ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 3, с. 394–409

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

ФИНИТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕ ПОЛНОСТЬЮ УПРАВЛЯЕМЫХ ГИБРИДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

В. Е. Хартовский

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Республика Беларусь

e-mail: hartows@mail.ru

Поступила в редакцию 18.01.2025 г., после доработки 18.01.2025 г.; принята к публикации 27.02.2025 г.

Для гибридных линейных автономных непрерывно-дискретных систем, не имеющих свойства полной управляемости, предложен подход к проектированию двух видов регуляторов, обеспечивающих “неполную финитную стабилизацию”. Реализация одного из них — регулятора слабой финитной стабилизации по состоянию, основана на знании значений решения системы управления в дискретные моменты времени, кратные шагу квантования, а регулятор слабой финитной стабилизации по выходу в качестве обратной связи использует наблюдаемый выходной сигнал. Построенные регуляторы содержат вспомогательные переменные, описываемые дополнительными уравнениями с дискретным временем, а неполная финитная стабилизация подразумевает, что у замкнутой системы финитными функциями необходимо будут только те компоненты вектора решения, которые являются компонентами вектора-решения исходной (разомкнутой) системы. Получены критерии существования указанных регуляторов и метод их проектирования.

Ключевые слова: линейная гибридная непрерывно-дискретная система, наблюдаемый выходной сигнал, регулятор, финитная стабилизация

DOI: 10.31857/S0374064125030084, EDN: HMDZUU

ВВЕДЕНИЕ

В гибридных непрерывно-дискретных системах элементы с непрерывными сигналами отражают законы функционирования объектов управления, а дискретные составляющие моделируют работу цифровых управляющих устройств. Такие системы встречаются в прикладных задачах управления механическими и электроэнергетическими системами, в управлении летательными аппаратами, технологическими процессами, трафиком в компьютерных сетях и т.д. (см. [1–5]). Поэтому в настоящее время в связи с развитием и широким использованием микропроцессорной техники исследованию гибридных объектов придаётся всё большее значение [1–15].

Настоящая статья является продолжением исследований проблемы финитной стабилизации гибридных линейных непрерывно-дискретных систем с импульсным управляющим воздействием, начатых автором в работе [15]. Системы такого типа можно интерпретировать как непрерывные системы при воздействии регуляторов дискретного действия [13, 14]. В статье [15] построены регуляторы финитной стабилизации двух видов: по состоянию, когда в качестве обратной связи используются значения решения замкнутой системы в дискретные моменты времени, повторяющиеся с шагом квантования; по наблюдаемому выходу — в качестве обратной связи используются значения наблюдаемого выходного сигнала в такие же моменты времени. Для них размерность замкнутой системы получается больше размерности исходной системы, т.е. регуляторы содержат вспомогательные переменные, динамика которых описывается дополнительными уравнениями. Указанные регуляторы финитной стабилизации обеспечивают существование момента времени, начиная с которого решение замкнутой системы равно нулю. В [15] показано, что регулятор финитной стабилизации по состоянию существует тогда и только тогда, когда исходная система является полностью управляемой, а регулятор финитной стабилизации по выходу — когда полностью управляемой и слабо финально наблюдаемой (здесь используется терминология статей [13, 14]). В настоящей работе исследуется возможность финитной стабилизации в случае, когда нарушается условие полной управляемости; строятся регуляторы слабой финитной стабилизации по состоянию и по выходу, обеспечивающие финитность только той части компонент вектора-решения замкнутой системы, которая содержит все компоненты исходной (разомкнутой) системы. Существование таких регуляторов в случае обратной связи по состоянию было установлено для дифференциально-разностных систем запаздывающего типа [16], а затем перенесено на объекты нейтрального типа [17] и дифференциально-алгебраические системы с запаздыванием [18]. Принципиальное отличие настоящей работы от [16–18] заключается не только в ином объекте исследования, но и в использовании в качестве обратной связи сигналов наблюдаемого выхода.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть объект управления описывается линейной непрерывно-дискретной системой с импульсным управляющим воздействием и известным выходным сигналом, измеряемым в дискретные моменты времени:

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t_k) + \sum_{j=0}^{m} B_{1j}u(t_{k-j}), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \tag{1}$$

$$x_2(t_{k+1}) = A_{21}x_1(t_k) + A_{22}x_2(t_k) + \sum_{j=0}^{m} B_{2j}u(t_{k-j}), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

$$y(t_k) = \sum_{j=0}^{m} \left(C_{1j}x_1(t_{k-j}) + C_{2j}x_2(t_{k-j})\right), \quad k = m, m+1, \ldots, \tag{3}$$

где $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, $i, j = 1, 2$; $B_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times r}$, $C_{ij} \in \mathbb{R}^{l \times n_i}$, $i = 1, 2$, $j = \overline{0, m}$; u — управление, y — наблюдаемый выходной сигнал; $t_k = kh$, $k \in \mathbb{Z}$, $h > 0$ — шаг квантования.

Считаем, что начальное условие для системы (1), (2) имеет вид

$$x_1(0) = a_1, \quad x_2(0) = a_2, \quad a_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \ i = 1, 2; \quad u(t_j) = 0, \quad j < 0. \tag{4}$$

Под *решением* системы (1), (2) с начальным условием (4) понимается пара функций $\{x_1(t),\ t \geqslant 0,\ x_2(t_k),\ k = 0, 1, \ldots\}$, удовлетворяющих начальному условию (4) и уравнениям (1), (2), где $x_1(t)$, $t \geqslant 0$, — непрерывная функция, дифференцируемая при $t \neq t_j$, $j = 0, 1, \ldots$, $x_2(t_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, — дискретная функция. В уравнении (1) при $t = t_k$ понимается правосторонняя производная.

Определим регуляторы двух типов [15]:

— *регулятор с обратной связью по состоянию*, реализация которого предполагает, что в каждый момент времени измерению доступен вектор $X(t_k)$:

$$u(t_k)=\sum_{j=0}^{m_1}\big(V_{11}^jX(t_{k-j})+V_{12}^jx_3(t_{k-j})\big),\quad x_3(t_{k+1})=\sum_{j=0}^{m_1}\big(V_{21}^jX(t_{k-j})+V_{22}^jx_3(t_{k-j})\big),\tag{5}$$

$$k=k_1,k_1+1,\ldots,\quad k_1=m+m_1;$$

— *регулятор с обратной связью по неполным измерениям*, в котором обратная связь строится по наблюдаемому выходному сигналу (3):

$$u(t_k)=\sum_{j=0}^{m_2}\big(U_{11}^jy(t_{k-j})+U_{12}^jx_4(t_{k-j})\big),\quad x_4(t_{k+1})=\sum_{j=0}^{m_2}\big(U_{21}^jy(t_{k-j})+U_{22}^jx_4(t_{k-j})\big),\tag{6}$$

$$k=k_2,k_2+1,\ldots,\quad k_2=2m+m_2.$$

Здесь $X(t_k)=\operatorname{col}[x_1(t_k),x_2(t_k)]$, $k=0,1,\ldots$; $x_i\in\mathbb{R}^{n_i}$, $i=3,4$, — вспомогательные переменные, удовлетворяющие начальному условию

$$x_{i+2}(t_k)=a_{i+2\,k},\quad k=\overline{0,m+m_i},\ \ i=1,2,\tag{7}$$

где $a_{i+2\,k}\in\mathbb{R}^{n_{i+2}}$ — любые заданные векторы; V_{ij}, U_{ij} — постоянные матрицы подходящих размеров. Для определённости считаем, что при использовании регуляторов (5) и (6) $u(t_k)=0$, $k=\overline{0,k_i-1}$, где $i=1,2$ соответственно.

