилизации [4, с. 115];
- 4) переход от описания регулятора в виде передаточной функции к описанию в пространстве состояний вида (3);
- 5) на основе метода функций Ляпунова получение оценки времени задержки  $\tau = \mu\gamma$ , при котором найденный регулятор обеспечивает глобальную равномерную асимптотическую устойчивость непрерывно-дискретной системы (4).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

### Литература

1. Поляков, К.Ю. Основы теории цифровых систем управления: учеб. пособие / К.Ю. Поляков. — СПб. : Изд-во СПбГМТУ, 2012. — 154 с.
2. Фурсов, А.С. Построение цифрового стабилизатора для переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении / А.С. Фурсов, С.И. Миняев, В.С. Гусева // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 8. — С. 1132–1141.

3. Ильин, А.В. Цифровая стабилизация переключаемой линейной системы с соизмеримыми запаздываниями / А.В. Ильин, А.С. Фурсов // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2023. — Т. 514, № 1. — С. 82–88.
4. Фурсов, А.С. Одновременная стабилизация: теория построения универсального регулятора для семейства динамических объектов / А.С. Фурсов. — М. : Аргатак-медиа, 2016. — 238 с.

**В. В. Фомичев, К. Ю. Шутова** (МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия) “Алгоритм равномерного размещения агентов в прямоугольнике на основе локальной информации” (14 октября 2024 г.).

Равномерное размещение агентов на плоскости является одной из ключевых задач в теории многоагентных систем, которые находят применение в различных областях, таких как моделирование динамики толпы, робототехника, в задачах покрытия территории агентами и других.

Агент — это автономный объект, способный взаимодействовать с другими объектами и окружающей средой на основе заданных правил.

В работах [1, 2] предложены алгоритмы равномерного размещения агентов на отрезке. В данном исследовании рассматривается задача равномерного размещения агентов в ограниченной области на плоскости, устанавливается диссипативность системы; основное внимание уделяется взаимодействиям между агентами на плоскости с учётом силы отталкивания друг от друга, а также форме матрицы локальных связей для поддержания локального взаимодействия между соседями. Цель этого исследования — разработать алгоритм, обеспечивающий равномерное размещение агентов в ограниченной двумерной области, в котором будут учтены взаимодействие с ближайшими соседями и силы отталкивания для предотвращения слипания агентов.

Пусть имеется система из  $N$  агентов, находящихся в области  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ . Каждый агент с номером  $i$  в момент времени  $t$  имеет позицию  $(x_i(t), y_i(t)) \in \mathbb{R}^2$ , он может находиться как внутри, так и снаружи  $\Omega$ . Агенты взаимодействуют друг с другом на основе матрицы  $A$ , которая определяет силы притяжения между соседними агентами и предотвращающие слипание агентов при их сближении силы отталкивания  $f_{\text{rep}}$ . Цель агентов — разместиться равномерно в области  $\Omega$ . Обновление положения агентов описывается следующей системой разностных уравнений:

$$\begin{cases} x(t+1) = (1-\beta)x(t) + \beta Ax(t) + \gamma f_{x\text{rep}}, \\ y(t+1) = (1-\beta)y(t) + \beta Ay(t) + \gamma f_{y\text{rep}}, \end{cases} \quad (1)$$

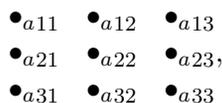
где  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T$ ,  $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t))^T$  — векторы текущих позиций агентов по осям  $Ox$ ,  $Oy$  соответственно;  $A$  — матрица взаимодействий, каждая строка в которой описывает влияние соседей на агента;  $f_{x\text{rep}}$ ,  $f_{y\text{rep}}$  — компоненты силы отталкивания  $f_{\text{rep}}$  по осям  $Ox$ ,  $Oy$ , действующей между агентами, чтобы предотвратить их сближение;  $\beta \in [0, 1]$  — коэффициент, управляющий вкладом матрицы взаимодействий в обновление позиций;  $\gamma \in [0, 1]$  — коэффициент, определяющий силу отталкивания.

Матрица  $A$  — стохастическая и симметричная, т.е.  $A_{ij} \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^N A_{ij} = 1$  и  $A = A^T$ . Для таких матриц все собственные значения  $\lambda_i \in [-1, 1] \in \mathbb{R}$ , при этом  $\lambda_1 = \lambda_{\max} = 1$  — максимальное собственное значение. Поскольку предполагается, что каждый агент взаимодействует лишь с небольшим числом соседей, то матрица  $A$  разреженная с преимущественно нулевыми элементами: для любого  $i$  существует  $j$ ,  $i \neq j$ , что  $A_{ij} \neq 0$ . Из теоремы Перрона–Фробениуса [3] следует, что при  $i \geq 2$   $0 \leq \lambda_i < 1$ . Путём несложных преобразований можно показать липшицевость матрицы (1).

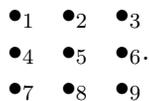
Остаётся вопрос о влиянии коэффициентов  $\beta$  и  $\gamma$  на поведение многоагентной системы. Параметр  $\beta$  определяет вес взаимодействия агентов со своими соседями через матрицу  $A$ . При  $\beta = 0$  отсутствует взаимодействие с соседями, агенты не стремятся к среднему положению, а система может быть неустойчивой, так как отталкивание может привести к неравномерному размещению или даже выходу за границы области. При  $\beta = 1$  взаимодействие максимальное, агенты стремятся к среднему положению своих соседей с максимальной силой, что может привести к медленному размещению и игнорированию отталкивания для избежания столкновений. Значения параметра  $\beta \in (0, 1)$  задают баланс между текущим положением агента и его средним положением относительно соседей, что способствует плавной сходимости системы.

