ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 3, с. 429–432

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.927.4

К ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕНИЯ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВСКОГО ТИПА

© 2025 г. **И. И. Маковецкий**

Белорусско-Российский университет, г. Могилёв, Республика Беларусь

e-mail: imi.makzi@gmail.com

Поступила в редакцию 14.01.2025 г., после доработки 14.01.2025 г.; принята к публикации 27.02.2025 г.

Рассмотрена двухточечная краевая задача для нелинейного обобщения матричного уравнения Ляпунова. Предложен алгоритм с неявной вычислительной схемой построения её решения.

Ключевые слова: двухточечная краевая задача, матричное дифференциальное уравнение, разрешимость

DOI: 10.31857/S0374064125030107, EDN: HMBOIA

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе [1] изучалась задача вида (см. [2, 3])

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X+XB(t)+F(t,X), \tag{1}$$

$$MX(0)+NX(\omega)=0, \tag{2}$$

где $A,B\in C(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, $I=[0,\omega]$, $\omega>0$, $F\in C(D_{\tilde\rho},\mathbb{R}^{n\times n})$, $D_{\tilde\rho}=\{(t,X)\colon t\in I, \|X\|<\tilde\rho\}$, $0<\tilde\rho\leqslant+\infty$, функция $F(t,X)$ удовлетворяет в области $D_{\tilde\rho}$ условию Липшица относительно X (локально), M и N — вещественные $n\times n$-матрицы. Отметим, что в статье [2] эта задача изучалась только при $\tilde\rho=+\infty$.

В [1] установлена принципиальная возможность получения алгоритмов с неявными вычислительными схемами построения приближённых решений задачи (1), (2) (в частности, периодической) в классе допустимых функций, т.е. функций класса $C^1(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, которые подчинены условию (2).

Задачу (1), (2) будем изучать, как и в [1], в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C=\max_{t\in I}\|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ — какая-либо норма матрицы в рамках определения этой алгебры.

Введём следующие обозначения:

$$\tilde H(\omega)=\int\limits_0^\omega H(\tau)\,d\tau,\quad H\in\{A,B\},\quad D_\rho=\{(t,X)\colon t\in I,\ \|X\|\leqslant\rho<\tilde\rho\},$$

$$R=N^{-1}(M+N+N\tilde A(\omega)),\quad S=-\tilde B(\omega),$$

$$\Psi(t)X=A(t)X+XB(t),\quad \Phi X=RX-XS,$$

$$m=\|N^{-1}(M+N)\|,\quad \gamma=\|\Phi^{-1}\|,\quad \alpha=\max_{t\in I}\|A(t)\|,\quad \beta=\max_{t\in I}\|B(t)\|,$$

$$h=\max_{t\in I}\|F(t,0)\|,\quad q=q(\rho)=\gamma\omega[(\alpha+\beta+L)(m+(\alpha+\beta)\omega/2)+L],$$

$$p=\gamma\omega h(m+(\alpha+\beta)\omega/2+1),$$

где $L=L(\rho)$ — постоянная Липшица функции $F(t,X)$ в области D_ρ, при этом оператор Φ и при каждом $t\in I$ оператор $\Psi(t)$ — линейные операторы $\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$. Имеет место

Теорема 1 [1]. *Пусть выполнены следующие условия*: $\det N\neq 0$, *матрицы* R *и* S *не имеют общих характеристических чисел*, $q<1$, $p/(1-q)\leqslant\rho$.

Тогда в области D_ρ *решение* $X=X(t)$ *задачи* (1), (2) *существует и единственно. Это решение представимо в виде предела равномерно сходящейся на отрезке* I *последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением с неявной вычислительной схемой и удовлетворяющих условию* (2), *при этом справедлива оценка*

$$\|X\|_C\leqslant p/(1-q).$$

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Поскольку матрицы M и N равноправны, влияют только на условия разрешимости задач и не связаны с выбором вычислительных схем алгоритмов, то естественным является рассмотрение случая $\det M\neq 0$.

Предлагаемая работа дополняет результаты статьи [1] и развивает исследования в [3] в рамках условия $\det M\neq 0$ в задаче (1), (2).