Определение 1. Регулятор (5) (регулятор (6)), для которого существует число $k_0\in\mathbb{N}$ такое, что, какими бы ни были начальные условия (4), (7) для решения замкнутой системы (1), (2), (5) (замкнутой системы (1)–(3), (6)), выполняются равенства

$$x_1(t)=0,\quad t\geqslant t_{k_0},\quad x_2(t_k)=0,\quad k=k_0,k_0+1,\ldots,\tag{8}$$

назовём *регулятором слабой финитной стабилизации по состоянию* (*регулятором слабой финитной стабилизации по выходу*).

Определение 2. Если в определении 1 одновременно с соотношением (8) выполняются равенства

$$x_3(t_k)=0,\quad k=k_0,k_0+1,\ldots\quad \big(x_4(t_k)=0,\quad k=k_0,k_0+1,\ldots\big),\tag{9}$$

то регулятор (5) (регулятор (6)) назовём [15] *регулятором финитной стабилизации по состоянию* (*регулятором финитной стабилизации по выходу*).

Обозначим через $I_n\in\mathbb{R}^{n\times n}$ единичную матрицу, $n=n_1+n_2$, и введём матрицы

$$E_1=e^{A_{11}h},\quad E_2=\int\limits_0^h e^{A_{11}(h-\tau)}\,d\tau,\quad A=\begin{bmatrix}E_1 & E_2A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix},\quad B_j=\begin{bmatrix}E_2B_{1j}\\ B_{2j}\end{bmatrix},\quad C_j=\big[C_{1j},\ C_{2j}\big],$$

$$B(\lambda)=\sum_{j=0}^m\lambda^jB_j,\quad C(\lambda)=\sum_{j=0}^m\lambda^jC_j.$$

Рассмотрим следующие два условия:

$$\operatorname{rank}\big[I_n-\lambda A,\quad B(\lambda)\big]=n\quad \text{при любом}\ \ \lambda\in\mathbb{C};\tag{10}$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}I_n-\lambda A\\ C(\lambda)\end{bmatrix}=n\quad \text{при любом}\ \ \lambda\in\mathbb{C}.\tag{11}$$

В работе [15] доказано, что условие (10) является необходимым и достаточным для существования регулятора финитной стабилизации по состоянию, условия (10) и (11) являются необходимыми и достаточными для существования регулятора финитной стабилизации по выходу. Вместе с тем условие (10) является критерием (следуя терминологии статей [13, 14]) полной управляемости, а (11) — критерием слабой финальной наблюдаемости.

В данной статье предлагается новый подход к финитной стабилизации системы, реализация которого возможна в случаях, когда условие (10) нарушается, т.е. исходная система не является полностью управляемой. При этом финитная стабилизация понимается в смысле равенств (8). Таким образом, решается следующая

Задача. Требуется получить критерий существования и метод проектирования регулятора слабой финитной стабилизации по состоянию (регулятора слабой финитной стабилизации по выходу).

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Применив к уравнению (1) формулу Коши, получим равенства

$$x_1(t_{k+1}) = e^{A_{11}h}x_1(t_k) + \int\limits_0^h e^{A_{11}(h-\tau)}\,d\tau\left(A_{12}x_2(t_k) + \sum_{j=0}^{m} B_{1j}u(t_{k-j})\right), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{12}$$

Используя подход работ [13, 14], на основании (12) запишем разностную систему с дискретным временем, которой удовлетворяют векторы $X(t_k)$:

$$X(t_{k+1}) = AX(t_k) + \sum_{j=0}^{m} B_j u(t_{k-j}), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{13}$$

$$y(t_k) = \sum_{j=0}^{m} C_j X(t_{k-j}), \quad k = m, m+1, \ldots \tag{14}$$

Начальные условия для системы (13) получаются из равенств (4) и имеют вид

$$X(0) = \mathrm{col}[a_1, a_2], \quad u(t_j) = 0, \quad j < 0. \tag{15}$$

Лемма 1. *Для того чтобы регулятор* (5) (*регулятор* (6)) *был регулятором слабой финитной стабилизации по состоянию* (*по выходу*) *для системы* (1)–(3), *необходимо и достаточно, чтобы этот регулятор обеспечивал решению системы* (13), (5) (*решению системы* (13), (14), (6)) *при некотором* $k_0 \in \mathbb{N}$ *равенства*

$$X(t_k) = 0, \quad k = k_0, k_0 + 1, \ldots, \tag{16}$$

какими бы ни были начальные условия (15), (7).

Данное утверждение является обобщением леммы 1 из [15], его доказательство принципиальных трудностей не представляет, поэтому не приводится.

Если замкнуть систему (13) регулятором (5) (регулятором (6) и в полученной системе выход $y(t_k)$ заменить выражением $\sum_{j=0}^{m} C_j X(t_{k-j})$), то получим однородную разностную систему с дискретным временем. Запишем эту систему для случая уравнений (5), (13):

$$\overline{X}(t_{k+1}) = \sum_{j=0}^{k_1} \overline{A}_j \overline{X}(t_{k-j}), \quad k = k_1, k_1 + 1, \ldots, \tag{17}$$

где $\overline{X}(t_k)=\operatorname{col}[X(t_k),x_3(t_k)]$, $\overline{A}_j\in\mathbb{R}^{(n+n_3)\times(n+n_3)}$ — некоторые матрицы, вид которых установить не сложно.

С системой вида (17) свяжем матрицу $\overline{W}(\lambda)=I_{n+n_3}-\lambda\sum_{j=0}^{k_1}\lambda^j\overline{A}_j$, которую будем называть [15] *матрицей, ассоциированной с характеристической матрицей системы* (17).

Далее будем пользоваться следующим утверждением.

Лемма 2 [15]. *Для того чтобы существовало число $k_0\in\mathbb{N}$ такое, что решение разностной системы с дискретным временем* (17) *удовлетворяет равенствам $\overline{X}(t_k)=0$, $k=k_0,k_0+1,\ldots$, независимо от начального условия $\overline{X}(t_j)$, $j=\overline{0,k_1}$, этой системы, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы, ассоциированной с характеристической матрицей системы* (17), *тождественно равнялся единице*: $\det\overline{W}(\lambda)\equiv 1$.

Для построения регулятора слабой финитной стабилизации по состоянию (по выходу) важную роль будут играть свойства дескрипторного разностного уравнения с дискретным временем, которое строится по неоднородной части системы (13) (системы (1), (2)):

$$B_0g(k+1)+\sum_{i=1}^{m}B_ig(k+1-i)=0,\quad k=m,m+1,\ldots \tag{18}$$

Подробно уравнение (18) исследовано в работах [19, 20], ниже приведём ряд необходимых фактов.

