ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 3, с. 410–428

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

О ТОЧНОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С НЕСТАЦИОНАРНЫМ ОПЕРАТОРОМ

© 2025 г. А. В. Чернов

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского

e-mail: chavnn@mail.ru

Поступила в редакцию 24.10.2024 г., после доработки 08.12.2024 г.; принята к публикации 26.12.2024 г.

Для задачи Коши, связанной с управляемым полулинейным эволюционным уравнением с ограниченным нестационарным (т.е. зависящим от времени) оператором в гильбертовом пространстве, получены достаточные условия точной управляемости в заданное конечное состояние (а также в заданные промежуточные состояния в промежуточные моменты времени) на произвольно фиксированном (без дополнительных условий) интервале времени. Фактически обобщён подобный результат, полученный автором ранее для случая стационарного оператора, при этом использованы теорема Минти–Браудера и цепочечная технология последовательного продолжения решения управляемой системы до промежуточных состояний. В качестве примера (представляющего самостоятельный интерес) рассмотрено полулинейное уравнение глобальной электрической цепи в атмосфере Земли.

Ключевые слова: полулинейное эволюционное уравнение, гильбертово пространство, нестационарный ограниченный оператор, точная глобальная управляемость, уравнение глобальной электрической цепи

DOI: 10.31857/S0374064125030094, EDN: HMCENK

ВВЕДЕНИЕ

Проблема управляемости распределённых систем является достаточно актуальной ввиду её практической значимости и потому активно изучается (см. обзоры в [1, 2]). Исследуемые задачи управляемости в последнее время концентрировались, как правило, вокруг задач граничного управления или случая, когда распределённое управление сосредоточено на части области.

Нелокальные достаточные условия точной управляемости доказывались при тех или иных условиях на величину промежутка времени [3, 4] и/или при специальных условиях на операторы правой части (равномерная ограниченность, дифференцируемость по Фреше и равномерная ограниченность производной, глобальная липшицевость и т.д.) и условии точной управляемости (и иногда наблюдаемости) соответствующей линейной системы [1, § 3; 3–6].

В работе [7] исследовалась задача Коши, связанная с управляемым полулинейным эволюционным уравнением вида

$$y'(t) = Gy(t) + f(t, y(t)) + B(t)u(t), \quad t \in [0, T]; \quad y(0) = y_0, \tag{1}$$

с необязательно ограниченным линейным оператором G в гильбертовом пространстве X, управлением $u \in L_2(0, T; X)$, семейством линейных ограниченных операторов $\{B(t)\colon X \to X\colon t \in [0, T]\}$, $B(.)u(.) \in L_2(0, T; X)$ для любого $u \in L_2(0, T; X)$. Для задачи (1) были получены достаточные условия точной управляемости в заданное конечное состояние (а также в заданные промежуточные состояния в промежуточные моменты времени) на произвольно фиксированном (без дополнительных условий) интервале времени. При этом использовались теорема Минти–Браудера, а также цепочечная технология последовательного продолжения решения управляемой системы до промежуточных состояний. В качестве примеров рассматривались полулинейное псевдопараболическое уравнение и полулинейное волновое уравнение.

В данной работе непосредственно обобщаются результаты [7] на случай нестационарного линейного оператора G, т.е. вместо стационарного (не зависящего от времени) оператора G рассматривается сильно непрерывный (по времени) оператор $G(t)$. При этом предполагается ограниченность оператора $G(t)$. Исследование случая неограниченного оператора $G(t)$ сопряжено с определёнными техническими сложностями, поэтому его планируется исследовать в дальнейшем. Отметим также, что в данной работе, в отличие от [7], где рассматривались слабые решения уравнения (1), решение управляемого уравнения понимается в сильном смысле. В качестве примера рассматривается полулинейное уравнение глобальной электрической цепи в атмосфере Земли.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ

Пусть X — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $[\,.\,,.\,]_X$, $G(t)\colon X\to X$ — сильно непрерывный вместе со своим сопряжённым оператором $[G(t)]^*$ (это требуется, чтобы обеспечить существование решения сопряжённой однородной задачи) по $t\in[0;T]$ линейный ограниченный оператор (ЛОО) на X. Напомним, что сильная непрерывность оператора $G(t)$ означает, что для всякого $x\in X$ функция $G(t)x$ непрерывна относительно нормы X. Следуя [8, гл. 5, § 1], рассмотрим задачу Коши для эволюционного уравнения (абстрактного дифференциального уравнения в пространстве X)

$$x'(t)=G(t)x(t)+z(t),\quad t\in[0,T];\quad x(0)=x_0. \tag{2}$$

Непосредственно из теоремы 1.1 в [8, гл. 5, § 1] вытекает

Лемма 1. *При сделанных предположениях для всякого $z\in\mathbf{C}(0,T;X)$ задача Коши (2) имеет единственное решение $x\in\mathbf{C}^1(0,T;X)$. Более того, соответствие $\{x_0,z\}\to x$ непрерывно как отображение $X\times\mathbf{C}(0,T;X)\to\mathbf{C}^1(0,T;X)$.*

Отметим, что $G(.)z(.)\in Z=\mathbf{C}(0,T;X)$ для всех $z\in Z$ [8, гл. 5, § 1, лемма 1.1]. Для $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ обозначим через $x(t,s)=S(t,s)x_0$ решение задачи

$$x'(t)=G(t)x(t),\quad t\in[s,T];\quad x(s)=x_0.$$

Предположим, что отображение $t\to G(t)$ непрерывно в равномерной операторной топологии на отрезке $[0,T]$. Тогда, согласно теореме 5.2 из [9, п. 5.1], отображение $S(t,s)\colon X\to X$ обладает следующими свойствами:

(i) $S(t,s)$ — ЛОО, $\|S(t,s)\|\leqslant\exp\{\int_s^t\|G(\xi)\|\,d\xi\}$;

(ii) $S(t,t)=I$, $S(t,s)=S(t,r)S(r,s)$, $0\leqslant s\leqslant r\leqslant t\leqslant T$;

(iii) отображение $(t,s)\to S(t,s)$ непрерывно в равномерной операторной топологии;

(iv) $\partial S(t,s)/\partial t=G(t)S(t,s)$;

(v) $\partial S(t,s)/\partial s=-S(t,s)G(s)$.

Из леммы 1, а также свойств (i), (iii), (iv) следует, что задача Коши для однородного уравнения равномерно корректна в смысле определения 3.2 из [10, гл. 2]. Тогда, согласно теореме 3.1 из [10, гл. 2], решение задачи (2) представимо в виде

$$x(t)=S(t,0)x_0+\int\limits_0^t S(t,s)z(s)\,ds,\quad t\in[0,T]. \tag{3}$$

Более того, если $x(t,s)$ — решение, удовлетворяющее условию $x(s,s)=x_1$, то

$$x(t,s)=S(t,s)x(s,s)+\int\limits_s^t S(t,\tau)z(\tau)\,d\tau,\quad t\in[s,T].$$

Далее мы получим конкретное представление для функции $S(t,s)$. В соответствии с [11, гл. 6, § 2, п. 2.6] оператор $\Phi(t)=\int_a^t G(\xi)\,d\xi$ для сильно непрерывного ЛОО $G(t)$ определяется для любого $x\in X$ формулой

$$\Phi(t)x=\int\limits_a^t G(\xi)x\,d\xi.$$

При этом имеют место свойства $\|\Phi(t)\|\leqslant\int_a^t\|G(\xi)\|\,d\xi$, $d\Phi(t)x/dt=G(t)x$.

Зафиксируем $s\in[0,T)$ и для $t\in[s,T]$ обозначим для краткости $\varphi(t)=x(t,s)$, предполагая, что $x(s,s)=\varphi_0$. Очевидно, что

$$\varphi(t)=\varphi_0+\int\limits_s^t G(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi=\varphi_0+\int\limits_s^t G(t_1)\biggl[\varphi_0+\int\limits_s^{t_1}G(t_2)\varphi(t_2)\,dt_2\biggr]\,dt_1=\ldots=\biggl(\sum_{n=0}^\infty\Phi_n(t,s)\biggr)\varphi_0,$$

где $\Phi_0(t,s)=I$, $\Phi_1(t,s)=\int_s^t G(t_1)\,dt_1$,

$$\Phi_n(t,s)=\Phi_n[G](t,s)=\int\limits_s^t G(t_1)\int\limits_s^{t_1}G(t_2)\int\limits_s^{t_2}G(t_3)\ldots\int\limits_s^{t_{n-1}}G(t_n)\,dt_n\ldots dt_3\,dt_2\,dt_1,\quad n=2,3,\ldots$$

Таким образом,

$$S(t,s)=\sum_{n=0}^\infty\Phi_n(t,s).\tag{4}$$

Лемма 2. *Пусть* $a\in L_1[s,T]$, $A_n(t,s)=\Phi_n[a](t,s)$, $n\in\mathbb{N}$, $A_0=1$. *Тогда*

$$A_n(t,s)=\frac{1}{n!}\biggl(\int\limits_s^t a(\xi)\,d\xi\biggr)^n,\quad n=0,1,\ldots\tag{5}$$

Следовательно,

$$\sum_{n=0}^\infty A_n(t,s)=\exp\biggl\{\int\limits_s^t a(\xi)\,d\xi\biggr\}.$$

Доказательство. Для $n=0,1$ утверждение очевидно. Пусть $n=2$. Заметим, что

$$\frac{d}{dt}A_2(t,s)=\frac{d}{dt}\int\limits_s^t a(t_1)\int\limits_s^{t_1}a(t_2)\,dt_2\,dt_1=a(t)\int\limits_s^t a(t_2)\,dt_2=\frac{1}{2!}\frac{d}{dt}\biggl(\int\limits_s^t a(\xi)\,d\xi\biggr)^2.$$

Поскольку $A_2(s,s)=0$, отсюда получаем справедливость формулы (5) для $n=2$. Действуя по индукции, предположим, что формула (5) справедлива для $n=k$, и докажем, что в таком случае она справедлива и для $n=k+1$. Заметим, что

$$\frac{d}{dt}A_{k+1}(t,s)=\frac{d}{dt}\int\limits_s^t a(t_1)A_k(t_1,s)\,dt_1=a(t)A_k(t,s)=\frac{1}{(k+1)!}\frac{d}{dt}\biggl(\int\limits_s^t a(\xi)\,d\xi\biggr)^{k+1}$$

в силу формулы (5) при $n=k$. Это означает, что формула (5) справедлива для $n=k+1$. По индукции заключаем, что она справедлива для всех $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Лемма доказана.