Введём применительно к этому случаю обозначения

$$R_0=M^{-1}(M\tilde{A}(\omega)-M-N),$$

$$q_0=q_0(\rho)=\gamma_0\omega[(\alpha+\beta+L)(m_0+(\alpha+\beta)\omega/2)+L],$$

$$p_0=\gamma_0\omega h(m_0+(\alpha+\beta)\omega/2+1),$$

$$\Phi_0X=R_0X-XS,\quad X\in\mathbb{R}^{n\times n},$$

$$m_0=\|M^{-1}(M+N)\|,\quad \gamma_0=\|\Phi_0^{-1}\|.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия*: $\det M\neq 0$, *матрицы* R_0 *и* S *не имеют общих характеристических чисел*, $q_0<1$, $p_0/(1-q_0)\leqslant\rho$.

Тогда в области D_ρ *решение* $X=X(t)$ *задачи* (1), (2) *существует и единственно. Это решение представимо в виде предела равномерно сходящейся на отрезке* I *последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением с неявной вычислительной схемой и удовлетворяющих условию* (2), *при этом справедлива оценка*

$$\|X\|_C\leqslant p_0/(1-q_0).$$

Доказательство. По аналогии с [1] введём оператор

$$\mathcal{L}(X(t),Y(t))=M^{-1}(M+N)\int\limits_t^\omega(\Psi(\tau)X(\tau)+F(\tau,Y(\tau)))\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^\omega\big[K_A(t,\tau)(\Psi(\tau,X(\tau))+F(\tau,Y(\tau)))+(\Psi(\tau)X(\tau)+F(\tau,Y(\tau)))K_B(t,\tau)\big]\,d\tau-\int\limits_0^\omega F(\tau,Y(\tau))\,d\tau,$$

где

$$K_H(t,\tau)=\begin{cases}\int\limits_0^\tau H(\sigma)\,d\sigma, & 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant\omega,\\ -\int\limits_\tau^\omega H(\sigma)\,d\sigma, & 0\leqslant t<\tau\leqslant\omega,\end{cases}$$

$$\mathcal{L}\colon C(I,\mathbb{R}^{n\times n})\to C^1(I,\mathbb{R}^{n\times n}).$$

Согласно условию теоремы матрицы R_0 и S не имеют общих характеристических чисел, поэтому линейный оператор Φ_0 однозначно обратим (см. [4, с. 207]). Тогда можно установить, что задача (1), (2) эквивалентна интегральному уравнению

$$X(t)=\Phi_0^{-1}\mathcal{L}(X(t),X(t)). \tag{3}$$

Приближённые решения, построенные классическим методом последовательных приближений (см., например, [5, с. 607]), применительно к уравнению (3) не обязаны принадлежать классу допустимых. Поэтому для построения решения интегральной задачи (3) воспользуемся алгоритмом [1]

$$X_k(t)=\Phi_0^{-1}\mathcal{L}(X_k(t),X_{k-1}(t)),\quad k\in\mathbb{N}, \tag{4}$$

где в качестве начальной функции X_0 может быть взята любая функция из пространства $C(I,\mathbb{R}^{n\times n})$ такая, что $\|X_0\|_C\leqslant\rho$.

Как и в [1] можно установить, что приближения $\{X_k(t)\}_0^{+\infty}$ являются допустимыми, и аналогично доказать, что все члены последовательности $\{X_k(t)\}_0^{+\infty}$ однозначно определяются алгоритмом (4) и принадлежат шару $\|X\|_C\leqslant\rho$.

Анализ сходимости этой последовательности выполняется на основе рассмотрения соответствующего матричного ряда. Поскольку

$$\|X_{k+1}(t)-X_k(t)\|\equiv\|\Delta_k(t)\|\leqslant\gamma_0\Bigg\{m_0\int\limits_0^\omega\big[(\|A(\tau)\|+\|B(\tau)\|)\|\Delta_k(\tau)\|+L\|\Delta_{k-1}(\tau)\|\big]\,d\tau+$$
$$+\int\limits_0^\omega(\|K_A(t,\tau)\|+\|K_B(t,\tau)\|)\big[(\|A(\tau)\|+\|B(\tau)\|)\|\Delta_k(\tau)\|+L\|\Delta_{k-1}(\tau)\|\big]\,d\tau+\int\limits_0^\omega L\|\Delta_{k-1}(\tau)\|\,d\tau\Bigg\}\leqslant$$
$$\leqslant\tilde q_0\|\Delta_k\|_C+(q_0-\tilde q_0)\|\Delta_{k-1}\|_C,$$