Параметр  $\gamma$  регулирует влияние отталкивающей силы, которая отвечает за предотвращение столкновения агентов. При  $\gamma = 0$  отталкивание между агентами отсутствует, это позволяет им двигаться исключительно в зависимости от взаимодействия с соседями через матрицу  $A$ , что может привести к скоплению агентов в одном месте. При  $\gamma = 1$  влияние отталкивающих сил максимальное, при этом сохраняется взаимодействие агентов со своими соседями, определяемое параметром  $\beta$ , но в численных экспериментах, если  $\beta \in (0, 1)$  и  $\gamma = 1$ , при увеличении числа агентов начинает сильно преобладать влияние силы отталкивания, что приводит к их (агентов) разбеганию на границы области. Значения  $\gamma \in (0, 1)$  позволяют агентам избегать столкновений и одновременно учитывать их текущее положение относительно соседей, что способствует более равномерному размещению.

Для определения матрицы связей предлагается следующая схема. Пусть имеется  $N = n \times m$  агентов  $a_{ij}$ . Тогда соседями считаются агенты, индексы которых отличаются не более чем на единицу, т.е.  $a_{ij}$  — сосед с  $a_{pq}$ , если  $|i - p| \leq 1, |j - q| \leq 1$ . В результате у каждого агента есть от двух до четырёх соседей. В случае размещения на плоскости  $3 \times 3$  ( $n = 3, m = 3$ ) имеем следующую интерпретацию расположения 9 агентов:



где у угловых агентов  $a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33}$  есть два соседа, у агентов  $a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{32}$  на границах — три соседа, у агентов внутри (в данном случае только  $a_{22}$ ) — четыре соседа. Далее каждому агенту  $a_{pq}$  поставим в соответствие номер  $j = q + (p - 1)$ , т.е. нумеруем агентов “по строкам”:



Матрицу взаимодействия определяем следующим образом: в  $i$ -й строке ненулевые элементы соответствуют только соседям, все ненулевые элементы равны одному и тому же значению, при этом сумма элементов в строке равна 1.

Например, для агента в левом верхнем углу  $a_{11}$ , соответствующего первой строке  $A_1$  матрицы  $A$ , будет верно

$$A_1 = (A_{11} \ A_{12} \ A_{13} \ A_{14} \ A_{15} \ A_{16} \ A_{17} \ A_{18} \ A_{19}) = \left( 0 \ \frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right),$$

так как ближайшими соседями являются два агента:  $a_{12}$  и  $a_{21}$ .

В общем случае для  $N = n \times m$  агентов матрица  $A$  имеет размерность  $N \times N$  и её элементы записываются следующим образом:

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{k_i}, & \text{если } j \text{ — сосед } i, \text{ при этом } i \neq j, \\ 0, & \text{если } i \text{ и } j \text{ не соседи или } i = j, \end{cases}$$

где  $k_i$  — количество соседей агента  $i$  (здесь  $i$  и  $j$  — номера агентов в “сквозной нумерации”).

Сила отталкивания  $f_{\text{rep}}(t)$  моделируется как функция, зависящая от расстояния между агентами: чем ближе находятся агенты, тем сильнее они отталкиваются друг от друга.

Пусть положения агентов  $i$  и  $j$  в момент времени  $t$  определяются как

$$\vec{r}_i(t) = [x_i(t), y_i(t)] \quad \text{и} \quad \vec{r}_j(t) = [x_j(t), y_j(t)].$$

Расстояние между агентами  $i$  и  $j$  в момент времени  $t$  обозначим

$$r_{ij}(t) = \|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)\| = \sqrt{(x_i(t) - x_j(t))^2 + (y_i(t) - y_j(t))^2}.$$

Для каждого агента  $i$  сила отталкивания рассчитывается по формулам

$$f_{x_{\text{rep}}}^{(i)}(t) = - \sum_{j \neq i} \frac{1}{r_{ij}^2(t)} (x_i(t) - x_j(t)), \quad f_{y_{\text{rep}}}^{(i)}(t) = - \sum_{j \neq i} \frac{1}{r_{ij}^2(t)} (y_i(t) - y_j(t)),$$

где  $\gamma$  — коэффициент силы отталкивания, регулирующий общий вклад силы отталкивания в обновление положения агентов.

Для численного эксперимента рассматривалась область  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ . Начальные координаты в момент времени  $t = 0$  каждого агента выбираются из равномерного распределения на области  $\Omega$ . Численный эксперимент показал, что независимо от начального размещения агенты в асимптотике приходят к одной и той же конфигурации, определяемой матрицей  $A$ , параметрами  $\beta, \gamma$ . На рис. 1, 2 представлены варианты предельного расположения 9 агентов (фактически при достаточно большом  $t$ ); точками обозначены агенты, а линиями, соединяющими их между собой, показаны связи с ближайшими соседями. На рис. 1 при  $\beta = 0,9$  видно, что меньшее значение  $\gamma$  приводит к агрегации не по всей области  $\Omega$ , а при большем значении  $\gamma$  агенты занимают всю область  $\Omega$ . На рис. 2 при  $\gamma = 0,02$  видно, что большее