Отметим, что формула (4) отнюдь не эквивалентна формуле

$$S(t,s)=\exp\left\{\int\limits_s^t G(\xi)\,d\xi\right\}.$$

Препятствием, например, является то обстоятельство, что операторы $G(t)$ и $\int_s^t G(\xi)\,d\xi$ в общем случае неперестановочны. Тем не менее лемма 2 позволяет получить оценку нормы оператора $S(t,s)$ в полном соответствии со свойством (i). При этом нам достаточно лишь сильной непрерывности ЛОО $G(t)$. Как указано в [10, гл. 2, § 2], из сильной непрерывности ЛОО $G(t)$ следует его равномерная ограниченность на отрезке $[0,T]$: $\|G(t)\|\leqslant M_0$ (это следствие теоремы Банаха–Штейнгауза [12, теорема 7.1.12]).

Замечание 1. Обозначим через $\overline{\Phi}_n(t,s)$ частичную сумму ряда (4). Согласно лемме 2 при $m\geqslant n$ справедлива оценка

$$\|(\overline{\Phi}_m(t,s)-\overline{\Phi}_n(t,s))\varphi_0\|_X\leqslant\|\varphi_0\|_X\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\gamma^k}{k!}\to 0$$

при $n\to\infty$, где $\gamma=M_0T$. Стало быть, последовательность $\overline{\Phi}_n(t,s)\varphi_0$ фундаментальна в X, а значит, ввиду полноты пространства X, сходится в нём. Поэтому сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(t,s)\varphi_0$ определена как элемент пространства X. Тем самым формула (4) определяет оператор $X\to X$. Очевидно, что это линейный оператор, а по лемме 2 и ограниченный.

Лемма 3. *Для выполнения свойств (i)–(v) достаточно лишь сильной непрерывности ЛОО $G(t)$ (т.е. непрерывность в равномерной операторной топологии не требуется).*

Доказательство. О выполнении свойства (i) уже было сказано выше. Свойство (ii), с учётом леммы 1, доказывается точно как в [9, гл. 5, п. 5.1, теорема 5.2]. При выполнении свойства (iii) свойства (iv) и (v) также доказываются как в [9, гл. 5, п. 5.1, теорема 5.2]. Поэтому остаётся лишь установить свойство (iii). Для достаточно близких (t_0,s_0), (t_1,s_1) из треугольника $\{(t,s)\colon 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\}$ и таких, что (для определённости) $s_0\leqslant s_1$, рассмотрим разность

$$S(t_1,s_1)-S(t_0,s_0)=S(t_1,s_1)-S(t_1,s_0)+S(t_1,s_0)-S(t_0,s_0).$$

Непрерывность $S(t,s)$ по $t\in[s,T]$ в соответствии с представлением (4) очевидна, поэтому сразу же получаем, что $S(t_1,s_0)-S(t_0,s_0)\to 0$ при $(t_1,s_1)\to(t_0,s_0)$.

По свойству (ii) имеем $S(t_1,s_1)-S(t_1,s_0)=S(t_1,s_1)[I-S(s_1,s_0)]$.

По формуле (4) $S(s_1,s_0)-I=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(s_1,s_0)$.

Таким образом,

$$\|S(s_1,s_0)-I\|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\|\Phi_n(s_1,s_0)\|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n[M_0](s_1,s_0).$$

Тогда по лемме 2

$$\|S(s_1,s_0)-I\|\leqslant\exp\left\{M_0\int\limits_{s_0}^{s_1}d\xi\right\}-1,\quad \|S(t_1,s_1)\|\leqslant\exp\{M_0T\}=M.$$

Следовательно,

$$\|S(t_1,s_1)-S(t_1,s_0)\|\leqslant M\left(\exp\left\{M_0\int\limits_{s_0}^{s_1}d\xi\right\}-1\right)\to 0\quad\text{при}\quad(t_1,s_1)\to(t_0,s_0).$$

Лемма доказана.

Замечание 2. Напомним, что для ЛОО $A\colon X\to X$ определяется так называемая *операторная экспонента* $\exp\{A\}=e^A=\sum_{n=0}^{\infty}A^n/n!$. Следующее свойство операторной экспоненты хорошо известно: $e^{(t+\tau)A}=e^{tA}e^{\tau A}$ для любых $t,\tau\in\mathbb{R}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что при перемножении рядов в правой части этого равенства получим ряд, в котором при степени A^n будет коэффициент вида

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\frac{\tau^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}t^k\tau^{n-k}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k t^k\tau^{n-k}=\frac{1}{n!}(t+\tau)^n.$$

Отсюда же ясно, что равенство $e^{A+B}=e^Ae^B$ возможно лишь для перестановочных операторов: $AB=BA$.

Функцию x, существование и единственность которой в пространстве $\mathbf{C}^1(0,T;X)$ утверждаются в лемме 1, будем называть *сильным решением* задачи (2).

Замечание 3. Формула (3) имеет смысл для всех $z\in L_1(0,T;X)$. По терминологии [9, гл. 4, определение 2.3] при $z\in L_1(0,T;X)$ формула (3) определяет *слабое решение* (*mild solution*) задачи (2). Фактически это п.в.-решение в пространстве $\mathbf{AC}(0,T;X)$ абсолютно непрерывных функций. Поэтому альтернативно дальнейшую теорию можно было бы развивать и для слабых решений управляемой задачи.

Далее будем предполагать, что оператор G удовлетворяет следующему условию:

G_1) $\|G(t)\|\leqslant M_0$ для всех $t\in[0,T]$.

Как уже было отмечено, это условие выполняется автоматически; нам важен лишь выбор константы. Следующее утверждение вытекает непосредственно из (4) и леммы 2 или свойства (i).

Лемма 4. *Пусть выполнено предположение* G_1). *Тогда для всех* $s,t\in[0,T]$ *имеем*

$$\left\|\int_t^s G(\tau)\,d\tau\right\|\leqslant TM_0=M_1,\qquad \|S(t,s)\|\leqslant \exp\{M_1\}=M.$$

Непосредственно из леммы 4 вытекает

Лемма 5. *Пусть выполнено предположение* G_1); $A[z](t)=\int_0^t S(t,s)z(s)\,ds$ $(t\in[0,T])$ — *решение задачи* (2) *при* $x_0=0$, $z\in Z=\mathbf{C}(0,T;X)$. *Тогда для* $t\in[0,T]$ *справедлива оценка*

$$\|A[z](t)\|_X\leqslant M\int_0^t\|z(s)\|_X\,ds.$$

Для дальнейшего нам понадобится также следующее утверждение (см., например, [13, лемма 4.5; 14, гл. 5, § 5, следствие 2]).

Лемма 6. *Для всех* $z\in L_1(0,T;X)$ *и ЛОО* $\Psi\colon X\to Y$, *где* X, Y — *банаховы пространства, имеем*

$$\Psi\int_0^T z(s)\,ds=\int_0^T\Psi z(s)\,ds.$$

Пусть U — некоторое гильбертово пространство, понимаемое как множество значений управления, $\mathbf{C}(0,T;U)$ — множество допустимых управлений. Далее, в контексте исследования проблемы управляемости системы вида (1) при замене $G=G(t)$ (в том числе и в линейном случае $f\equiv 0$) везде будем предполагать, что семейство линейных ограниченных операторов $\{B(t)\colon U\to X : t\in[0,T]\}$ таково, что

$$B(.)u(.)\in Z,\quad B^*(.)x(.)\in\mathbf{C}(0,T;U),\quad u\in\mathbf{C}(0,T;U),\ \ x\in\mathbf{C}^1(0,T;X);\quad \|B(.)\|\in L_2[0,T],$$

где во избежание громоздкости обозначение $B^*(t)$ понимается как $[B(t)]^*$.

При этом будем считать выполненным также следующее предположение:
B_1) существуют $t_b = t_b(T) \in (0,T)$, $b \in L_2^+[t_b,T]$, $b \neq 0$, такие, что

$$\|B^*(t)x\|_U \geqslant b(t)\|x\|_X \quad \text{для п.в. } t \in [t_b,T] \text{ и для любых } x \in X.$$

Лемма 7. *Пусть выполнены условия* G_1), B_1); *числа* $\gamma > 0$, $t_* \in [t_b,T]$ *таковы, что*

$$\exp\{\gamma\} - 1 \leqslant \frac{1}{2}, \quad t_* \geqslant T - \frac{\gamma}{M_0}.$$

Тогда $\|B^*(t)S^*(T,t)x\|_U \geqslant a(t)\|x\|_X$ *для п.в.* $t \in [t_*,T]$, *где* $a(t) = b(t)/2$.