Последовательность $g(k)$, $k=m,m+1,\ldots$, определяемая уравнением (18) и заданными начальными условиями $g(i)=\widetilde{g}_i$, $i=\overline{1,m}$, $\widetilde{g}_i\in\mathbb{R}^r$, существует в том и только в том случае [19], когда

$$\widetilde{g}_{m+1-i}=T_ic,\quad i=\overline{1,m}, \tag{19}$$

где $T_i\in\mathbb{R}^{r\times r_0}$ ($r_0\in\mathbb{N}$) — некоторые матрицы (возможен случай нулевых матриц T_i), $c\in\mathbb{R}^{r_0}$ — произвольный вектор, причём один и тот же для всех матриц T_i. Набор матриц (T_i, $i=\overline{1,m}$), взятых в указанном порядке, назовём *базисными матрицами*. Процедура построения базисных матриц T_i всегда возможна и заключается в решении конечной цепочки однородных алгебраических систем [19]. Матрицы T_i определяются с точностью до постоянного множителя: если имеется набор базисных матриц $\{T_i,\ i=\overline{1,m}\}$, то любой другой набор базисных матриц будет иметь вид $\{T_iC,\ i=\overline{1,m}\}$, где $C\in\mathbb{R}^{r_0\times r_0}$ — любая невырожденная матрица (одна и та же для всех матриц T_i).

Зафиксируем любой набор базисных матриц $\mathfrak{T}=\{T_i,\ i=\overline{1,m}\}$. После этого определим любую матрицу $S\in\mathbb{R}^{r_0\times r_0}$, являющуюся решением системы уравнений

$$B_0T_1S+\sum_{i=1}^{m}B_iT_i=0,\quad T_kS=T_{k-1},\quad k=\overline{2,m}. \tag{20}$$

Существование решения этой системы обосновано в статье [19]. Более того, в общем случае матрица S, удовлетворяющая уравнению (20), является не единственной. При этом в некоторых случаях (в зависимости от матриц B_i) можно построить матрицу S с наперёд заданным спектром или заданной частью спектра (детали см. в [20]). Множество всех матриц S, отвечающих набору базисных матриц $\mathfrak{T}$ и удовлетворяющих уравнению (20), обозначим через $\mathbf{S}(\mathfrak{T})$.

Используя зафиксированные ранее матрицы $T_i\in\mathfrak{T}$ и любую найденную матрицу $S\in\mathbf{S}(\mathfrak{T})$, положим $T=T_m$ и построим матрицы $G_0=B_0T$, $G_i=G_{i-1}S+B_iT$, $i=1,2,\ldots$ В силу соотношений (20) выполняются равенства $G_i=0$, $i=m,m+1,\ldots$ Обозначим $G(\lambda)=\sum_{i=0}^{m-1}\lambda^iG_i$. Ниже понадобится формула [19]

$$B(\lambda)T=G(\lambda)(I_{r_0}-\lambda S). \tag{21}$$

3. КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕГУЛЯТОРОВ ФИНИТНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Получим для системы (1)–(3) критерий существования регулятора слабой финитной стабилизации по выходу (6). Тогда критерий существования регулятора слабой финитной стабилизации по состоянию вида (5) будет его следствием.

Считаем, что построены любые матрицы T, S, G_i, $i=\overline{0,m-1}$, $G(\lambda)$ (см. п. 2).

Теорема. *Для того чтобы для системы* (1)–(3) *существовал регулятор слабой финитной стабилизации по выходу вида* (6), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rank}\big[I_n-\lambda A, \quad B(\lambda), \quad G(\lambda)\big]=n \quad \textit{при любом } \lambda\in\mathbb{C} \tag{22}$$

и выполнялось условие (11).

Замечание 1. В статье [19] показано, что условие (22) не зависит от выбора базисного набора матриц $\{T_i,\ i=\overline{1,m}\}$ и соответствующей матрицы S.

Доказательство. *Необходимость.* Считаем, что существует регулятор (6) такой, что выполняется равенство (8).

1. Докажем необходимость условия (22). Зафиксируем произвольное начальное условие (4) (или, что то же самое, начальное условие (15)). Тогда в силу леммы 1 для решения замкнутой системы (13), (6) выполняются соотношения (16). Поэтому для последовательности векторов $u(t_k)$, $k=k_0-m,k_0-m+1,\ldots$, определяемой по формуле (6), выполняются равенства

$$B_0u(t_{k+1})+\sum_{i=1}^{m}B_iu(t_{k+1-i})=0, \quad k=k_0-1,k_0,\ldots$$

Это означает, что при $g(k+1)=u(t_{k_0-m+k})$, $k=m,m+1,\ldots$, разрешимо уравнение (18) с начальным условием $g(m+1-i)=u(t_{k_0-i})$, $i=\overline{1,m}$. Следовательно, согласно (19) существует вектор $\nu\in\mathbb{R}^{r_0}$ такой, что

$$u(t_{k_0-i})=T_i\nu, \quad i=\overline{1,m}. \tag{23}$$

Предположим, что условие (22) нарушается при некотором $\lambda=\lambda_0\in\mathbb{C}$. Очевидно, что $\lambda_0\neq 0$ и

$$d'B(\lambda_0)=0, \quad d'G(\lambda_0)=0, \tag{24}$$

где $d\in\mathbb{C}^n$ — собственный вектор матрицы A', отвечающий собственному значению $\lambda_1=1/\lambda_0$, $\lambda_1d'=d'A$ (здесь и далее штрих обозначает операцию транспонирования).

Рассмотрим систему (13). Запишем следующую очевидную цепочку равенств:

$$\lambda_1d'X(t_{\rho_0})=\lambda_1d'AX(t_{\rho_0-1})+\lambda_1d'\sum_{i=0}^{m}B_iu(t_{\rho_0-1-i})=$$

$$=\lambda_1^2d'X(t_{\rho_0-1})+\lambda_1d'\sum_{i=0}^{m}B_iu(t_{\rho_0-1-i})=\ldots$$

$$\ldots=\lambda_1^{\rho+1}d'X(t_{\rho_0-\rho})+\sum_{k=1}^{\rho}\lambda_1^kd'\sum_{i=0}^{m}B_iu(t_{\rho_0-k-i}), \quad \rho_0,\rho\in\mathbb{N}\ (\rho_0\geqslant\rho). \tag{25}$$