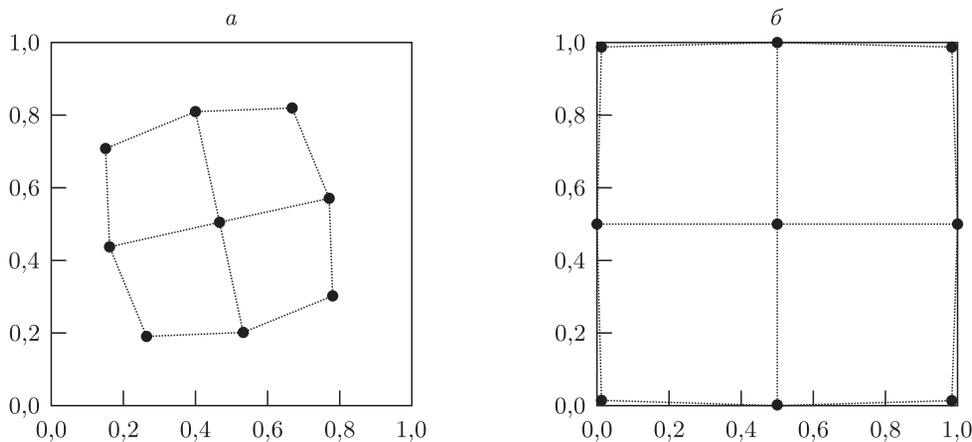


Рис. 1. Распределение 9 агентов при  $\beta = 0,9$ :  $a - \gamma = 0,01$ ,  $b - \gamma = 0,06$

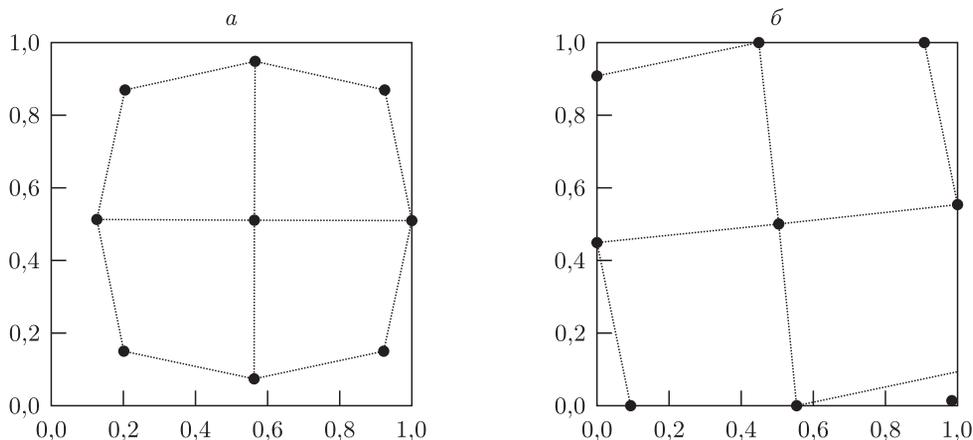


Рис. 2. Распределение 9 агентов при  $\gamma = 0,02$ :  $a - \beta = 0,8$ ,  $b - \beta = 0,4$

значение  $\beta$  приводит к размещению агентов только на части области  $\Omega$ , при меньшем значении  $\beta$  они стремятся разместиться по всей области  $\Omega$ . Были предложены полученные опытным путём значения  $\beta = 2/\sqrt{N}$ ,  $\gamma = 1/(2N\sqrt{N})$ , на рис. 3 смоделировано их влияние на формирование равномерного размещения  $N = 9$  агентов.

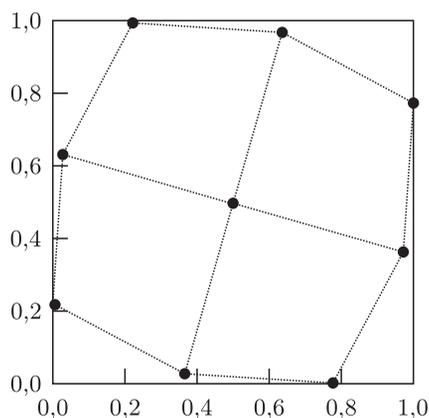


Рис. 3. Равномерное размещение 9 агентов при  $\beta = 2/\sqrt{N}$ ,  $\gamma = 1/(2N\sqrt{N})$

Численные эксперименты показали, что предложенный метод позволяет достичь равномерного размещения агентов при корректной настройке параметров модели, таких как  $\beta$  и  $\gamma$ . Подробный анализ зависимости размещения от параметров требует дополнительных исследований и выходит за рамки данной работы. Выводы сделаны также на основе анализа липшицевости матрицы  $A$ , что позволяет гарантировать базовые свойства устойчивости движения агентов. Однако для строгого обоснования устойчивости модели необходимо дополнительно провести теоретические исследования, включая анализ положений равновесия системы (1) и их устойчивости. Эти аспекты будут рассмотрены в дальнейших публикациях.

Работа выполнена при поддержке некоммерческого фонда развития науки и образования “Интеллект” (проект № 1/ГКМУ-2022 от 23.12.2022 г.).

### Литература

1. Kvinto, Y.I. Equidistant arrangement of agents on line: analysis of the algorithm and its generalization / Y.I. Kvinto, S.E. Parsegov // Automation and Remote Control. — 2012. — V. 73, № 11. — P. 1784–1793.