Доказательство. Из доказательства леммы 3 и свойства (ii) следует, что имеет место оценка

$$\|S^*(T,t) - I\| = \|S(T,t) - I\| \leqslant \exp\{M_0(T-t)\} - 1 \leqslant \exp\{\gamma\} - 1 \leqslant \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\|S^*(T,t)x\|_X = \|(S(T,t)-I)^*x + x\| \geqslant \|x\|_X - \|(S(T,t)-I)^*\|\|x\|_X \geqslant \frac{1}{2}\|x\|_X$$

для п.в. $t \in [t_*,T]$ и для любых $x \in X$. С учётом условия B_1) получаем

$$\|B^*(t)S^*(T,t)x\|_U \geqslant b(t)\|S^*(T,t)x\|_X \geqslant \frac{1}{2}\, b(t)\, \|x\|_X$$

для п.в. $t \in [t_*,T]$ и для любых $x \in X$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть* $\varphi(s) = S^*(T,s)y$, $y \in X$. *Тогда* $\varphi \in \mathbf{C}^1(0,T;X)$ *является сильным решением задачи*

$$\varphi'(s) = -G^*(s)\varphi(s), \quad s \in [0,T]; \quad \varphi(T) = y. \tag{6}$$

Доказательство. Для любых $x, y \in X$ в соответствии со свойством (v) имеем

$$\frac{d}{ds}[x, S^*(t,s)y] = \frac{d}{ds}[S(t,s)x, y] = \left[\frac{d}{ds}\, S(t,s)x, y\right] = -[S(t,s)G(s)x, y] = -[x, G^*(s)S^*(t,s)y].$$

В частности, при $t = T$ получаем, что функция $\varphi(s) = S^*(T,s)y$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{d}{ds}[\varphi(s), x] = [-G^*(s)\varphi(s), x] = [\varphi(s), -G(s)x] \quad \text{для любого } x \in X.$$

Последнее означает, что $\varphi(s)$ является слабым решением задачи (6) в смысле [15, теорема 4.8.3]. Из непрерывности по $s \in [0,T]$ функции $[S(T,s)G(s)x, y]$ вытекает непрерывная дифференцируемость функции $[\varphi(s), x]$, а отсюда — (по меньшей мере) слабая непрерывность функции $\varphi(s)$, т.е. $\varphi \in \mathbf{C}_w(0,T;X) \subset L_\infty(0,T;X)$. С другой стороны, нетрудно заметить, что функция $x(s) = \varphi(T-s)$ является в таком случае слабым решением задачи

$$x'(s) = G^*(T-s)x(s), \quad s \in [0,T]; \quad x(0) = y. \tag{7}$$

Покажем, что это слабое решение единственно. Предположим, что существуют два слабых решения $x_1(s)$, $x_2(s)$; обозначим $z = x_1 - x_2$. Тогда

$$[z(s), y] = \int_0^s [G^*(T-\tau)z(\tau), y]\, d\tau, \quad y \in X.$$

Отсюда получим, что $|[z(s), y]| \leqslant M_0\|y\| \int_0^s \|z(\tau)\|\, d\tau$.

В частности, при $y=z(s)$ $\|z(s)\|\leqslant M_0\int_0^s\|z(\tau)\|\,d\tau$. По лемме Гронуолла отсюда вытекает, что $\|z(s)\|\equiv 0$, т.е. $x_1=x_2$.

Поскольку по нашим предположениям ЛОО $G^*(s)$ сильно непрерывен, то по лемме 1 задача (7), а стало быть, и задача (6) имеют единственное сильное решение в классе $\mathbf{C}^1(0,T;X)$. Очевидно (см., например, [16, доказательство леммы 2.2]), что для сильной производной справедливо равенство
$$\frac{d}{ds}[\varphi(s),x]=[\varphi'(s),x],\quad x\in X.$$
Поэтому всякое сильное решение является также и слабым (а оно, как мы установили, единственно). Отсюда заключаем, что $\varphi(s)=S^*(T,s)y$ для всякого $y\in X$ является сильным решением задачи (6) в классе $\mathbf{C}^1(0,T;X)$. Лемма доказана.

Замечание 4. В случае когда $G(t)$ — замкнутый линейный оператор с плотной в X областью определения $D(G)$, не зависящей от $t\in[0,T]$, свойства (ii), (iii), а также (iv), (v) в поточечном смысле на $D(G)$ постулируются как свойства семейства эволюционных операторов для $G(t)$ и проверяются специально для того или иного конкретного оператора $G(t)$ (см. [12, п. 10.3.2 и пример 10.14 проверки]). При выполнении этих свойств оказывается справедливой формула (3), причём задача Коши для нелинейного дифференциального уравнения равносильна соответствующему интегральному уравнению (см. [12, теорема 10.3.5]). Свойство (i) нам требуется только для того, чтобы получить равномерную оценку нормы $S(t,s)$. Если известно конкретное выражение для эволюционного оператора $S(t,s)$, то такую оценку тоже получить нетрудно. Поскольку дальнейшее изложение основано кроме этого лишь на свойствах (ii)–(v), то результаты данной статьи можно рассматривать как основу для последующего изучения случая неограниченного оператора $G(t)$.

2. ТОЧНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ СЛУЧАЕ

В предположении, что выполнены условия $\mathrm{G}_1)$, $\mathrm{B}_1)$, $y_0\in X$, рассмотрим задачу Коши для управляемого линейного эволюционного уравнения
$$y'(t)=G(t)y(t)+B(t)u(t),\quad t\in[0,T];\quad y(0)=y_0, \tag{8}$$
где $u(t)$ — управляющая функция из класса $\mathbf{C}(0,T;U)$. Обозначим через $y(t;u)$ сильное решение задачи (8), отвечающее управлению u. Исследуем разрешимость задачи управления: для заданного конечного состояния $y_1\in X$ найти управление $u\in\mathbf{C}(0,T;U)$ такое, что $y(T;u)=y_1$.

Напомним следующие известные определения.

Пусть $\mathcal{X}$ — банахово пространство, $\langle\,.\,,.\,\rangle$ — скобка двойственности между пространствами $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^*$ (действие функционала из $\mathcal{X}^*$ на элемент из $\mathcal{X}$), $\Omega\subset\mathcal{X}$ — заданное множество. Оператор $F\colon\mathcal{X}\to\mathcal{X}^*$ называется *хеминепрерывным* на Ω, если для всех $x,y\in\mathcal{X}$, $z\in\Omega$ и $t\in\mathbb{R}$ таких, что $z+ty\in\Omega$, имеет место равенство $\lim_{t\to 0}\langle F[z+ty]-F[z],x\rangle=0$. Ясно, что из непрерывности оператора F следует его хеминепрерывность.

Оператор $F:\mathcal{X}\to\mathcal{X}^*$ называется *монотонным*, если $\langle F[y]-F[z],y-z\rangle\geqslant 0$ для любых $y,z\in\mathcal{X}$. Если указанное неравенство выполняется как строгое при $y\neq z$, то оператор F называется *строго монотонным.*

Наконец, если существует константа $\beta>0$ такая, что
$$\langle F[y]-F[z],y-z\rangle\geqslant\beta\|y-z\|^2_{\mathcal{X}}\quad\text{для любых } y,z\in\mathcal{X},$$
то говорят, что оператор F *сильно монотонный.*

Следующее утверждение известно как теорема Минти–Браудера [17, теорема 2.1].

Лемма 9. *Пусть во всём рефлексивном банаховом пространстве $\mathcal{X}$ задан хеминепрерывный монотонный оператор $F\colon \mathcal{X}\to\mathcal{X}^*$, удовлетворяющий условию коэрцитивности*:

$$\langle F(x),x\rangle\geqslant\gamma(\|x\|_{\mathcal{X}})\|x\|_{\mathcal{X}},$$

где $\gamma(t)$ — вещественная функция при $t\geqslant 0$, $\lim_{t\to+\infty}\gamma(t)=+\infty$. Тогда оператор F осуществляет сюръективное отображение пространства $\mathcal{X}$ на (всё) пространство $\mathcal{X}^*$. Иными словами, для каждого $y\in\mathcal{X}^*$ уравнение $F[x]=y$ имеет решение $x\in\mathcal{X}$.

Как известно, гильбертово пространство X является рефлексивным, причём в качестве скобки двойственности можно взять скалярное произведение $[\,.\,,.\,]_X$, если (в соответствии с теоремой Рисса) отождествить X и X^*. Очевидно, что для выполнения условия коэрцитивности линейного оператора $F\colon X\to X$ достаточно его сильной монотонности:

$$[F(\xi_1)-F(\xi_2),\xi_1-\xi_2]_X\geqslant\alpha\|\xi_1-\xi_2\|_X^2\quad\text{для любых }\xi_1,\xi_2\in X;\quad \alpha>0.$$

Для произвольного $x\in X$ положим

$$u(t)=B^*(t)S(T,t)^*x. \tag{9}$$

Согласно лемме 8 $S(T,t)^*x$ есть элемент пространства $\mathbf{C}^1(0,T;X)$, и соответственно, $u\in\mathbf{C}(0,T;U)$. Определим оператор $F=F_T\colon X\to X$ формулой

$$F[x]=\int\limits_0^T S(T,t)B(t)B^*(t)S^*(T,t)x\,dt,\quad x\in X.$$

В силу условия G_1) F — линейный ограниченный оператор, $\|F\|\leqslant M^2\int_0^T\|B(t)\|^2\,dt$.

Отсюда следует, что оператор F непрерывен, а значит, и хеминепрерывен.

Лемма 10. *Оператор F сильно монотонный.*

Доказательство. Для всех $\xi_1,\xi_2\in X$ и $\xi=\xi_1-\xi_2$ ввиду леммы 6 получаем

$$[F(\xi_1)-F(\xi_2),\xi_1-\xi_2]_X=[F(\xi),\xi]_X=\int\limits_0^T[S(T,s)B(s)B^*(s)S(T,s)^*\xi,\xi]_X\,ds=$$

$$=\int\limits_0^T[B^*(s)S(T,s)^*\xi,B^*(s)S(T,s)^*\xi]_U\,ds=\int\limits_0^T\|B^*(s)S(T,s)^*\xi\|_U^2\,ds,$$

и в силу условия B_1) и леммы 7

$$[F(\xi),\xi]_X\geqslant\int\limits_{t_*(T)}^T\|B^*(s)S(T,s)^*\xi\|_U^2\,ds\geqslant\alpha\|\xi\|_X^2,\quad \alpha=\alpha(T)=\int\limits_{t_*(T)}^T a^2(t)\,dt>0.$$

Лемма доказана.