Пусть $u(t_k)$, $k=k_2,k_2+1,\ldots$, определяется согласно (6) и $u(t_k)=0$, $k=\overline{0,k_2-1}$. Тогда, полагая в (25) $\rho_0=k_0$ и $\rho=k_0$, учитывая равенства (16), соотношения (23) и условие $u(t_k)=0$, $k<0$, получаем

$$0=\lambda^{k_0+1}d'X(t_0)+\sum_{k=1}^{k_0}d'\lambda_1^k\sum_{i=0}^{m}B_iu(t_{k_0-k-i})=$$

$$=\lambda_1^{k_0+1}d'X(t_0)+\sum_{k=1}^{m}d'\lambda_1^k\left(\sum_{i=0}^{m-k}B_iTS^{m-k-i}\nu+\sum_{i=m-k+1}^{m}B_iu(t_{k_0-k-i})\right)+$$

$$+\sum_{k=m+1}^{k_0-m}\lambda_1^kd'\sum_{i=0}^{m}B_iu(t_{k_0-k-i})+\sum_{k=1}^{m}\lambda_1^{k_0-m+k}d'\sum_{i=0}^{m-k}B_iu(t_{m-k-i})=$$

$$=\lambda_1^{k_0+1}d'X(t_0)+d'\lambda\sum_{i=1}^{m}G_{m-i}\lambda_1^{i-1}\nu+d'\sum_{j=1}^{k_0-m}\lambda_1^j\sum_{i=0}^{m}B_{m-i}\lambda_1^iu(t_{k_0-m-j})=$$

$$=\lambda_1^{k_0}d'X(t_0)+d'\lambda_1^mG(\lambda_0)\nu+d'\sum_{j=1}^{k_0-m}\lambda_1^{j+m}B(\lambda_0)u(t_{k_0-m-j}). \tag{26}$$

В силу соотношений (24) из равенств (26) при $\lambda_1\neq 0$ заключаем, что начальное условие (15) системы (13) необходимо удовлетворяет равенству $d'X(0)=0$ (обратим внимание, что $t_0=0$). Полученное необходимое условие на начальное состояние (15) противоречит предположению о произвольности начального условия (4). Необходимость условия (22) доказана.

2. Докажем необходимость условия (11). Замкнём систему (13) регулятором (6) и в полученной системе выход $y(t_k)$ заменим выражением $\sum_{j=0}^{m}C_jX(t_{k-j})$. В итоге будем иметь однородную разностную систему вида

$$\widehat{X}(t_{k+1})=\sum_{j=0}^{k_2}\widehat{A}_j\widehat{X}(t_{k-j}),\quad k=k_2,k_2+1,\ldots, \tag{27}$$

где $\widehat{X}(t_k)=\mathrm{col}[X(t_k),x_4(t_k)]$, $\widehat{A}_j\in\mathbb{R}^{(n+n_4)\times(n+n_4)}$ — некоторые матрицы, вид которых очевиден.

Пусть $\widehat{W}(\lambda)$ — матрица, ассоциированная с характеристической матрицей системы (27), $\widehat{W}(\lambda)=[I_{\hat n}-\lambda\widehat{A}(\lambda)]$, где $\hat n=n+n_4$, $\widehat{A}(\lambda)=\sum_{j=0}^{k_2}\lambda^j\widehat{A}_j$. Запишем матрицу $\widehat{W}(\lambda)$ в более подробном виде:

$$\widehat{W}(\lambda)=\begin{bmatrix}I_n-\lambda A-\lambda B(\lambda)U_{11}(\lambda)C(\lambda) & -\lambda B(\lambda)U_{12}(\lambda)\\ -\lambda U_{21}(\lambda)C(\lambda) & I_{n_4}-\lambda U_{22}(\lambda)\end{bmatrix}, \tag{28}$$

где

$$U_{ik}(\lambda)=\sum_{j=0}^{m_2}\lambda^jU_{ik}^j.$$

Предположим, что условие (11) нарушается при некотором $\lambda_2\in\mathbb{C}$. Очевидно, что $\lambda_2\neq 0$. Пусть вектор $d_2\in\mathbb{C}^n$ $(d_2\neq 0)$ найден как решение алгебраической системы $(I_n-\lambda_2A)d_2=0$, $C(\lambda_2)d_2=0$. Положим в начальном условии (4) $\mathrm{col}[a_1,a_2]=\mathrm{Re}(\lambda_2^{-1}d_2)$, если действительная часть не равна нулю, или $\mathrm{col}[a_1,\,a_2]=\mathrm{Im}(\lambda_2^{-1}d_2)$ в противном случае, а в (7) $a_{4k}=\overline{0,m+m_2}$. Тогда из (28) следует, что $\widehat{X}(t_k)=\mathrm{Re}(\lambda_2^{-(k+1)}\,\mathrm{col}[d_2,0])$ (или $\widehat{X}(t_k)=\mathrm{Im}(\lambda_2^{-(k+1)}\,\mathrm{col}[d_2,0])$), $k=0,1,\ldots$ Это противоречит равенству (8). Необходимость доказана.

Достаточность. Введём в рассмотрение вспомогательную систему

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1(t)&=A_{11}\tilde{x}_1(t)+A_{12}\tilde{x}_2(t_k)+\sum_{j=0}^{m}B_{1j}\tilde{u}_1(t_{k-j})+\sum_{j=0}^{m-1}G_{1j}\tilde{u}_2(t_{k-j}),\quad t\in[t_k,t_{k+1}),\\ \tilde{x}_2(t_{k+1})&=A_{21}\tilde{x}_1(t_k)+A_{22}\tilde{x}_2(t_k)+\sum_{j=0}^{m}B_{2j}\tilde{u}_1(t_{k-j})+\sum_{j=0}^{m-1}G_{2j}\tilde{u}_2(t_{k-j}),\quad k=0,1,\ldots,\\ \tilde{y}(t_k)&=\sum_{j=0}^{m}(C_{1j}\tilde{x}_1(t_{k-j})+C_{2j}\tilde{x}_2(t_{k-j})),\quad k=m,m+1,\ldots,\end{aligned}\tag{29}$$

с начальными условиями $\tilde{x}_i(0)=b_i$, $b_i\in\mathbb{R}^{n_i}$, $\tilde{u}_i(t_j)=0$, $j<0$, $i=1,2$. Здесь $G_{ij}\in\mathbb{R}^{n_i\times r_0}$, $i=1,2$, $j=\overline{0,m-1}$, и

$$\begin{bmatrix}G_{1j}\\ G_{2j}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_2^{-1} & 0_{n_1\times n_2}\\ 0_{n_2\times n_1} & I_{n_2}\end{bmatrix}G_j,$$

матрицы G_j определены ранее; $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$ определяют управление; $\tilde{y}$ — наблюдаемый выходной сигнал; $0_{i\times j}\in\mathbb{R}^{i\times j}$ — нулевой блок. Тогда вектор-функция $\widetilde{X}(t_j)=\operatorname{col}[\tilde{x}_1(t_j),\tilde{x}_2(t_j)]$ определяется системой (аналог системы (13), (14))

$$\begin{aligned}\widetilde{X}(t_{k+1})&=A\widetilde{X}(t_k)+\sum_{j=0}^{m}B_j\tilde{u}_1(t_{k-j})+\sum_{j=0}^{m-1}G_j\tilde{u}_2(t_{k-j}),\quad k=0,1,\ldots,\\ \tilde{y}(t_k)&=\sum_{j=0}^{m}C_j\widetilde{X}(t_{k-j}),\quad k=m,m+1,\ldots\end{aligned}\tag{30}$$

($\tilde{y}$ — наблюдаемый выход). Начальные условия для системы (30) имеют вид $\widetilde{X}(0)=\operatorname{col}[b_1,b_2]$, $b_i\in\mathbb{R}^{n_i}$, $i=1,2$, $\tilde{u}_i(t_j)=0$, $j<0$, $i=1,2$.