2. Parsegov, S.E. Uniform deployment of second-order agents on a line segment / S.E. Parsegov, A.V. Proskurnikov // 6th Intern. Congress on Ultra-Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops. — 2014. — P. 631–636.
3. Horn, R.A. Matrix Analysis / R.A. Horn, C.R. Johnson. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1985. — 534 p.

**В. Е. Хартовский** (ГрГУ имени Я. Купалы, Гродно, Республика Беларусь) “К вопросу экспоненциальной стабилизируемости по неполным измерениям линейных систем нейтрального типа” (28 октября 2024 г.).

Объектом исследования является линейная автономная система нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + D\dot{x}(t-h) + bu(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Здесь  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — решение уравнения (1);  $u(t)$  — скалярное управление, выбираемое из класса кусочно-непрерывных функций;  $y(t) \in \mathbb{R}^l$  — наблюдаемый выход;  $A, A_1, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ;  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ;  $b \in \mathbb{R}^n$ ;  $h > 0$  — постоянное запаздывание. Считаем, что начальное состояние системы (1) имеет вид  $x(t) = \varphi(t)$ ,  $t \in [-h, 0]$ , где  $\varphi$  — непрерывная функция, имеющая кусочно-непрерывную производную.

Пусть  $I_i \in \mathbb{R}^{i \times i}$  — единичная матрица,  $W(p) = p(I_n - e^{-ph}D) - A - e^{-ph}A_1$  — характеристическая матрица уравнения (1),  $\Lambda = \{p \in \mathbb{C} : \det W(p) = 0\}$  — спектр (множество собственных значений) разомкнутой ( $u \equiv 0$ ) системы (1).

Спектральный критерий экспоненциальной устойчивости системы нейтрального типа заключается в требовании [1], чтобы все её собственные значения лежали в левой полуплоскости и были отделены от мнимой оси. Например, в случае системы (1) должно выполняться условие

$$\operatorname{Re} p < \varepsilon, \quad \varepsilon < 0, \quad p \in \Lambda. \quad (3)$$

При этом если система нейтрального типа экспоненциально устойчива, то экспоненциально устойчива разностная система, описывающая поведение скачков первой производной решения однородной системы. В случае однородной системы (1) ( $u \equiv 0$ ) это условие будет иметь вид

$$|\lambda| > 1, \quad \lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(I_n - \lambda D) = 0\}. \quad (4)$$

В настоящее время имеется ряд работ (см. [1–6] и библиографии в них), посвящённых стабилизации систем нейтрального типа, однако большинство из них предлагают качественные результаты. Что касается конструктивных алгоритмов построения соответствующих стабилизирующих управлений, то их очень мало. В статье [7] получен критерий экспоненциальной стабилизируемости системы (1) регулятором с обратной связью в виде вектора состояния  $x$  и предложен способ проектирования соответствующего регулятора. В [8] доказан критерий существования и описан метод построения регулятора с обратной связью в виде выхода  $y$ , одновременно обеспечивающего финитную стабилизацию и конечный спектр системе нейтрального типа. В настоящем исследовании разработан метод построения регуляторов с обратной связью в виде выхода  $y$  для экспоненциальной стабилизации системы (1), (2), получены условия существования соответствующих регуляторов.

Обозначим через  $\lambda_h$  оператор сдвига, определяемый для заданного  $h > 0$  и любой функции  $\psi(t)$  правилом  $\lambda_h \psi(t) = \psi(t-h)$ . Введём регулятор с обратной связью по выходу вида

$$u(t) = \mathfrak{R}_{01}[x_1(t)] + \mathfrak{R}_{00}[y(t)], \quad \dot{x}_1(t) = \mathfrak{R}_{11}[x_1(t)] + \mathfrak{R}_{10}[y(t)]. \quad (5)$$

Здесь  $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$  — вспомогательная переменная, операторы  $\mathfrak{R}_{ij}[\cdot]$  определяются на множестве непрерывных функций  $\varphi(t)$ , имеющих кусочно-непрерывную производную, следующим правилом:

$$\mathfrak{R}_{ij}[\varphi(t)] = R_{ij}^0(\lambda_h)\varphi(t) + \lambda_h R_{ij}^1(\lambda_h)\dot{\varphi}(t) + \sum_{k=1}^{m_1} \int_0^h \widehat{R}_{ij}^{(k)}(s)\varphi(t - kh - s) ds, \tag{6}$$

где  $R_{ij}^0(\lambda_h)$ ,  $R_{ij}^1(\lambda_h)$  — заданные полиномиальные матрицы,  $\widehat{R}_{ij}^{(k)}(s)$  — заданные матричные функции вида  $\widehat{R}_{ij}^{(k)}(s) = \sum_{k=1}^{m_2} e^{\alpha_{ijkl}s} (\cos(\beta_{ijkl}s)M_{ijkl}(s) + \sin(\beta_{ijkl}s)N_{ijkl}(s))$ ,  $\alpha_{ijkl}, \beta_{ijkl} \in \mathbb{R}$ ,  $M_{ijkl}(s)$ ,  $N_{ijkl}(s)$  — полиномиальные матрицы. Считаем, что размерности всех матриц, входящих в формулы (5), (6), согласованы с размерностями матриц системы (1), (2). Каждому оператору вида (6) поставим в соответствие матрицу

$$\mathcal{R}_{ij}(p) = R_{ij}^0(e^{-ph}) + pe^{-ph}R_{ij}^1(e^{-ph}) + \sum_{k=1}^{m_1} \int_0^h \widehat{R}_{ij}^{(k)}(s)e^{-p(kh+s)} ds.$$