Непосредственно из лемм 9, 10 вытекает, что уравнение $F[x]=y$ имеет решение $x\in X$ для любого $y\in X$. А ввиду сильной монотонности (для этого достаточно было бы строгой) решение единственно, т.е. определён обратный линейный оператор $F^{-1}\colon X\to X$. Более того, пользуясь оценкой из доказательства леммы 10, а также неравенством Коши–Буняковского, можем оценить норму решения:

$$[y=F(x),x]_X\geqslant\alpha(T)\|x\|_X^2\quad\Rightarrow\quad\|x\|_X\leqslant\frac{1}{\alpha(T)}\,\|y\|_X.$$

Таким образом, F^{-1} — ЛОО, $\|F^{-1}\| = \|F_T^{-1}\| \leqslant 1/\alpha(T)$.

Решение поставленной задачи управления определяется как $u(t) = B^*(t)S(T,t)^*x$, где $x \in X$ — решение уравнения

$$y_1 = y(T;u) = S(T,0)y_0 + F[x],$$

т.е. $x = F^{-1}[y_1 - S(T,0)y_0]$. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* G_1), B_1). *Тогда для любого* $y_1 \in X$ *поставленная задача управления имеет решение вида* (9), *где* $x \in X$, $x = F^{-1}[y_1 - S(T,0)y_0]$, $F^{-1}\colon X \to X$ — *линейный ограниченный оператор.*

3. ТОЧНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ В НЕЛИНЕЙНОМ СЛУЧАЕ НА МАЛОМ ПРОМЕЖУТКЕ

Прежде всего рассмотрим в качестве вспомогательной задачу (2). Как уже пояснялось выше, для любых $x_0 \in X$, $z \in Z$ в множестве $\mathbf{C}^1(0,T;X)$ существует единственное сильное решение задачи (2) и оно даётся формулой (3). Решение, отвечающее $x_0 \in X$ при $z = 0$, будем обозначать $x = \Theta[x_0](t) = S(t)x_0$. Решение, отвечающее $z \in Z$ при $x_0 = 0$, будем обозначать $x = A[z](t)$. Далее, считая элемент $x_0 \in X$ фиксированным, положим $\theta(t) = \Theta[x_0](t)$. Как видно из представления (3), сильное решение задачи (2) можно записать в виде

$$x(t) = \theta(t) + A[z](t), \quad t \in [0,T].$$

Пусть $E = E(T) = \mathbf{C}(0,T;X)$, $Z = E$; $u \in \mathbf{C}(0,T;U)$ — управляющая функция. Предположим, что задана функция (оператор) $f\colon [0,T] \times X \to X$, удовлетворяющая условиям:

F_1) для всех $x \in E$ отображение $[0,T] \ni t \to f(t,x(t))$ принадлежит классу Z;

F_2) существует функция $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t,M)\colon [0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0,T]$ и неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$, такая, что для всех $x,y \in X$, $\|x\|_X$, $\|y\|_X \leqslant M$, п.в. $t \in [0,T]$ имеем $\|f(t,x) - f(t,y)\|_X \leqslant \mathcal{N}(t,M)\|x-y\|_X$;

F_3) существует функция $\mathcal{N}_1(t,r)\colon [0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по Лебегу по t, такая, что $\|f(t,\xi)\|_X \leqslant \mathcal{N}_1(t,M)$ для всех $M > 0$, $\xi \in X$, $\|\xi\|_X \leqslant M$, п.в. $t \in [0,T]$.

Замечание 5. Условие F_3) можно заменить следующим:

F_3') существует функция $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_2(t)\colon [0,T] \to \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0,T]$, такая, что $\|f(t,0)\|_X \leqslant \mathcal{N}_2(t)$ для п.в. $t \in [0,T]$.

Действительно, предположим, что выполнены условия F_2), F_3'). Оценим

$$\|f(t,\xi)\|_X \leqslant \|f(t,\xi) - f(t,0)\|_X + \|f(t,0)\|_X \leqslant \mathcal{N}(t,M)\|\xi\|_X + \mathcal{N}_2(t) \leqslant \mathcal{N}_1(t,M),$$

где $\mathcal{N}_1(t,M) \equiv \mathcal{N}(t,M)M + \mathcal{N}_2(t)$.

Будем рассматривать управляемое полулинейное эволюционное уравнение вида (1) при замене $G = G(t)$, понимая его (сильное) решение как решение операторного уравнения типа Гаммерштейна:

$$y(t) = \theta(t) + A[f(\,.\,,y(\,.\,)) + B(\,.\,)u(\,.\,)](t), \quad t \in [0,T]; \quad y \in E, \tag{10}$$

при $\theta(t) = S(t)y_0$, $\theta \in \mathbf{C}^1(0,T;X) \subset E$. Здесь и далее для краткости полагаем $S(t) = S(t;0)$. Ясно, что всякое решение $y \in E$ в соответствии со свойствами оператора правой части принадлежит также и пространству $\mathbf{C}^1(0,T;X)$.

Исследуем разрешимость задачи управления: для заданного конечного состояния $y_1 \in X$ найти управление $u \in \mathbf{C}(0,T;U)$, которому отвечает хотя бы одно решение $y = y(t;u)$ уравнения (1) (или, что то же самое, уравнения (10)) такое, что $y(T;u) = y_1$.

Предполагая, что управление u имеет вид (9), будем использовать ЛОО F и F^{-1} из п. 2. Соответственно определим оператор $\mathcal{F}=\mathcal{F}_T\colon E\to E$ формулой

$$\mathcal{F}[y](t)=S(t)y_0+\int\limits_0^t S(t,s)f(s,y(s))\,ds+\int\limits_0^t S(t,s)B(s)B^*(s)S(T,s)^*F^{-1}[\omega(y)]\,ds,$$

где $\omega(y)=\omega_T(y)\equiv y_1-S(T)y_0-\int_0^T S(T,\xi)f(\xi,y(\xi))\,d\xi$.

Прежде всего исследуем разрешимость уравнения

$$y=\mathcal{F}_T[y],\quad y\in E=E(T). \tag{11}$$

Рассмотрим случай, когда произвольно фиксировано некоторое $T_0>0$, а число $T\in(0,T_0]$ подбирается достаточно малым. Кроме того, будем предполагать выполненными следующие условия:

F_4) существуют неубывающие функции $K_i\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $i=1,2$, такие, что для любого $\sigma>0$ справедливы оценки $\int_h\mathcal{N}(s,\sigma)\,ds\leqslant K_1(\sigma)\operatorname{mes}h$, $\int_h\mathcal{N}_1(s,\sigma)\,ds\leqslant K_2(\sigma)\operatorname{mes}h$;

B_1') существует число $\beta_0>0$ такое, что $\|B^*(t)x\|_U\geqslant\beta_0\|x\|_X$ для п.в. $t\in[0,T_0]$;

B_2) существует $\beta>0$ такое, что $\|B(t)\|\leqslant\beta$ для всех $t\in[0,T_0]$.

Для выполнения условия F_4) достаточно существенной ограниченности функций $\mathcal{N}(\,.\,,\sigma)$, $\mathcal{N}_1(\,.\,,\sigma)$ на отрезке $[0,T_0]$.

Непосредственно из леммы 7 вытекает

Лемма 11. *Пусть выполнены предположения* G_1), B_1'), *а число* $\gamma>0$ *таково, что* $\exp\{\gamma\}-1\leqslant1/2$. *Тогда для всех* $T\in(0,T_0]$

$$\|B^*(t)S^*(T,t)x\|_U\geqslant a(t)\|x\|_X\quad\text{для п.в. } t\in[t_*,T],$$

где $a(t)\equiv\beta_0/2$, $t_*=t_*(T)=T(1-\kappa_0)$ *при любом выборе* $\kappa_0\in(0,\kappa_1)$, $\kappa_1=\min\{1,\gamma/M_0\}$. *И соответственно,*

$$\alpha(T)=\int\limits_{t_*(T)}^T a^2(t)\,dt\geqslant\kappa T,\quad\kappa=\frac14\kappa_0\beta_0^2.$$

Замечание 6. Поскольку для дальнейшего важно лишь утверждение леммы 11, то непосредственно из самого утверждения понятно, что условие B_1') можно ослабить: достаточно потребовать существования последовательности $T_n\searrow+0$ такой, что $\{T_n\}\subset[0,T_0]$ и неравенство из условия B_1') выполняется лишь в некоторой левой окрестности каждой из точек T_n. Но тогда и управляемость будет доказываться не для любого достаточно малого $T>0$, а лишь для точек T_n.

Лемма 12. *Для каждого* $x_0\in X$ *найдутся константы* $\omega>0$ *и* $K(x_0)=(M_0+1)\|x_0\|_X$ *такие, что*

$$\left\|\frac{S(t,t_0)x_0-x_0}{t-t_0}\right\|_X\leqslant K(x_0)\quad\text{для любых } 0\leqslant t_0<t\leqslant T,\ t-t_0<\omega.$$

Доказательство. Как было показано при доказательстве леммы 3, имеет место оценка

$$\left\|\frac{S(t,t_0)-I}{t-t_0}\right\|\leqslant\frac{\varphi(t-t_0)-\varphi(0)}{t-t_0},$$

где $\varphi(s)=\exp\{M_0 s\}$. Поскольку существует $\varphi'(0)=M_0$, найдётся число $\omega>0$ такое, что

$$\frac{\varphi(s)-\varphi(0)}{s}<M_0+1, \quad s\in(0,\omega).$$

Лемма доказана.