то

$$\|\Delta_k\|_C\leqslant\tilde q_0\|\Delta_k\|_C+(q_0-\tilde q_0)\|\Delta_{k-1}\|_C,$$

где

$$\tilde q_0=\gamma_0(\alpha+\beta)\omega[m_0+(\alpha+\beta)\omega/2]<1.$$

Далее

$$\|\Delta_k\|_C\leqslant\tilde q_1\|\Delta_{k-1}\|_C,\quad k\in\mathbb{N}, \tag{5}$$

где $\tilde q_1=(q_0-\tilde q_0)/(1-\tilde q_0)<q_0$.

Из (5) имеем явную оценку

$$\|\Delta_k\|_C\leqslant\tilde q_1^k\|\Delta_0\|_C,\quad k\in\mathbb{N},$$

которая является ключевой в обосновании равномерной сходимости построенной последовательности к решению интегральной задачи (3) и получению оценок

$$\|X-X_m\|_C \leqslant \frac{\tilde{q}_1^m\|\Delta_0\|_C}{1-\tilde{q}_1}, \quad \|X\|_C \leqslant \|X_0\|_C + \frac{\|\Delta_0\|_C}{1-\tilde{q}_1}. \tag{6}$$

Как и в работе [1], при $X_0=0$ оценки (6) существенно упрощаются:

$$\|X-X_m\|_C \leqslant \frac{\tilde{q}_1^m}{1-\tilde{q}_1}\frac{p_0}{1-\tilde{q}_0}, \quad \|X\|_C \leqslant \frac{p_0}{1-q_0}. \tag{7}$$

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаптинский, В.Н. К построению решения двухточечной краевой задачи для нелинейного матричного уравнения Ляпунова / В.Н. Лаптинский, И.И. Маковецкий // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 1. — С. 137–141.
2. Murty, K.N. Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems — exisence and uniqueness / K.N. Murty, G.W. Howell, S. Sivasundaram // J. Anal. Appl. — 1992. — V. 167. — P. 505–515.
3. Лаптинский, В.Н. Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати / В.Н. Лаптинский, И.И. Маковецкий, В.Н. Пугин. — Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2012. — 167 с.
4. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — 2-е изд., доп. — М. : Наука, 1966. — 576 с.
5. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — 2-е изд., перераб. — М. : Наука, 1977. — 741 с.

ON ONE APPROACH TO CONSTRUCTING A SOLUTION TO A TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR MATRIX LYAPUNOV EQUATION

© 2025 / **I. I. Makovetskii**

Belarusian-Russian University, Mogilev, Belarus
e-mail: imi.makzi@gmail.com

A two-point boundary value problem for a nonlinear generalization of the matrix Lyapunov equation is considered. An algorithm with an implicit computational scheme for constructing its solution is proposed.

Keywords: two-point boundary value problem, matrix differential equation, solvability

REFERENCES

1. Laptinskii, V.N. and Makovetskii, I.I., Constructing a solution of a two-point boundary value problem for a nonlinear matrix Lyapunov equation, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 135–139.
2. Murty, K.N., Howell, G.W., and Sivasundaram, S., Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems — exisence and uniqueness, *J. Anal. Appl.*, 1992, vol. 167, pp. 505–515.
3. Laptinskii, V.N., Makovetskii, I.I., and Pugin, V.V., *Matrichnye differencial'nye uravneniya Lyapunova i Rikkati* (Matrix Differential Equations of Lyapunov and Riccati), Mogilev: Belarusian-Russian University, 2012.
4. Gantmakher, F.R., *Teoriya matrits* (Theory of Matrices), Moscow: Nauka, 1967.
5. Kantorovich, L.V. and Akilov, G.P., *Funktsional'nyi analiz* (Functional Analysis), Moscow: Nauka, 1977.