Выпишем характеристическую матрицу замкнутой системы (1), (2), (5)

$$W_1(p) = \begin{bmatrix} W(p) - b\mathcal{R}_{00}(p)C & -b\mathcal{R}_{01}(p) \\ -\mathcal{R}_{10}(p)C & pI_{n_1} - \mathcal{R}_{11}(p) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

**Определение.** Систему (1), (2) назовём экспоненциально стабилизируемой по выходу, если существует регулятор вида (5) такой, что замкнутая система (1), (2), (5) является экспоненциально устойчивой.

Анализируя матрицу (7) и условия (3), (4), можем получить необходимые условия экспоненциальной стабилизируемости по выходу системы (1), (2).

**Теорема 1.** Если система (1), (2) экспоненциально стабилизируема по выходу, то выполняются следующие условия:

$$\text{rank}[W(p), b] = n, \quad p \in \mathbb{C}, \quad \text{Re } p \geq \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 < 0; \tag{8}$$

$$\text{rank}[I_n - \lambda D, b] = n, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| \leq 1; \tag{9}$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} W(p) \\ C \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}, \quad \text{Re } p \geq \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 < 0; \tag{10}$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} I_n - \lambda D \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| \leq 1. \tag{11}$$

В настоящей работе задача экспоненциальной стабилизации по выходу решена для систем, у которых условия (10), (11) заменяются более “жесткими”.

**Теорема 2.** Для того чтобы система (1), (2) была экспоненциально стабилизируемой по выходу, достаточно выполнения условий (8), (9) и

$$\text{rank} \begin{bmatrix} W(p) \\ C \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}; \tag{12}$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} I_n - \lambda D \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{13}$$

Заметим, что условия (12), (13) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы исходная система (1), (2) была финально наблюдаемой. В частности, условие (12) обеспечивает взаимно-однозначное соответствие между множеством выходов и множеством состояний системы, а условие (13) позволяет восстановить текущее состояние системы по измерениям (2) при помощи непрерывного оператора восстановления.

Доказательство теоремы 2 содержит метод построения регулятора (5), который основан на результатах исследований [7, 8]. Процесс построения регулятора осуществляется в три этапа. Сначала по схеме работы [7] строится регулятор с обратной связью, зависящей от вектора состояния  $x$ , который обеспечивает экспоненциальную устойчивость замкнутой системы. Существование такого регулятора следует из условий (8), (9). При этом получается замкнутая система с характеристическим квазиполином  $d_1(p, e^{-ph})$ ,  $\deg_p d_1(p, \lambda) = n + 1$ , корни которого имеют отрицательные действительные части и отделены от мнимой оси. На втором этапе строится финитный наблюдатель (ошибка которого есть финитная функция) [8, 9], описываемый системой запаздывающего типа с выходом и с наперёд заданным асимптотически устойчивым характеристическим полиномом  $d_2(p)$ ,  $\deg_p d_2(p) = n + 3$ . Для построения финитного наблюдателя используется схема работы [9] с изменениями, описанными в статье [8], а его существование обеспечивают условия (12), (13). Далее на третьем этапе параметры построенных регулятора и наблюдателя объединяются в один регулятор (5) по принципу, описанному в работе [8]. В результате характеристический квазиполином  $|W_1(p)|$  системы (1), (2), (5) будет иметь вид  $|W_1(p)| = d_1(p, e^{-ph})d_2(p)$ .

### Литература

1. Hale, J.K. Strong stabilization of neutral functional differential equations / J.K. Hale, S.M. Verduyn Lunel // IMA J. Math. Control Inf. — 2002. — V. 19, № 1–2. — P. 5–23.
2. Pandolfi, L. Stabilization of neutral functional differential equations / L. Pandolfi // J. Optim. Theory Appl. — 1976. — V. 20, № 2. — P. 191–204.
3. Criteria for asymptotic stability of a class of neutral systems via a LMI approach / J.D. Chen, C.H. Lien, K.K. Fan, J.H. Chou // IEE Proceedings. Control Theory and Applications. — 2001. — V. 148, № 6. — P. 442–447.
4. Rabah, R. Stability and stabilizability of mixed retarded-neutral type systems / R. Rabah, P.Y. Barkhayevev // ESAIM Control, Optimization and Calculus of Variations. — 2012. — V. 18, № 3. — P. 656–692.
5. Park, J.H. Asymptotic stability of neutral systems with multiple delays / J.H. Park, S. Won // J. Optim. Theory Appl. — 1999. — V. 103, № 1. — P. 183–200.
6. Hu, G.-D. An observer-based stabilizing controller for linear neutral delay systems / G.-D. Hu // Siberian Math. J. — 2022. — V. 63, № 4. — P. 789–800.
7. Метельский, А.В. Управление спектром системы нейтрального типа / А.В. Метельский // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 1. — С. 99–125.
8. Хартовский, В.Е. Финитная стабилизация и назначение конечного спектра единым регулятором по неполным измерениям для линейных систем нейтрального типа / В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 5. — С. 686–706.
9. Метельский, А.В. Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа / А.В. Метельский, В.Е. Хартовский // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 12. — С. 80–102.