При заданных $y_0,y_1\in X$ положим

$$\sigma=\sigma(y_0,y_1)=M\|y_0\|_X+\kappa^{-1}M^2\beta^2\|y_1-y_0\|_X+1, \quad \Omega(T)=\{y\in E(T)\colon \|y\|_{E(T)}\leqslant\sigma\}.$$

Лемма 13. *Пусть выполнены предположения* G$_1$), B$'_1$), F$_1$)–F$_4$). *Тогда для любых* $y_0,y_1\in X$ *найдётся* $\delta_1=\delta_1(y_0)>0$ *такое, что для всех* $T\in(0,\delta_1)$ *и* $y\in\Omega(T)$ *имеем*

$$\kappa\|F_T^{-1}[\omega_T(y)]\|_X\leqslant\frac{\|y_1-y_0\|_X}{T}+K(y_0)+1+MK_2(\sigma), \quad \kappa\|F_T^{-1}\|\int\limits_0^T\mathcal{N}(t,\sigma)\,dt\leqslant K_1(\sigma).$$

Доказательство практически дословно повторяет доказательство леммы 4.1 из [7], с тем лишь отличием, что вместо ссылок на условия G$_3$), G$_4$) в [7] (при $X'=X$) следует использовать ссылки на леммы 11, 12 и вместо $S(T-s)$ выступает $S(T,s)$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* G$_1$), F$_1$)–F$_4$), B$'_1$), B$_2$). *Тогда для любых* $y_0,y_1\in X$ *существует* $\delta=\delta(y_0,y_1)>0$ *такое, что для произвольно фиксированного* $T\in(0,\delta)$ *уравнение* (11) *однозначно разрешимо на множестве* $\Omega(T)$.

Доказательство практически дословно повторяет доказательство теоремы 4.1 из [7], с тем лишь отличием, что вместо ссылок на условия G$_3$), G$_4$) (при $X'=X$) используются ссылки на леммы 11, 12 и вместо $S(T-s)$ выступает $S(T,s)$. Теорема доказана.

Считаем, что $y\in\Omega(T)$ — решение уравнения (11). Положим

$$x=F_T^{-1}\left[y_1-S(T)y_0-\int\limits_0^T S(T,s)f(s,y(s))\,ds\right]=F_T^{-1}[\omega_T(y)], \tag{12}$$

$u(t)=B^*(t)S^*(T,t)x$. Учитывая, что y — решение (11), имеем

$$y(t)=S(t)y_0+\int\limits_0^t S(t,s)f(s,y(s))\,ds+\int\limits_0^t S(t,s)B(s)u(s)\,ds, \quad t\in[0,T].$$

Стало быть, y — решение уравнения (10). Иначе говоря, $y\in\mathbf{C}^1(0,T;X)$ и является решением задачи Коши (1), отвечающим управлению u, т.е. $y=y(t;u)$. При этом, согласно определению элемента x, имеем

$$y_1=S(T)y_0+\int\limits_0^T S(T,s)f(s,y(s))\,ds+F_T[x]=$$

$$=S(T)y_0+\int\limits_0^T S(T,s)f(s,y(s))\,ds+\int\limits_0^T S(T,s)B(s)u(s)\,ds=y(T;u).$$

Таким образом, u является решением исследуемой задачи управления.

Из приведённых рассуждений и теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения* G$_1$), F$_1$)–F$_4$), B$'_1$), B$_2$). *Тогда для любых* $y_0,y_1\in X$ *существует* $\delta=\delta(y_0,y_1)>0$ *такое, что для произвольно фиксированного* $T\in(0,\delta)$ *задача управления имеет решение вида* (9) *при некотором* $x\in X$ *вида* (12), $y=y(t;u)\in\Omega(T)$.

Замечание 7. Теорема 3, таким образом, позволяет получить оценку нормы u и $y(t;u)$ в зависимости от y_0, y_1. Для практических приложений это имеет важное значение.

4. ТОЧНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ В НЕЛИНЕЙНОМ СЛУЧАЕ НА ПРОИЗВОЛЬНО ЗАДАННОМ ПРОМЕЖУТКЕ

Получим теперь достаточные условия глобальной по времени управляемости, т.е. на $[0,T]$ при произвольно фиксированном $T>0$. Будем предполагать выполненными условия G_1), F_1)–F_4), а также B_1'), B_2) при $T_0=T$.

Непосредственно из леммы 7 вытекает

Лемма 14. *Пусть выполнены условия* G_1), B_1') (*при* $T_0=T$), *а число* $\gamma>0$ *таково, что* $\exp\{\gamma\}-1\leqslant 1/2$. *Тогда для любого конечного разбиения* $0=t_0<t_1<\ldots<t_k=T$ *имеем*

$$\|B^*(t)S^*(t_i,t)x\|_U\geqslant a(t)\|x\|_X \quad \text{для п.в. } t\in(t_i^*,t_i] \text{ и для любых } x\in X,$$

где $a(t)\equiv\beta_0/2$, $t_i^*=t_{i-1}+\kappa_0(t_i-t_{i-1})$, $i=\overline{1,k}$, *при любом выборе* $\kappa_0\in(1-\kappa_1,1)$, $\kappa_1=\min\{1,\gamma/M_0\}$. *И соответственно,*

$$\alpha_i=\int\limits_{t_i^*}^{t_i}a^2(t)\,dt\geqslant\kappa(t_i-t_{i-1}),\quad i=\overline{1,k},\ \kappa\in(0,\kappa_2),\ \kappa_2=\min\biggl\{1,\frac{\beta_0^2}{4}(1-\kappa_0)\biggr\}.$$

При заданных $y_0,y_1\in X$ и $\lambda\in[0,1]$ определим элементы

$$y_\lambda=y_0+\lambda(y_1-y_0)=\lambda y_1+(1-\lambda)y_0.$$

Заметим, что

$$\|y_\lambda\|_X\leqslant\lambda\|y_1\|_X+(1-\lambda)\|y_0\|_X\leqslant\gamma(y_0,y_1)=\max\{\|y_0\|_X,\|y_1\|_X\},$$
$$\|y_\lambda-y_\mu\|_X=|\lambda-\mu|\|y_1-y_0\|_X\leqslant\|y_1-y_0\|_X.$$

Константу $\sigma(y_0,y_1)$, в отличие от п. 3, найдём как

$$\sigma(y_0,y_1)=M\gamma(y_0,y_1)+\kappa^{-1}M^2\beta^2\|y_1-y_0\|_X+1.$$

Рассмотрим

$$\frac{S(t+t_i,t_i)y_\lambda-y_\lambda}{t}=\lambda\frac{S(t+t_i,t_i)y_1-y_1}{t}+(1-\lambda)\frac{S(t+t_i,t_i)y_0-y_0}{t}. \tag{13}$$

Получим, что аналог утверждения леммы 12 выполнен и для y_λ при $t_0=t_i$, $K(y_\lambda)=K(y_0,y_1)=\max\{K(y_0),K(y_1)\}$.

С учётом представления (13) совершенно аналогично доказательству леммы 13 устанавливается существование числа $\delta_1(y_0,y_1)>0$ такого, что

$$\biggl\|\frac{S(t+t_i,t_i)y_\lambda-y_\lambda}{t}\biggr\|_X\leqslant K(y_0,y_1)+1\quad\text{для любого } t\in(0,\delta_1),\ \lambda\in[0,1].$$

Аналогично тому как это было сделано при доказательстве теоремы 2, определим число $\delta=\delta(y_0,y_1)>0$ из условий

$$\gamma_1(y_0,y_1)\delta<1,\quad \gamma_1(y_0,y_1)\equiv\{MK_2(\sigma)+M^2\beta^2\kappa^{-1}(K(y_0,y_1)+1+MK_2(\sigma))\},$$
$$\gamma_2(y_0,y_1)\delta<\frac{1}{2},\quad \gamma_2(y_0,y_1)\equiv MK_1(\sigma)(1+M^2\beta^2\kappa^{-1}),\quad \delta\leqslant\delta_1(y_0,y_1),$$

где $\sigma=\sigma(y_0,y_1)$. Теперь зафиксируем произвольное разбиение $0=t_0<t_1<\ldots<t_k=T$ мелкости $\max_{i=\overline{1,k}}(t_i-t_{i-1})<\delta$. Будем рассматривать локальные аналоги уравнения (10):

$$y(t)=S(t,0)y_0+\int\limits_0^t S(t,s)f(s,y(s))\,ds+\int\limits_0^t S(t,s)B(s)u(s)\,ds,\quad t\in[0,t_i],\ y\in\mathbf{C}(0,t_i;X),\ i=\overline{1,k}. \tag{14}$$

Выберем числа $\lambda_i\in[0,1]$, $i=\overline{1,k-1}$, $\lambda_k=1$.

Рассмотрим локальную по времени задачу управления при $i=1$: найти управление $u_1\in\mathbf{C}(0,t_1;U)$ такое, что существует соответствующее решение уравнения (14) при $i=1$, удовлетворяющее условию $y(t_1;u_1)=y_{\lambda_1}$. Согласно теореме 3 эта задача управления имеет решение вида

$$u_1(t)=B^*(t)S(t_1,t)^*x_1,\quad x_1\in X.$$

Считая, что управление $u(t)$ на $[0,t_1]$ уже определено как $u_1(t)$, уравнение (14) при $i=2$ достаточно рассмотреть лишь на отрезке $[t_1,t_2]$, на котором оно может быть записано в виде

$$y(t)=S(t,t_1)y_{\lambda_1}+\int\limits_{t_1}^t S(t,s)[f(s,y(s))+B(s)u(s)]\,ds,\quad t\in[t_1,t_2],\ y\in\mathbf{C}(t_1,t_2;X). \tag{15}$$

Действительно, это следует из соотношений

$$S(t,t_1)S(t_1,0)=S(t,0),\quad S(t,t_1)S(t_1,s)=S(t,s),$$

вытекающих непосредственно из свойства (ii).