Условия (11), (22) являются [15] критерием существования для системы (29) регулятора финитной стабилизации по выходу вида (6). Запишем этот регулятор следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1(t_k)&=\sum_{j=0}^{m_4}\big(K_{11}^j\tilde{y}(t_{k-j})+K_{12}^j\tilde{x}_3(t_{k-j})\big),\\ \tilde{u}_2(t_k)&=\sum_{j=0}^{m_4}\big(K_{21}^j\tilde{y}(t_{k-j})+K_{22}^j\tilde{x}_3(t_{k-j})\big),\\ \tilde{x}_4(t_{k+1})&=\sum_{j=0}^{m_4}\big(K_{31}^j\tilde{y}(t_{k-j})+K_{32}^j\tilde{x}_3(t_{k-j})\big),\quad k=k_2,k_2+1,\ldots,\end{aligned}\tag{31}$$

где $\tilde{x}_4\in\mathbb{R}^{\tilde{n}_4}$ — вспомогательная переменная, K_{ij}^k — постоянные матрицы соответствующих размерностей. Замкнём систему (30) регулятором (31). Из определения 2 следует, что существует число $k_0\in\mathbb{N}$ такое, что независимо от начального состояния для решения системы (30), (31) будут выполняться соотношения

$$\widetilde{X}(t_k)=0,\quad \tilde{x}_4(t_k)=0,\quad k=k_0,k_0+1,\ldots\tag{32}$$

Пусть матрица $\widetilde{W}(\lambda)$ ассоциирована с характеристической матрицей системы (30), (31):

$$\widetilde{W}(\lambda)=\begin{bmatrix} I_n-\lambda A-\lambda B(\lambda)K_{11}(\lambda)C(\lambda)-\lambda G(\lambda)K_{21}(\lambda)C(\lambda) & -\lambda B(\lambda)K_{12}(\lambda)-\lambda G(\lambda)K_{22}(\lambda) \\ -\lambda K_{31}(\lambda)C(\lambda) & I_{\tilde{n}_4}-\lambda K_{31}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad (33)$$

где $K_{ij}(\lambda)=\sum_{k=0}^{m_3}\lambda^k K_{ij}^k$. В силу равенств (32) и леммы 2 справедливо тождество

$$\bigl|\widetilde{W}(\lambda)\bigr|\equiv 1. \quad (34)$$

Используя матрицы регулятора (31), построим для системы (1)–(3) регулятор слабой финитной стабилизации по выходу вида (6):

$$u(t_k)=\sum_{j=0}^{m_4}\bigl(K_{11}^j y(t_{k-j})+K_{12}^j x_{41}(t_{k-j})\bigr)+Tx_{42}(t_{k+1}),$$

$$x_{41}(t_{k+1})=\sum_{j=0}^{m_4}\bigl(K_{31}^j y(t_{k-j})+K_{32}^j x_{41}(t_{k-j})\bigr),$$

$$x_{42}(t_{k+1})=Sx_{42}(t_k)+\sum_{j=0}^{m_4}\bigl(K_{21}^j y(t_{k-j})+K_{22}^j x_{41}(t_{k-j})\bigr), \quad k=k_2,k_2+1,\ldots, \quad (35)$$

где $x_{41}\in\mathbb{R}^{n_{41}}$ ($n_{41}=\tilde{n}_4$), $x_{42}\in\mathbb{R}^{r_0}$ — вспомогательные переменные, матрицы T и S определены ранее. Для того чтобы регулятор (35) представить в виде (6), следует выразить $x_{42}(t_{k+1})$ в первом соотношении формул (35) через $x_{42}(t_k)$, $x_{41}(t_{k-j})$, $y(t_{k-j})$, $j=\overline{0,m_4}$, согласно третьему уравнению в (35), после чего ввести вектор $x_4=\operatorname{col}[x_{41},x_{42}]$ и положить $n_4=n_{41}+r_0$.

Покажем, что каково бы ни было начальное условие замкнутой системы (1)–(3), (35), существует число $k_0\in\mathbb{N}$ такое, что для решения этой системы выполняются равенства

$$x_1(t)=0,\quad t\geqslant t_{k_0},\quad x_2(t_k)=0,\quad x_{41}(t_k)=0,\quad k=k_0,k_0+1,\ldots \quad (36)$$

Рассмотрим ассоциированную с характеристической матрицей системы (13), (14), (35) матрицу

$$W_1(\lambda)=\begin{bmatrix} I_n-\lambda A-\lambda B(\lambda)K_{11}(\lambda)C(\lambda) & -\lambda B(\lambda)K_{12}(\lambda) & -B(\lambda)T \\ -\lambda K_{31}(\lambda)C(\lambda) & I_{n_{41}}-\lambda K_{32}(\lambda) & 0_{n_{41}\times r_0} \\ -\lambda K_{21}(\lambda)C(\lambda) & -\lambda K_{22}(\lambda) & I_{r_0}-\lambda S \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Введём

$$\Omega(\lambda)=\begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times n_{41}} & G(\lambda) \\ 0_{n_{41}\times n} & I_{n_{41}} & 0_{n_{41}\times r_0} \\ 0_{r_0\times n_{41}} & 0_{r_0\times n_{41}} & I_{r_0} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Заметим, что $|\Omega(\lambda)|\equiv 1$, т.е. матрица $\Omega(\lambda)$ является унимодулярной. Умножением с использованием формулы (21) проверяем, что

$$\Omega(\lambda)W_1(\lambda)=\begin{bmatrix} \widetilde{W}(\lambda) & 0_{n_{41}\times r_0} \\ W_{21}(\lambda) & I_{r_0}-\lambda S \end{bmatrix}, \quad (39)$$

где матрица $\widetilde{W}(\lambda)$ определена формулой (33), $W_{21}(\lambda)=\bigl[-\lambda K_{21}(\lambda)C(\lambda),\ -\lambda K_{22}(\lambda)\bigr]$. Очевидно, что умножение характеристической матрицы системы (или умножение матрицы, ассоциированной с характеристической матрицей системы) слева на унимодулярную матрицу $\Omega(\lambda)$

равносильно проведению следующих элементарных преобразований с уравнениями соответствующей системы: прибавление к одному уравнению другого уравнения, предварительно умноженного на оператор $a\lambda_h$, где $a\in\mathbb{R}$, λ_h — оператор сдвига, действующий по правилу $\lambda_h f(t_k)=f(t_{k-1})$. Таким образом, равенство (39) показывает, что существуют элементарные преобразования уравнений системы (13), (14), (35), в результате которых можно получить независимую подсистему, описывающую поведение векторных компонент $X(t_k)$, $x_{41}(t_k)$ вектора-решения $\operatorname{col}\big[X(t_k),\ x_{41}(t_k),\ x_{42}(t_k)\big]$ системы (13), (14), (35). При этом матрица, ассоциированная с характеристической матрицей подсистемы, которая описывает поведение векторов $X(t_k)$, $x_{41}(t_k)$, совпадает с матрицей $\widetilde{W}(\lambda)$. Другими словами, $\operatorname{col}\big[X(t_k),\ x_{41}(t_k)\big]$ есть решение системы (30), (31) (при соответствующем начальном условии, которое ввиду ненадобности не конкретизируем).