**Н. Н. Петров, Е. С. Фомина** (УдГУ, Ижевск, Россия) “Простое групповое преследование с возможным нарушением в динамике и фазовыми ограничениями” (25 ноября 2024 г.).

В пространстве  $\mathbb{R}^k$  ( $k \geq 2$ ) рассматривается дифференциальная игра  $\Gamma(n+1)$   $n+1$  лиц: преследователей  $P_1, \dots, P_n$  и убегающего  $E$ , с законами движения

$$\dot{x}_i = a_{\theta_i}(t)u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad u_i \in U_i, \quad \dot{y} = v, \quad y(0) = y^0, \quad v \in V,$$

где

$$a_{\theta_i}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [\theta_i, \theta_i + h_i], \\ 1, & t \notin [\theta_i, \theta_i + h_i], \end{cases}$$

$i \in I = \{1, \dots, n\}$ ,  $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k$ ,  $U_i, V$  — выпуклые компакты в  $\mathbb{R}^k$ . Моменты  $\theta_i$  можно рассматривать как моменты отказа управляющих устройств у преследователей  $P_i$  [1], величины  $h_i \geq 0$  — время ремонта. Предполагается, что моменты  $\theta_i, i \in I$ , не известны преследователям  $P_i, i \in I$ , и поломка может наступить в любой момент времени. Величины  $h_i, i \in I$ , известны всем участникам. Терминальные множества  $M_i$  — выпуклые компакты в  $\mathbb{R}^k$ , причём  $z_i^0 \notin M_i$  для всех  $i \in I$ .

Дополнительно предполагается, что убегающий  $E$  в процессе игры не покидает пределы выпуклого многогранного множества

$$\Omega = \{y: y \in \mathbb{R}^k, (p_j, y) \leq \mu_j, j \in J = \{1, \dots, r\}\}$$

с непустой внутренностью, где  $p_1, \dots, p_r$  — единичные векторы пространства  $\mathbb{R}^k$ ,  $\mu_1, \dots, \mu_r$  — вещественные числа,  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение. Считаем, что  $\Omega = \mathbb{R}^k$  при  $r = 0$ .

Измеримая функция  $v: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$  называется *допустимой*, если  $v(t) \in V, y(t) \in \Omega$  для всех  $t \geq 0$ .

*Предысторией*  $v_t(\cdot)$  функции  $v$  в момент  $t$  назовём сужение функции  $v$  на отрезок  $[0, t]$ .

**Определение 1.** Будем говорить, что задана *квазистратегия*  $\mathcal{U}_i$  преследователя  $P_i$ , если определено отображение  $U_i^0$ , ставящее в соответствие начальным позициям  $z^0 = (z_i^0, i \in I)$ , моменту  $t$ , произвольной предыстории управления  $v_t(\cdot)$  убегающего  $E$ , произвольному вектору  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n), \theta_i \geq 0, i \in I$ , измеримую функцию  $u_i(t)$  со значениями в  $U_i$ .

**Определение 2.** В игре  $\Gamma(n+1)$  происходит *поимка*, если существуют момент  $T > 0$  и квазистратегии  $\mathcal{U}_i, i \in I$ , преследователей  $P_i, i \in I$ , такие, что для любого вектора  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n), \theta_i + h_i + \tau_i \leq T_0$ , любой допустимой функции  $v(\cdot)$  найдутся номер  $l \in I$  и момент  $T_0 \in [0, T]$ , для которых  $x_l(T_0) - y(T_0) \in M_l$ .

**Предположение 1.** Для всех  $i \in I$  выполнено  $0 \in U_i^* V$ , где  $A^* B$  — разность по Минковскому множеств  $A$  и  $B$ .

**Предположение 2.** Для каждого  $i \in I$  существует  $t_i > 0$ , для которого справедливо включение  $V h_i \subset (U_i^* V) t_i$ .

Введём следующие обозначения:  $z_i^0 = x_i^0 - y^0, co A$  — выпуклая оболочка множества  $A$ ,

$$\lambda(z_i^0, v) = \sup\{\lambda \geq 0: \lambda(M_i - z_i^0) \cap (U_i - v) \neq \emptyset\},$$

$$\delta = \min_{v \in V} \max\left\{\max_{i \in I} \lambda(z_i^0, v), \max_{j \in J} (p_j, v)\right\}, \quad V_1 = \left\{v \in V: \max_{i \in I} \lambda(z_i^0, v) = 0\right\}.$$

**Теорема 1.** Пусть выполнены предположения 1, 2,  $r \in \{0, 1\}$  и  $\delta > 0$ . Тогда в игре  $\Gamma(n+1)$  происходит поимка (в смысле определения 2).

**Теорема 2.** Пусть выполнены предположения 1, 2,  $r > 1, \delta > 0$  и  $(p_j, v) > 0$  для всех  $v \in co V_1$ . Тогда в игре  $\Gamma(n+1)$  происходит поимка (в смысле определения 2).

**Замечание.** Пусть  $\Omega = \mathbb{R}^k, U_i = V, h_i = 0$  для всех  $i \in I$ . Тогда предположения 1 и 2 выполнены автоматически. Поэтому если  $\delta > 0$ , то в игре  $\Gamma(n+1)$  происходит поимка. Тем самым теорема Б.Н. Пшеничного [2] и её обобщение [3, с. 55] являются следствием теоремы 1.