Преобразуем уравнение (15) заменой $\tau=t-t_1\in[0,t_2-t_1]$:

$$y(t_1+\tau)=S(\tau+t_1,t_1)y_{\lambda_1}+\int\limits_{t_1}^{\tau+t_1} S(\tau+t_1,s)[f(s,y(s))+B(s)u(s)]\,ds,$$

а замена $s-t_1=\xi$ даёт

$$y(t_1+\tau)=\widetilde{S}(\tau,0)y_{\lambda_1}+\int\limits_0^\tau \widetilde{S}(\tau,\xi)[f(\,.\,,y(\,.\,))+B(\,.\,)u(\,.\,)](\xi+t_1)\,d\xi,\quad \tau\in[0,t_2-t_1], \tag{16}$$

где $\widetilde{S}(\tau,\xi)=S(\tau+t_1,\xi+t_1)$ и можно переобозначить $\overline{y}(\tau)=y(t_1+\tau)$, $\overline{y}\in\mathbf{C}(0,t_2-t_1;X)$. Уравнение (16) совпадает с уравнением (10) при $T=t_2-t_1$ (или уравнением (14) для $i=1$ при замене t_1 на (t_2-t_1)). Очевидно, что оператор $\widetilde{S}(\tau,\xi)$ сохраняет свойства оператора $S(t,s)$. Поэтому к уравнению (16) снова применимо утверждение теоремы 3. При этом

$$\widetilde{u}(\tau)=B^*(\tau+t_1)\widetilde{S}^*(t_2-t_1,\tau)x=B^*(t)S^*(t_2,\tau+t_1)x=B^*(t)S^*(t_2,t)x,\quad \tau\in[0,t_2-t_1],\ x\in X.$$

Таким образом, на $[t_1,t_2]$ существует управление вида $u_2(t)=B^*(t)S^*(t_2,t)x_2$, $x_2\in X$, для которого уравнение (15) имеет решение $y(t;u_2)$, удовлетворяющее условиям $y(t_1;u_2)=y_{\lambda_1}$, $y(t_2;u_2)=y_{\lambda_2}$, $\|y(t;u_2)\|_X\leqslant\sigma(y_0,y_1)$. Тогда на отрезке $[0,t_2]$ существует управление

$$u(t)=\begin{cases}B^*(t)S^*(t_1,t)x_1, & t\in[0,t_1],\ x_1\in X,\\ B^*(t)S^*(t_2,t)x_2, & t\in[t_1,t_2],\ x_2\in X,\end{cases}$$

для которого уравнение (14) при $i=2$ имеет решение $y(t;u)$, удовлетворяющее условиям

$$y(t_1;u)=y_{\lambda_1},\quad y(t_2;u)=y_{\lambda_2},\quad \|y(t;u)\|_X\leqslant\sigma(y_0,y_1),\quad t\in[0,t_2].$$

Однако это решение кусочно-гладкое, т.е. из класса $K\mathbf{C}^1(0,T;X)$.

Продолжая эти рассуждения по индукции, получаем, что справедлива

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения* G_1), F_1)–F_4), B_1'), B_2) (*при* $T_0=T$). *Тогда для любых* $y_0,y_1\in X$ *существует* $\delta=\delta(y_0,y_1)>0$ *такое, что для всякого разбиения* $0=t_0<t_1<\ldots<t_k=T$ *мелкости, меньшей* δ, *и любого набора чисел* $\lambda_i\in[0,1]$, $i=\overline{1,k-1}$, *существует управление* $u\in K\mathbf{C}(0,T;U)$ *вида*

$$u(t)=B^*(t)S(t_i,t)^*x_i,\quad t\in(t_{i-1},t_i],\ x_i\in X,\ i=\overline{1,k},$$

для которого уравнение (10), *или, что равносильно, задача* (1), *имеет решение* $y(\,.\,;u)\in\in K\mathbf{C}^1(0,T;X)$, *удовлетворяющее условиям*

$$y(t_i;u)=y_{\lambda_i},\quad i=\overline{1,k-1},\quad y(T;u)=y_1,\quad \|y(t;u)\|_X\leqslant\sigma(y_0,y_1),\quad t\in[0,T].$$

Замечание 8. Из анализа проведённых рассуждений понятно, что условие B_1') в контексте утверждения теоремы 4 можно ослабить. Достаточно потребовать, чтобы для любого $\delta>0$ существовало разбиение $0=t_0<t_1<\ldots<t_k=T$ мелкости δ такое, что неравенство из условия B_1') выполняется лишь в некоторой левой окрестности (размера фиксированной доли δ) каждой из точек t_i, $i=\overline{1,k}$. Но тогда для формулировки теоремы 4 потребуется не любое разбиение достаточно малой мелкости, а лишь разбиение из указанного класса.

5. УРАВНЕНИЕ ГЛОБАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Линейное уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi(t,x)+4\pi\,\mathrm{div}(\sigma(t,x)\nabla\varphi(t,x))=4\pi\,\mathrm{div}\,\vec{J}^{\text{ст}}(t,x),\tag{17}$$

где $t\in[0,T]$ — время, $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^3$ — пространственная переменная, в физической (и математической) литературе называют *уравнением глобальной электрической цепи* в терминах потенциалов в квазистационарном приближении. При этом неизвестная функция $\varphi(t,x)$ трактуется как скалярный электрический потенциал, а $\vec{J}^{\text{ст}}$ — как объёмная плотность сторонних (квазистационарных) токов. Подробную библиографию по этому вопросу, а также всё, что касается физического смысла уравнения (17) и корректной постановки начально-краевых условий для него, см. в [18, 19]. По поводу термина *глобальная электрическая цепь* приведём (в собственном переводе) цитату из [19]: “Термин *глобальная электрическая цепь* относится к распределению электрических токов в атмосфере Земли; это $<\ldots>$, в частности, молниевые токи, токи, связанные с выпадением осадков, и токи корональных выбросов, но его наиболее важной составляющей являются $<\ldots>$ квазистационарные токи, которые текут непрерывно и $<\ldots>$ поддерживаются постоянной разностью зарядов в $<\ldots>$ электрически заряженных облаках”.

Насколько известно автору, существует мнение, что объёмная плотность сторонних токов на самом деле зависит от градиента (по совокупности пространственных переменных) потенциала (хотя характер этой зависимости на данный момент неизвестен). Но в таком случае возникает необходимость изучения полулинейного управляемого аналога уравнения (17) (в частности, при тех же начально-краевых условиях), который отличается тем, что в правую часть входит также градиент функции φ:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi(t,x)+4\pi\,\mathrm{div}(\sigma(t,x)\nabla\varphi(t,x))=4\pi\,\mathrm{div}\,\vec{J}^{\text{ст}}(t,x;\nabla\varphi;u),\tag{18}$$

где $t\in[0,T]$ — время, $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^3$ — пространственная переменная.

Перейдём к строгой математической постановке. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область, диффеоморфная шаровому слою, причём существует точка в пространстве[†] такая, что луч, выходящий из неё в произвольном направлении, пересекает границу области $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ровно в двух точках — по одной на каждую компоненту связности Γ_1, Γ_2, причём обе эти компоненты связности диффеоморфны сфере в $\mathbb{R}^3$. С физической точки зрения Ω соотносится с атмосферой Земли. Пусть, кроме того, σ_*, $\sigma^* > 0$ — заданные числа. Определим класс $\Sigma(\sigma_*, \sigma^*)$ всех функций $\sigma(t,x)\colon [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$, непрерывных по $t \in [0,T]$, измеримых по $x \in \Omega$, ограниченных на ограниченных множествах и таких, что $\sigma_* \leqslant \sigma(t,x) \leqslant \sigma^*$ для всех $t \in [0,T]$, п.в. $x \in \Omega$.

Пусть $V(\Omega)$ — множество всех функций $\psi \in H^1(\Omega)$, для каждой из которых след $\psi|_{\Gamma_1}$ нулевой, а след $\psi|_{\Gamma_2}$ постоянный (т.е. существует константа $c \in \mathbb{R}$, своя для каждой функции ψ, такая, что $\psi|_{\Gamma_2} = c$). В [18] уже было показано, что множество $V(\Omega)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением вида $(\varphi,\psi)_{V(\Omega)} = \int_\Omega (\nabla\varphi(x) \cdot \nabla\psi(x))\,dx$, где символ “ $\cdot$ ” означает скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$. Определим также класс $\mathbb{F}$ всех вектор-функций $\vec{f}(t,x;\eta)\colon [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, измеримых по $(t,x) \in [0,T] \times \Omega$, непрерывных по $\eta \in \mathbb{R}^3$ и удовлетворяющих условию $\vec{f}(\,.\,,.\,;\nabla\varphi) \in \mathbf{C}(0,T;U)$, $U = L_2^3(\Omega)$, для всех $\varphi \in \mathbf{C}(0,T,X)$, $X = V(\Omega)$. Кроме того, будем считать, что задана функция $\varphi_0 \in X$.