В силу сказанного выше, тождества (34) и леммы 2 для любого решения $\operatorname{col}\big[X(t_k),\, x_{41}(t_k)\big]$ подсистемы, отвечающей матрице $\widetilde{W}(\lambda)$, выполняются равенства

$$X(t_k)=0,\quad x_{41}(t_k)=0,\quad k=k_0,k_0+1,\ldots, \tag{40}$$

из которых с учётом леммы 1 следуют соотношения (36). Теорема доказана.

Рассмотрим регулятор финитной стабилизации по состоянию (5). Если в выходе (3) положить $C_{10}=\operatorname{col}[I_{n_1},0_{n_2\times n_1}]$, $C_{20}=\operatorname{col}[0_{n_1\times n_2},I_{n_2}]$, $C_{1j}=0$, $C_{2j}=0$, $j=\overline{1,m}$, то $C(\lambda)=I_n$ и $y(t_k)=x(t_k)$. В этом случае регулятор (5) совпадёт с регулятором (6) и условие (11) будет выполнено. Тогда из теоремы вытекает

Следствие. *Для того чтобы для системы* (1), (2) *существовал регулятор слабой финитной стабилизации по состоянию вида* (5), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (22).

Замечание 2. Обозначим $C_A=\sum_{j=0}^m C_jA^{m-j}$. В работе [15] (см. доказательство теоремы 1) показано, что проверку условия (11) можно заменить проверкой следующего равенства рангов постоянных матриц:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}C_A\\ \cdots\\ C_AA^{n-1}\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}C_A\\ \cdots\\ C_AA^{n-1}\\ A^n\end{bmatrix}.$$

Аналогично можно показать, что проверку условия (10) также можно заменить проверкой равенства рангов постоянных матриц:

$$\operatorname{rank}\big[B_A^G,\ \ldots,\ A^{n-1}B_A^G\big]=\operatorname{rank}\big[B_A^G,\ \ldots,\ A^{n-1}B_A^G,\ A^n\big],$$

где $B_A^G=\sum_{j=0}^m A^{m-j}[B_j,\ G_j]$.

4. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим два примера, иллюстрирующих идеи настоящего исследования. Пример 1 является существенно простым и иллюстрирует основные идеи работы, пример 2 отражает конструктивные этапы построения регулятора.

Пример 1. Предположим, что система (1), (2) состоит только из одного уравнения

$$x_2(t_{k+1})=x_2(t_k)+u(t_k)-u(t_{k-1}),\quad k=0,1,\ldots \tag{41}$$

Простая проверка показывает, что система (41) не имеет свойства полной управляемости. Рассмотрим регулятор слабой финитной стабилизации по состоянию

$$u(t_k)=-x_2(t_k)+x_3(t_k),\quad x_3(t_{k+1})=x_3(t_k)-x_2(t_k),\quad k=1,2,\ldots, \tag{42}$$

где $x_3 \in \mathbb{R}$ — вспомогательная переменная. Матрица, ассоциированная с характеристической матрицей замкнутой системы (41), (42), при $k=1,2,\ldots$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda^2 & -\lambda+\lambda^2 \\ \lambda & 1-\lambda \end{bmatrix}. \tag{43}$$

Пусть далее $k=2,3,\ldots$ Умножив матрицу (43) слева на матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

получим матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1-\lambda \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Таким образом, при $k=2,3,\ldots$ матрица, ассоциированная с характеристической матрицей замкнутой системы (41), (42), элементарными преобразованиями приводится к виду (44), откуда следует, что переменная $x_2(t_k)$ замкнутой системы (41), (42) удовлетворяет уравнению $x_2(t_{k+1})=0$, $k=3,4,\ldots$ Это также можно проверить непосредственным нахождением решения системы (41), (42) или получить, используя формулы (41), (42), следующим образом: из (42) имеем $u(t_k)-u(t_{k-1})=-x_2(t_k)+x_3(t_k)+x_2(t_{k-1})-x_3(t_{k-1})$, поэтому из (41) получаем $x_2(t_{k+1})=x_3(t_k)-x_3(t_k)=0$.

Пример 2. Пусть система (1)–(3) определяется следующими матрицами ($h=1$, $m=1$):

$$A_{11}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{12}=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_{21}=[0,\ \ 1], \quad A_{22}=[1],$$

$$B_{10}=\begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{11}=\begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{13}=0,$$

$$B_{20}=0, \quad B_{21}=[1,\ \ -1], \quad B_{22}=[-1,\ \ 1], \quad C_{11}=[-1,\ \ -1], \quad C_{12}=0.$$

Вычисляем

$$e^{A_{11}t}=\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \int\limits_0^1 e^{A_{11}(1-\tau)}\,d\tau=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 \\ \lambda-1 & 0 \\ -\lambda^2+\lambda & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix}, \quad C(\lambda)=[-1,\ \ -1,\ \ 0].$$

Несложная проверка показывает, что для данной системы условие (11) выполнено, а условие (10) нарушается при $\lambda=1$:

$$\big[I_n-\lambda A,\ \ B(\lambda)\big]\Big|_{\lambda=1}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Значит, рассматриваемая система не имеет свойства полной управляемости и результаты статьи [15] для финитной стабилизации системы в данном случае не применимы.

Проверим условие (22). Следуя [19], находим

$$T_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&-1&0\end{bmatrix},\quad T=T_2=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&0\end{bmatrix},\quad G(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda&\lambda-1&\lambda-1\\-\lambda&\lambda-1&\lambda-1\\0&\lambda&0\end{bmatrix}.$$

Видно, что условие (22) выполняется. Построим регулятор слабой финитной стабилизации по выходу (6). Будем следовать методу, заложенному в доказательстве достаточности условий теоремы.