**Предположение 3.**  $0 \in V$  и для всех  $i \in I$  множества  $M_i^* (-h_i V) \neq \emptyset$ .

Введём обозначения:

$$M_i^1 = M_i^* (-h_i V), \quad \lambda_1(z_i^0, v) = \sup\{\lambda \geq 0: \lambda(M_i^1 - z_i^0) \cap (U_i - v) \neq \emptyset\},$$

$$\delta_0 = \min_v \max\left\{\max_{i \in I} \lambda_1(z_i^0, v), \max_{j \in J} (p_j, v)\right\}, \quad V_2 = \left\{v \in V: \max_{i \in I} \lambda_1(z_i^0, v) = 0\right\}.$$

**Определение 3.** В игре  $\Gamma(n+1)$  происходит поимка, если существуют  $T_0 > 0$ , квази-стратегии  $U_i, i \in I$ , преследователей  $P_i, i \in I$ , такие, что для любого вектора  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ , любой допустимой функции  $v(\cdot)$  найдутся номер  $l \in I$  и момент  $\tau \in [0, T_0]$ , для которых  $x_l(\tau) - y(\tau) \in M_l$ .

**Теорема 3.** Пусть выполнены предположения 1, 3,  $r \in \{0, 1\}$  и  $\delta_0 > 0$ . Тогда в игре  $\Gamma(n+1)$  происходит поимка (в смысле определения 3).

**Теорема 4.** Пусть выполнены предположения 1, 2,  $r > 1, \delta_0 > 0$  и  $(p_j, v) > 0$  для всех  $v \in \text{co } V_2$ . Тогда в игре  $\Gamma(n+1)$  происходит поимка (в смысле определения 3).

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № FEWS-2024-0009.

**Литература**

1. Никольский, М.С. Дифференциальная игра преследования с нарушениями в динамике / М.С. Никольский, Чж. Пэн // Дифференц. уравнения. — 1994. — Т. 30, № 11. — С. 1923–1927.
2. Пшеничный, Б.Н. Простое преследование несколькими объектами / Б.Н. Пшеничный // Кибернетика. — 1976. — № 3. — С. 145–146.
3. Григоренко, Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами / Н.Л. Григоренко. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. — 197 с.

**А. С. Фурсов, П. А. Крылов** (МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия) “О равенстве графов дискретных состояний переключаемой нелинейной системы и её кусочно-линейной аппроксимации” (16 декабря 2024 г.).

Рассматривается управляемая нелинейная аффинная система

$$\dot{x} = g(x) + p(x)u, \quad g(0) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где  $g \in C^1(\Omega)$ , матрица Якоби  $\partial g / \partial x$  липшицева с константой  $L_g$ , а функция  $p(x)$  липшицева с константой  $L_p$  в  $\Omega$  ( $\Omega$  — некоторый выпуклый многогранник, содержащий точку  $x = 0$ ),  $u$  — скалярный управляющий вход.

Сопоставим данной системе её кусочно-линейную аппроксимацию

$$\dot{x} = A_\sigma x + v_\sigma + b_\sigma u, \quad \sigma \in S(F), \tag{2}$$

порождаемую заданным упорядоченным набором точек  $\{x_1, \dots, x_m\}, x_i \in \Omega$ , матрицами  $A_i = \partial g / \partial x|_{x=x_i}$ , векторами  $b_i = p(x_i), v_i = g(x_i), i \in \{1, \dots, m\}$ , и множеством  $F$  всевозможных пар  $(N, D)$ , задающих различные разбиения пространства состояний  $\mathbb{R}^n$  на  $m$  выпуклых замкнутых многогранников  $\bar{M}_i$  (под выпуклым многогранником понимаем выпуклое множество, ограниченное некоторым числом гиперплоскостей, при этом в общем случае многогранник может быть неограниченным),  $x_i \in M_i$  для всех  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Здесь, аналогично работам [1–3],  $N = [n_{ijk}]$  — трёхмерная матрица размерности  $m \times m \times n$ , для которой коэффициент  $n_{ijk}$  обозначает  $k$ -ю компоненту вектора нормали  $n_{ij}$  к плоскости  $P_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n: (n_{ij}, x) = d_{ij}\}$ , содержащей общую грань многогранников  $\bar{M}_i$  и  $\bar{M}_j$ , направленного в сторону многогранника  $\bar{M}_j, d_{ij} \in \mathbb{R}$ , а  $(\cdot, \cdot)$  — стандартное скалярное произведение

в  $\mathbb{R}^n$ ;  $D = [d_{ij}]_{i,j=1}^m$  — матрица в  $\mathbb{R}^{m \times m}$ . При этом очевидно, что  $n_{ji} = -n_{ij}$ ,  $d_{ji} = -d_{ij}$ , и если  $n_{ij} = 0$  (в случае когда многогранники  $\overline{M}_i$  и  $\overline{M}_j$  не имеют общей грани), то считаем, что  $d_{ij} = d_{ji} = 1$ , и для удобства полагаем  $n_{ii} = 0$ ,  $d_{ii} = 1$ . Далее,  $S(F)$  — множество переключающих сигналов  $\sigma$ , где  $\sigma(x; N, D): \mathbb{R}^n \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$  — кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал), задаваемая парой  $(N, D) \in F$  и принимающая постоянное значение  $i$  на каждом открытом выпуклом многограннике  $M_i$ .