Для управления $u \in \mathbf{C}(0,T;U)$, а также для $\sigma \in \Sigma(\sigma_*, \sigma^*)$, $\vec{f} \in \mathbb{F}$ будем рассматривать полулинейное дифференциальное уравнение вида (18):

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi(t,x) + \operatorname{div}(\sigma(t,x)\nabla\varphi(t,x)) = \operatorname{div}[\vec{f}(t,x;\nabla\varphi) + u(t,x)]. \tag{19}$$

Для вектор-функции $\vec{g}(t,x)$, удовлетворяющей аналогичным условиям (с очевидной поправкой на случай отсутствия зависимости от $\nabla\varphi$), рассмотрим линейный аналог

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi(t,x) + \operatorname{div}(\sigma(t,x)\nabla\varphi(t,x)) = \operatorname{div}\vec{g}(t,x). \tag{20}$$

Как показано в [18], для уравнения (20) корректной является следующая постановка начально-краевых условий:

$$\int\limits_{\Gamma_2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial\vec{n}} + \sigma(t,x)\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial\vec{n}} - \vec{g}_{\vec{n}}(t,x)\right]d\ell = 0, \quad t \in (0,T], \tag{21}$$

где $\vec{g}_{\vec{n}}$ — нормальная составляющая вектора $\vec{g}$, $\vec{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности Γ_2,

$$\varphi(t,x)|_{x\in\Gamma_1} = 0, \quad \varphi(t,x)|_{x\in\Gamma_2} = C(t), \quad t \in (0,T], \tag{22}$$

$$\varphi(t,x)|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{23}$$

Следующее определение [18] решения задачи (20)–(23) является корректным. Её решение будем понимать как функцию $\varphi \in \mathbf{C}^1(0,T;X)$, удовлетворяющую для $t \in (0,T]$ и любой $\psi \in V(\Omega)$ интегральному тождеству

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega (\nabla\varphi(t,x) \cdot \nabla\psi(x))\,dx + \int\limits_\Omega \sigma(t,x)(\nabla\varphi(t,x) \cdot \nabla\psi(x))\,dx = \int\limits_\Omega (\vec{g}(t,x) \cdot \nabla\psi(x))\,dx \tag{24}$$

[†] Для шарового слоя это будет, например, центр шара.

и начальному условию (23). В [18] доказана теорема о существовании и единственности решения в указанном смысле. Аналогичным образом для уравнения (19) будем ставить начально-краевые условия (22), (23), а также условия

$$\int\limits_{\Gamma_2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial\vec{n}}+\sigma(t,x)\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial\vec{n}}-\vec{f}_{\vec{n}}(t,x;\nabla\varphi)-u_{\vec{n}}(t,x)\right]d\ell=0,\quad t\in(0,T]. \tag{25}$$

Решение задачи (19), (22), (23), (25) будем понимать как функцию φ из класса $\mathbf{C}^1(0,T;X)$, удовлетворяющую для $t\in(0,T]$ и любой функции $\psi\in X=V(\Omega)$ тождеству

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}(\nabla\varphi(t,x)\cdot\nabla\psi(x))\,dx+\int\limits_{\Omega}\sigma(t,x)(\nabla\varphi(t,x)\cdot\nabla\psi(x))\,dx=$$

$$=\int\limits_{\Omega}(\vec{f}(t,x;\nabla\varphi)+u(t,x))\cdot\nabla\psi(x)\,dx \tag{26}$$

и начальному условию (23).

Замечание 9. Таким образом, решение φ ищем в пространстве $\mathbf{C}^1(0,T;X)$. Согласно определению этого пространства при заданном $t\in[0,T]$ соответствующая функция $\varphi(t,.)$ принадлежит пространству $X=V(\Omega)$. Иными словами, $\varphi(t,.)\in H^1(\Omega)$, причём её след вдоль поверхности Γ_1 равен нулю, а вдоль поверхности Γ_2 не зависит от $x\in\Omega$ (но, вообще говоря, может зависеть от t, с учётом, что момент времени t фиксирован, а константа c в определении $V(\Omega)$ своя для каждой функции из $V(\Omega)$). Поэтому задание граничных условий в определении пространства $V(\Omega)$ диктуется граничными условиями (22). Физический смысл этих условий пояснён в работах [18, 19].

Для $\varphi,\psi\in X=V(\Omega)$, $\vec{z}\in U=L_2^3(\Omega)$ положим

$$a_t(\varphi,\psi)=\int\limits_{\Omega}\sigma(t,x)\big(\nabla\varphi(x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx,\quad \ell[\vec{z}](\psi)=\int\limits_{\Omega}\vec{z}(x)\cdot\nabla\psi(x)\,dx.$$

С учётом неравенства Гёльдера для любого фиксированного $\vec{z}\in U$ $\ell[\vec{z}](\psi)$ есть линейный непрерывный функционал на X. Поэтому, согласно теореме Рисса о представлении линейного непрерывного функционала на гильбертовом пространстве [8, гл. 1, теорема 6.1], существует единственный элемент $Z\in X$, отвечающий функционалу $\ell[\vec{z}]$, а значит, и элементу $\vec{z}\in U$, такой, что $\ell[\vec{z}](\psi)=(Z,\psi)_X$, $\|Z\|_X=\|\ell[\vec{z}]\|$. Указанное соответствие $U\ni\vec{z}\to Z\in X$ будем понимать как оператор $B\colon U\to X$. Таким образом, $\ell[\vec{z}](\psi)=(B\vec{z},\psi)$, $\vec{z}\in U$, $\psi\in X$. Отсюда и из определения функционала $\ell[\vec{z}](\psi)$ следует, что B — линейный оператор. По неравенству Гёльдера $|\ell[\vec{z}](\psi)|\leqslant\|\vec{z}\|_U\,\|\psi\|_X$. Стало быть, $\|B\vec{z}\|=\|\ell[\vec{z}]\|\leqslant\|\vec{z}\|_U$, т.е. B — ЛОО, причём $\|B\|\leqslant 1$. Сопряжённый оператор $B^*\colon X^*\to U^*$, с учётом отождествления $X^*=X$, $U^*=U$, определяется из условия

$$(B^*\psi,\vec{z})_U=(\psi,B\vec{z})_X=\ell[\vec{z}](\psi)=\int\limits_{\Omega}\vec{z}(x)\cdot\nabla\psi(x)\,dx=(\vec{z},\nabla\psi)_U.$$

Тогда $B^*\psi=\nabla\psi$, и соответственно,

$$\|B^*\psi\|_U^2=\|\nabla\psi\|_U^2=\|\psi\|_X^2\quad\Rightarrow\quad\|B^*\psi\|_U=\|\psi\|_X\quad\Rightarrow\quad\|B\|=\|B^*\|=1.$$

Это означает, что ЛОО B удовлетворяет условиям B_1), B_1'), B_2). При этом

$$B\vec{z}(.)\in\mathbf{C}(0,T;X),\quad B^*\varphi(.)\in\mathbf{C}(0,T;U)\quad\text{для любых }\varphi\in\mathbf{C}(0,T;X),\ \vec{z}\in\mathbf{C}(0,T;U).$$

Ввиду принадлежности $\sigma\in\Sigma(\sigma_*,\sigma^*)$ очевидно, что билинейная форма $a_t(\varphi,\psi)$ является ограниченной и коэрцитивной в X. Поэтому согласно теореме Лакса–Мильграма [14, гл. 3, п. 7] существует ЛОО $G(t)$, обратимый на всем пространстве X, такой, что

$$a_t(\varphi,\psi)=(G(t)\varphi,\psi),\quad \|G(t)\|\leqslant\sigma^*,\quad \|G(t)^{-1}\|\leqslant\sigma_*^{-1}.$$

Докажем, что ЛОО $G(t)$ сильно непрерывен на отрезке $[0,T]$. Поскольку билинейная форма $a_t(\varphi,\psi)$ симметрична, то ясно, что $G^*(t)=G(t)$; поэтому и $G^*(t)$ тоже оказывается сильно непрерывным. Итак, для произвольных $t,t_0\in[0,T]$, $\varphi\in X$ положим $G(t;t_0)=G(t)-G(t_0)$, $\sigma(t;t_0;x)=\sigma(t,x)-\sigma(t_0,x)$ и рассмотрим

$$\|G(t;t_0)\varphi\|_X^2=(G(t)\varphi,G(t;t_0)\varphi)-(G(t_0)\varphi,G(t;t_0)\varphi)=a_t(\varphi,G(t;t_0)\varphi)-a_{t_0}(\varphi,G(t;t_0)\varphi)=$$
$$=\int\limits_\Omega\sigma(t;t_0;x)[\nabla\varphi(x)\cdot\nabla G(t;t_0)\varphi(x)]\,dx.$$

Пользуясь неравенством Гёльдера, получаем

$$\|G(t;t_0)\varphi\|_X^2\leqslant\|\sigma(t;t_0;.)\nabla\varphi\|_U\|G(t;t_0)\varphi\|_X\quad\Rightarrow\quad\|G(t;t_0)\varphi\|_X\leqslant\|\sigma(t;t_0;.)\nabla\varphi\|_U.$$

Поскольку $|\sigma(t;t_0;.)\nabla\varphi|^2\leqslant4(\sigma^*)^2|\nabla\varphi|^2\in L_1^+(\Omega)$, остаётся заметить, что, согласно теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [20, теорема 8.4.1],

$$\|\sigma(t;t_0;.)\nabla\varphi\|_U\to0\quad\text{при}\quad t\to t_0.$$

С помощью определённых выше конструкций интегральное тождество (24) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t),\psi)_X+(G(t)\varphi(t),\psi)_X=(B\vec g(t,.\,),\psi)_X,\quad \psi\in X.$$

Интегральное тождество (26) в совокупности с условием (23) записывается в виде задачи Коши для операторного дифференциального уравнения:

$$\frac{d\varphi}{dt}=-G(t)\varphi(t)+B\vec f(t,.\,,\nabla\varphi)+Bu(t),\quad t\in(0,T];\quad \varphi(0)=\varphi_0\in X. \tag{27}$$

Задача (27) имеет вид (1) с нестационарным оператором $-G(t)$. Как уже было отмечено, $\|G(t)\|\leqslant\sigma^*$, т.е. условие G_1) выполняется при $M_0=\sigma^*$. Для того чтобы воспользоваться полученными в статье абстрактными результатами, остаётся лишь указать, во что трансформируются условия F_1)–F_4) в применении к функции $\Phi(t,\eta)=B\vec f(t,.\,,\nabla\eta)$, $t\in[0,T]$, $\eta\in X$. Сформулируем эти условия:

Φ_1) для всех $\varphi\in E=\mathbf{C}(0,T;X)$ отображение $[0,T]\ni t\to\vec f(t,.\,,\nabla\varphi(t))$ принадлежит классу $\mathbf{C}(0,T;U)$, тем самым отображение $[0,T]\ni t\to B\vec f(t,.\,,\nabla\varphi(t))$ принадлежит классу $\mathbf{C}(0,T;X)$;

Φ_2) существует функция $\widetilde{\mathcal N}=\widetilde{\mathcal N}(t,M)\colon[0,T]\times\mathbb R_+\to\mathbb R_+$, суммируемая по $t\in[0,T]$ и неубывающая по $M\in\mathbb R_+$, такая, что для всех $\varphi,\psi\in X$, $\|\varphi\|_X$, $\|\psi\|_X\leqslant M$, п.в. $t\in[0,T]$ имеем $\|\vec f(t,.\,,\nabla\varphi)-\vec f(t,.\,,\nabla\psi)\|_U\leqslant\widetilde{\mathcal N}(t,M)\|\varphi-\psi\|_X$;

Φ_3) существует функция $\widetilde{\mathcal N}_1(t,r)\colon[0,T]\times\mathbb R_+\to\mathbb R_+$, неубывающая по r и суммируемая по Лебегу по t, такая, что $\|\vec f(t,.\,,\nabla\xi)\|_U\leqslant\widetilde{\mathcal N}_1(t,M)$ для всех $M>0$, $\xi\in X$, $\|\xi\|_X\leqslant M$, п.в. $t\in[0,T]$;

Φ_4) существуют неубывающие функции $K_i\colon\mathbb R_+\to\mathbb R_+$, $i=1,2$, такие, что для любого $\sigma>0$ справедливы оценки

$$\|B\|\int\limits_h\widetilde{\mathcal N}(s,\sigma)\,ds\leqslant K_1(\sigma)\,\mathrm{mes}\,h,\quad \|B\|\int\limits_h\widetilde{\mathcal N}_1(s,\sigma)\,ds\leqslant K_2(\sigma)\,\mathrm{mes}\,h.$$

После этого к задаче (27) применимы теоремы 1–4.

Автор признателен А.В. Калинину, обратившему его внимание на проблему глобальной электрической цепи и на связанные с ней математические задачи.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Balachandran, K. Controllability of nonlinear systems in Banach spaces: a survey / K. Balachandran, J.P. Dauer // J. Optim. Theory Appl. — 2002. — № 1. — P. 7–28.
2. Control Theory of Partial Differential Equations / O. Imanuvilov, G. Leugering, R. Triggiani, Bing-Yu Zhang. — Boca Raton ; London ; New York ; Singapore : Chapman & Hall/CRC, 2005. — 416 p.
3. Zhang, X. Exact controllability of semilinear evolution systems and its application / X. Zhang // J. Optim. Theory Appl. — 2000. — V. 107, № 2. — P. 415–432.
4. Liu, W. Exact internal controllability for the semilinear heat equation / W. Liu, G.H. Williams // J. Math. Anal. Appl. — 1997. — V. 211. — P. 258–272.
5. Balachandran, K. Controllability of nonlinear integrodifferential systems in Banach space / K. Balachandran, J.P. Dauer, P. Balasubramaniam // J. Optim. Theory Appl. — 1995. — V. 84. — P. 83–91.
6. Mahmudov, N.I. Exact null controllability of semilinear evolution systems / N.I. Mahmudov // J. Glob. Optim. — 2013. — V. 56, № 2. — P. 317–326.
7. Чернов, А.В. О точной глобальной управляемости полулинейного эволюционного уравнения / А.В. Чернов // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 3. — С. 399–417.
8. Гаевский, Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас ; пер. с нем. В.Г. Задорожного, А.И. Перова ; под ред. В.И. Соболева. — М. : Мир, 1978. — 336 с.
9. Pazy, A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations / A. Pazy. — New York : Springer-Verlag, 1983. — 279 p.
10. Крейн, С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.
11. Dautray, R. Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol. 2. Functional and Variational Methods / R. Dautray, J.-L. Lions. — Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer-Verlag, 1988. — 576 p.
12. Пугачев, В.С. Лекции по функциональному анализу / В.С. Пугачев. — М. : Изд-во МАИ, 1996. — 744 с.
13. Чернов, А.В. О разрешимости игры преследования с нелинейной динамикой в гильбертовом пространстве / А.В. Чернов // Мат. теория игр и ее прил. — 2024. — Т. 16, № 1. — С. 92–125.
14. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М. : Изд-во ЛКИ, 2007. — 624 с.
15. Балакришнан, А.В. Прикладной функциональный анализ / А.В. Балакришнан ; пер. с англ. В.И. Благодатских. — М. : Наука, 1980. — 383 с.
16. Чернов, А.В. О дифференцировании функционала в задаче параметрической оптимизации коэффициента уравнения глобальной электрической цепи / А.В. Чернов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2016. — Т. 56, № 9. — С. 1586–1601.
17. Качуровский, Р.И. Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах / Р.И. Качуровский // Успехи мат. наук. — 1968. — Т. 23, № 2 (140). — С. 121–168.
18. Жидков, А.А. Некоторые вопросы математического и численного моделирования глобальной электрической цепи в атмосфере / А.А. Жидков, А.В. Калинин // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. — 2009. — № 6 (1). — С. 150–158.
19. Kalinin, A.V. Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit / A.V. Kalinin, N.N. Slyunyaev // J. Math. Anal. Appl. — 2017. — V. 450. — P. 112–136.
20. Вулих, Б.З. Краткий курс теории функций вещественной переменной / Б.З. Вулих. — М. : Наука, 1973. — 352 с.

ON EXACT GLOBAL CONTROLLABILITY OF A SEMILINEAR EVOLUTIONARY EQUATION WITH NONSTATIONARY OPERATOR

A. V. Chernov

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia
e-mail: chavnn@mail.ru

For a Cauchy problem associated with a controlled semilinear evolutionary equation with bounded nonstationary (id est depending on time) operator in a Hilbert space we obtain sufficient conditions for exact controllability to a given final state (and also to given intermediate states at intermediate time moments) on an arbitrarily fixed (without additional conditions) time interval. In fact, it is generalized an analogous result having been obtained by the author formerly for the case of a stationary operator. Like formerly, here we use the Minty–Browder's theorem and also a chain technology of successive continuation of the solution to a controlled system to intermediate states. As example (of a specific interest) we consider a semilinear equation of the global electric circuit in the Earth atmosphere.

Keywords: semilinear evolutionary equation, Hilbert space, nonstationary bounded operator, exact global controllability, equation of the global electric circuit

REFERENCES

1. Balachandran, K. and Dauer, J.P., Controllability of nonlinear systems in Banach spaces: a survey, *J. Optim. Theory Appl.*, 2002, no. 1, pp. 7–28.
2. Imanuvilov, O., Leugering, G., Triggiani, R., and Zhang, Bing-Yu, *Control Theory of Partial Differential Equations*, Boca Raton; London; New York; Singapore: Chapman & Hall/CRC, 2005.
3. Zhang, X., Exact controllability of semilinear evolution systems and its application, *J. Optim. Theory Appl.*, 2000, vol. 107, no. 2, pp. 415–432.
4. Liu, W. and Williams, G.H., Exact internal controllability for the semilinear heat equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 1997, vol. 211, pp. 258–272.
5. Balachandran, K., Dauer, J.P., and Balasubramaniam, P., Controllability of nonlinear integrodifferential systems in Banach space, *J. Optim. Theory Appl.*, 1995, vol. 84, pp. 83–91.
6. Mahmudov, N.I., Exact null controllability of semilinear evolution systems, *J. Glob. Optim.*, 2013, vol. 56, no. 2, pp. 317–326.
7. Chernov, A.V. On the exact global controllability of a semilinear evolution equation, *Differ. Equat.*, 2024, vol. 60, no. 3, pp. 374–392.
8. Gajewski, H., Gröger, K., und Zacharias, K. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Berlin: Akademie-Verlag, 1974.
9. Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, New York: Springer-Verlag, 1983.
10. Kreyn, S.G., *Lineynyye differentsial'nyye uravneniya v banakhovom prostranstve* (Linear Differential Equations in a Banach Space), Moscow: Nauka, 1967.
11. Dautray, R. and Lions, J.-L., *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol. 2. Functional and Variational Methods*, Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1988.
12. Pugachev, V.S., *Lektsii po funktsional'nomu analizu* (Lectures on Functional Analysis), Moscow: Moscow Aviation Institute, 1996.
13. Chernov, A.V., On solvability of a pursuit game with nonlinear dynamics in the Hilbert space, *Matem. teoriya igr i ee prilozheniya*, 2024, vol. 16, no. 1, pp. 92–125.
14. Yosida, K., *Functional Analysis*, Berlin; Heidelberg: Springer, 1995.
15. Balakrishnan, A.V., *Applied Functional Analysis*, New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1976.
16. Chernov, A.V., Differentiation of a functional in the problem of parametric coefficient optimization in the global electric circuit equation, *Comp. Math. Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 9, pp. 1565–1579.
17. Kachurovskii, R.I., Non-linear monotone operators in Banach spaces, *Russ. Math. Surv.*, 1968, vol. 23, no. 2, pp. 117–165.
18. Zhidkov, A.A. and Kalinin, A.V., Some problems of mathematical and numerical modeling of the global electric circuit in the atmosphere, *Vestn. Nizhegorod. Univ. im. N.I. Lobachevskogo*, 2009, no. 6 (1), pp. 150–158.
19. Kalinin, A.V. and Slyunyaev, N.N., Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit, *J. Math. Anal. Appl.*, 2017, vol. 450, pp. 112–136.
20. Vulikh, B.Z., *Kratkiy kurs teorii funktsiy veshchestvennoy peremennoy* (Short Course in the Theory of Functions of a Real Variable), Moscow: Nauka, 1973.