Сначала построим регулятор финитной стабилизации для системы (29) (см. [15]):

$$\tilde u_1(t_k)=\begin{bmatrix}1&0&3&3&0\\1&0&3&3&0\end{bmatrix}\tilde x_3(t_k)+\begin{bmatrix}0&-1&0&0&0\\0&-1&0&0&0\end{bmatrix}\tilde x_3(t_{k-1}),$$

$$\tilde u_2(t_k)=\begin{bmatrix}1&0&3&3&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\tilde x_3(t_k)+\begin{bmatrix}0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\tilde x_3(t_{k-1}),$$

$$\tilde x_3(t_{k+1})=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\-1&1&-2&-1&0\\-1&-3&-5&-1&3\\0&0&1&0&0\\0&-1&-1&0&1\end{bmatrix}\tilde x_3(t_k)+\begin{bmatrix}0&-1&0&0&0\\0&2&1&0&-1\\0&1&0&0&0\\0&2&2&0&-2\end{bmatrix}\tilde x_3(t_{k-1})+\begin{bmatrix}0\\0\\-3\\0\\-1\end{bmatrix}y(t_k)+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\2\\0\end{bmatrix}y(t_{k-1}). \quad (45)$$

Выпишем матрицу, ассоциированную с характеристической матрицей системы (29), (31) в случае регулятора (45) (т.е. матрицу (33)):

$$\widetilde W(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda&-\lambda&0&\lambda&-\lambda^2&3\lambda&3\lambda&0\\0&1-\lambda&-2\lambda&\lambda&-\lambda^2&3\lambda&3\lambda&0\\0&-\lambda&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1-\lambda&\lambda^2&-3\lambda&-3\lambda&0\\\lambda^2&\lambda^2&0&\lambda&1-\lambda-2\lambda^2&-\lambda^2+2\lambda&3\lambda&\lambda^2\\-3\lambda&-3\lambda&0&\lambda&3\lambda-\lambda^2&1+5\lambda&\lambda&-3\lambda\\2\lambda^2&2\lambda^2&0&0&-2\lambda^2&-\lambda-2\lambda^2&1&2\lambda^2\\-\lambda&-\lambda&0&0&\lambda&\lambda&0&1-\lambda\end{bmatrix}. \quad (46)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\left|\widetilde W(\lambda)\right|\equiv 1$. Поэтому согласно лемме 2 выполняются соотношения (32), а значит, регулятор (45) является регулятором финитной стабилизации:

Используя параметры регулятора (45) и формулы (35), окончательно получаем для рассматриваемой системы регулятор слабой финитной стабилизации

$$u(t_k)=\begin{bmatrix}1&0&3&3&0\\1&0&3&3&0\end{bmatrix}x_{41}(t_k)+\begin{bmatrix}0&-1&0&0&0\\0&-1&0&0&0\end{bmatrix}x_{41}(t_{k-1})+\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}x_{42}(t_{k+1}),$$

$$x_{41}(t_{k+1})=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\-1&1&-2&-1&0\\-1&-3&-5&-1&3\\0&0&1&0&0\\0&-1&-1&0&1\end{bmatrix}x_{41}(t_k)+\begin{bmatrix}0&-1&0&0&0\\0&2&1&0&-1\\0&1&0&0&0\\0&2&2&0&-2\end{bmatrix}x_{41}(t_{k-1})+\begin{bmatrix}0\\0\\-3\\0\\-1\end{bmatrix}y(t_k)+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\2\\0\end{bmatrix}y(t_{k-1}),$$

$$x_{42}(t_{k+1})=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&0\end{bmatrix}x_{42}(t_k)+\begin{bmatrix}1&0&3&3&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}x_{41}(t_k)+\begin{bmatrix}0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}x_{41}(t_{k-1}). \quad (47)$$

Замкнём исходную систему регулятором (47) и выпишем матрицу $W_1(\lambda)$, ассоциированную с характеристической матрицей замкнутой системы (матрицу (37)):

$$\begin{bmatrix}1-\lambda & -\lambda & 0 & -\lambda^2+\lambda & \lambda^3-\lambda^2 & -3\lambda^2+3\lambda & -3\lambda^2+3\lambda & 0 & 0 & -\lambda+1 & -\lambda+1\\ 0 & 1-\lambda & -2\lambda & -\lambda^2+\lambda & \lambda^3-\lambda^2 & -3\lambda^2+3\lambda & -3\lambda^2+3\lambda & 0 & 0 & -\lambda+1 & -\lambda+1\\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & \lambda^2 & -3\lambda & -3\lambda & 0 & 0 & 0 & 0\\ \lambda^2 & \lambda^2 & 0 & \lambda & 1-\lambda-2\lambda^2 & -\lambda^2+2\lambda & 3\lambda & \lambda^2 & 0 & 0 & 0\\ -3\lambda & -3\lambda & 0 & \lambda & 3\lambda-\lambda^2 & 1+5\lambda & \lambda & -3\lambda & 0 & 0 & 0\\ 2\lambda^2 & 2\lambda^2 & 0 & 0 & -2\lambda^2 & -\lambda-2\lambda^2 & 1 & 2\lambda^2 & 0 & 0 & 0\\ -\lambda & -\lambda & 0 & 0 & \lambda & \lambda & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \lambda^2 & -3\lambda & -3\lambda & 0 & 1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 1\end{bmatrix}.$$

Сформировав матрицу $\Omega(\lambda)$ (см. (38)), прямым перемножением проверяем, что выполняется равенство (39). Значит, переменные X, x_{41}, являющиеся векторными компонентами решения $\operatorname{col}\big[X,\ \ x_{41},\ \ x_{42}\big]$ замкнутой системы, удовлетворяют разностной системе с дискретным временем (30), а матрица (46) ассоциирована с характеристической матрицей этой системы. В силу (34) найдётся $k_0\in\mathbb{N}$ такое, что имеют место соотношения (40). Следовательно, в силу леммы 1, регулятор (47) является регулятором слабой финитной стабилизации по выходу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен подход к управлению не полностью управляемыми линейными автономными гибридными непрерывно-дискретными системами. Получены критерии существования и методы проектирования регуляторов слабой финитной стабилизации по состоянию и по выходу. Отметим, что если в каждом множестве матриц $\big\{B_{k0},\ldots,B_{km}\big\}$, $k=1,2$, из уравнений (1) и (2) соответственно имеется только по одной, отличной от нулевой, то $G(\lambda)=0$ и условия (10) и (22) равносильны.

Акцентируем внимание на отличительных особенностях регуляторов финитной стабилизации и слабой финитной стабилизации. Если для исходной системы (1), (2) выполняется условие (10) (условия (10), (11)) и система замкнута регулятором финитной стабилизации по состоянию (по выходу), то найдётся $k_3\in\mathbb{N}$ такое, что наряду с соотношениями (8), (9) будет выполняться равенство $u(t_k)=0,\ k=k_3,k_3+1,\ldots,$ т.е. траектория системы посредством регулятора приводится в нуль и остаётся там при “выключенном” управлении. Что касается регулятора слабой финитной стабилизации по состоянию (по выходу), то он также приводит траекторию системы в нуль. Однако если условие (10) нарушается, а управление впоследствии “выключить”, $u(t_k)=0$, $k=k_4,k_4+1,\ldots$ $(k_4\in\mathbb{N})$, то траектория системы за счёт третьего уравнения в соотношениях (35) “выйдет” из нуля, т.е. найдётся $k_5\in\mathbb{N}$ такое, что $x_1(t)\neq 0,\ t>t_{k_5}$, или $x_2(t_k)\neq 0,\ k>k_5$.