Замкнём обе системы (1) и (2) переключаемой обратной связью  $u = -k_\sigma x + w_\sigma$  ( $k_i, w_i \in \mathbb{R}^n$ ) вида

$$\dot{x} = (A_\sigma - b_\sigma k_\sigma)x + v_\sigma + w_\sigma, \quad x \in \Omega, \quad \sigma \in S(F), \tag{3}$$

$$\dot{x} = g(x) - p(x)(k_\sigma x - w_\sigma), \quad x \in \Omega, \quad \sigma \in S(F). \tag{4}$$

Заметим, что замкнутая система (4) является переключаемой. Далее переключаемую систему (3) будем считать кусочно-линейной аппроксимацией системы (4). При этом, аналогично работе [1], обратную связь  $u = -k_\sigma x + w_\sigma$  будем считать допустимой, если выполнено следующее

**Условие А.** Для любой пары  $(N, D) \in F$  и любого набора  $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  такого, что  $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \neq \emptyset$ , верно, что для любого  $x \in \Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$  существует единственный номер  $\alpha_i \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$  такой, что для любого номера  $\alpha_k \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ , для которого  $n_{\alpha_i \alpha_k} \neq 0$ , выполняется неравенство

$$(n_{\alpha_i \alpha_k}, (A_{\alpha_i} - b_{\alpha_i} k_{\alpha_i})x + v_{\alpha_i} - b_{\alpha_i} w_{\alpha_i}) < 0,$$

где

$$\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \bigcap_{i=1}^p \overline{M}_{\alpha_i} \setminus \bigcup_{k \neq \alpha_1, \dots, \alpha_p} \overline{M}_k$$

— множества граничных точек (граней рассматриваемого разбиения), определённые для каждого набора  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$  такого, что  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \{1, \dots, m\}$ ,  $2 \leq p \leq m$ ,  $\alpha_i \neq \alpha_j$  при  $i \neq j$ .

Как показано в работе [1], при выполнении условия А в каждой точке границы многогранников можно доопределить значение переключающего сигнала  $\sigma(x) = \alpha_i$ .

Для каждого переключающего сигнала  $\sigma \in S(F)$  графом дискретных состояний  $G(\sigma)$  переключаемой системы (3) или (4) будем называть ориентированный граф, вершинами которого являются номера режимов соответствующей системы, а наличие ребра  $i \rightarrow j$  означает существование траектории соответствующей системы, при движении вдоль которой режим  $i$  сменяется режимом  $j$ . Далее графы дискретных состояний систем (3) и (4) будем обозначать  $G_{A,b}$  и  $G_{g,p}$  соответственно.

Переключаемая система (3) является *состоятельной аппроксимацией* переключаемой системы (4), если найдётся переключающий сигнал  $\sigma \in S(F)$  такой, что  $G_{A,b}(\sigma) = G_{g,p}(\sigma)$ .

Под равенством графов понимаем, что оба графа построены на одном и том же наборе вершин с номерами  $1, \dots, m$ , символизирующими режимы соответствующей переключаемой системы, а наличие ориентированного ребра от вершины  $i$  к вершине  $j$  в одном графе влечёт существование в другом графе эквивалентного ребра между вершинами с теми же номерами и в том же направлении.

Ставится следующая задача: сформулировать достаточные условия состоятельности заданной аппроксимации (3) для системы (4).

Аналогично как в работе [3] определим множество  $H_\sigma$  как множество квадратных матриц  $H = [h_{ij}]$  порядка  $m$  таких, что  $h_{ij} = 0$ , если  $\Gamma_{ij} = \emptyset$  для данного  $\sigma$ , а остальные элементы равны  $-1$  или  $1$ .

Показателем состоятельности системы (3) будем называть величину

$$\xi = \sup_{\sigma \in S(F)} \xi(\sigma),$$

где

$$\xi(\sigma) = \max_{H \in H_\sigma} \min_{i=1, m} \inf_{x \in \Gamma_i(\sigma)} (\varepsilon_i(x; \sigma, H) - \|e_i(x)\|),$$

$$e_i(x) = g(x) + p(x)u(x) - (A_i x + b_i u + v_i), \quad x \in \Omega,$$

$$\varepsilon_i(x; \sigma, H) = \min_{j: x \in \bar{\Gamma}_{ij}(\sigma)} \varepsilon_{ij}(x; \sigma, H), \quad x \in \Gamma_i(\sigma) = \bar{M}_i(\sigma) \setminus M_i(\sigma),$$

$$\varepsilon_{ij}(x; \sigma, H) = h_{ij}(n_{ij}, (A_i - b_i k_i)x + v_i + w_i b_i), \quad x \in \bar{\Gamma}_{ij}(\sigma).$$

**Теорема.** Если показатель состоятельности системы (3) положителен, то система (3) является состоятельной аппроксимацией системы (4).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

#### Литература

1. Фурсов, А.С. Об устойчивости переключаемой аффинной системы для некоторого класса переключающих сигналов / А.С. Фурсов, П.А. Крылов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 4. — С. 554–562.
2. Фурсов, А.С. О построении графа дискретных состояний переключаемой аффинной системы / А.С. Фурсов, П.А. Крылов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 11. — С. 1541–1549.
3. Фурсов, А.С. О расширении множества разбиений пространства состояний для устойчивой переключаемой аффинной системы / А.С. Фурсов, П.А. Крылов // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 11. — С. 1541–1552.