В статьях [21, 22] показано, что в случае линейных автономных систем нейтрального типа одновременное выполнение условий полной 0-управляемости и финальной наблюдаемости равносильно существованию регулятора финитной стабилизации по выходу, что представляет собой определённый аналог с выполнением условий (10) и (11) для систем вида (1)–(3). Поэтому представляется актуальным получить для систем нейтрального типа условия, аналогичные условиям теоремы и являющиеся достаточными для существования регуляторов слабой финитной стабилизации по выходу.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Гродненского государственного университета имени Янки Купалы в рамках реализации государственной программы научных исследований “Конвергенция—2025”.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев, С.Н. О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем / С.Н. Васильев, А.И. Маликов // Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН. — Т. 1. — Казань : Фолиант, 2011. — С. 23–81.
2. Гурман, В.И. Модели и условия оптимальности для гибридных управляемых систем / В.И. Гурман // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2004. — № 4. — С. 70–75.
3. Cassandras, C.G. Optimal control of a class of hybrid systems / C.G. Cassandras, D.L. Pepyne, Y. Wardi // IEEE Trans. Automat. Control. — 2001. — V. 46, № 3. — P. 398–415.
4. Savkin, A.V. Hybrid Dynamical Systems: Controller and Sensor Switching Problems / A.V. Savkin, R.J. Evans. — Boston : Birkhäuser, 2002. — 153 p.
5. Бортаковский, А.С. Оптимизация траекторий переключаемых систем / А.С. Бортаковский, И.В. Урюпина // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2021. — № 5. — С. 33–51.
6. Бортаковский, А.С. Оптимизация переключающих систем / А.С. Бортаковский. — М. : Изд-во МАИ, 2016. — 119 с.
7. Максимов, В.П. Непрерывно-дискретные динамические модели / П.В. Максимов // Уфимск. мат. журн. — 2021. — Т. 13, № 3. — С. 97–106.
8. Батурин, В.А. Итеративные методы решения задач оптимального управления логико-динамическими системами / В.А. Батурин, Е.В. Гончарова, Н.С. Малтугуева // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2010. — № 5. — С. 53–61.
9. Габасов, Р. Оптимальное управление гибридными системами / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Н.С. Павленок // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2010. — № 6. — С. 2–52.
10. Agranovich, G. Observer for discrete-continuous LTI systems with continuous-time measurements / G. Agranovich // Funct. Differ. Equat. — 2011. — № 18 (1). — P. 3–12.
11. Branicky, M. A unified framework for hybrid control: model and optimal control theory / M. Branicky, V. Borkar, S. Mitter // IEEE Trans. Automat. Control. — 1998. — V. 43, № 1. — P. 31–45.
12. De la Sen, M. On the controller synthesis for linear hybrid systems / M. De la Sen // IMA J. Math. Control and Information. — 2001. — № 18 (4). — P. 503–529.
13. Марченко, В.М. Гибридные дискретно-непрерывные системы. Управляемость и достижимость / В.М. Марченко // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 1. — С. 111–122.
14. Марченко, В.М. Наблюдаемость гибридных дискретно-непрерывных систем / В.М. Марченко // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 11. — С. 1421–1435.
15. Хартовский, В.Е. Регуляторы финитной стабилизации для гибридных линейных непрерывно-дискретных систем / В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 10. — С. 1394–1406.

16. Метельский, А.В. Успокоение решения линейных автономных дифференциально-разностных систем с многими запаздываниями посредством обратной связи / А.В. Метельский, О.И. Урбан, В.Е. Хартовский // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2015. — № 2. — С. 40–49.
17. Метельский, А.В. Регуляторы успокоения решения линейных систем нейтрального типа / А.В. Метельский, В.Е. Хартовский, О.И. Урбан // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 3. — С. 391–403.
18. Метельский, А.В. Синтез регуляторов успокоения решения вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием / А.В. Метельский, В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 4. — С. 547–558.
19. Хартовский, В.Е. Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. I. Приложение к задаче 0-управляемости / В.Е. Хартовский // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. — 2020. — № 2. — С. 290–311.
20. Хартовский, В.Е. Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. II. Каноническое представление и структурные свойства / В.Е. Хартовский // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. — 2020. — Т. 55. — С. 102–121.
21. Хартовский, В.Е. Финитная стабилизация и назначение конечного спектра единым регулятором по неполным измерениям для линейных систем нейтрального типа / В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 5. — С. 686–706.
22. Хартовский, В.Е. Финитная стабилизация по неполным измерениям систем нейтрального типа в классе регуляторов с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями / В.Е. Хартовский, О.И. Урбан // Автоматика и телемеханика. — 2025. — № 1. — С. 3–26.

FINITE STABILIZATION OF NOT FULLY CONTROLLED HYBRID LINEAR CONTINUOUS-DISCRETE SYSTEMS

 V. E. Khartovskii

Yanka Kupala State University of Grodno, Belarus
e-mail: hartows@mail.ru

For hybrid linear autonomous continuous-discrete systems that do not have the property of complete controllability, an approach to designing two types of controllers that provide “incomplete finite stabilization” is proposed. The implementation of one of them — a controller of weak finite state stabilization — is based on knowledge of the values of the control system solution at discrete moments of time, multiples of the quantization step. The second type of controller — a weak finite stabilization controller by output — uses the observed output signal as feedback. The constructed regulators contain auxiliary variables described by additional equations with discrete time, and incomplete finite stabilization implies that for a closed system, finite functions will only be required for those components of the solution vector that are components of the solution vector of the initial (open) system. Criteria for the existence of the specified regulators and a method for their design are obtained.

Keywords: linear hybrid continuous-discrete system, observed output signal, controller, finite stabilization

FUNDING

This work was carried out with financial support from Yanka Kupala State University of Grodno within the framework of the State Program of Scientific Research “Konvergencia–2025”.

REFERENCES

1. Vasil’yev, S.N. and Malikov, A.I., On some results on the stability of switchable and hybrid systems, in *Aktual’nyye problemy mekhaniki sploshnoy sredy. K 20-letiyu IMM KazNTS RAN*, Kazan: Foliant, 2011. vol. 1, pp. 23–81.
2. Gurman, V.I., Models and optimality conditions for hybrid controlled systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2004, vol. 43, no. 4, pp. 560–565.

3. Cassandras, C.G., Pepyne, D.L., and Wardi, Y., Optimal control of a class of hybrid systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, 2001, vol. 46, no. 3, pp. 398–415.
4. Savkin, A.V. and Evans, R.J., *Hybrid Dynamical Systems: Controller and Sensor Switching Problems*, Boston: Birkhäuser, 2002.
5. Bortakovsky, A.S. and Uryupin, I.V., Optimization of switchable systems' trajectories, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2021, vol. 60, no. 5, pp. 701–718.
6. Bortakovskiy, A.S., *Optimizatsiya pereklyuchayushchikh sistem* (Optimization of Switching Systems), Moscow: Izd-vo MAI, 2016.
7. Maksimov, V.P., Continuous-discrete dynamic models, *Ufa Math. J.*, 2021, vol. 13, no. 3, pp. 95–103.
8. Baturin, V.A., Goncharova E.V., and Maltugueva, N.S., Iterative methods for solution of problems of optimal control of logic-dynamic systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2010, vol. 49, no. 5, pp. 731–739.
9. Gabasov, R., Kirillova, F.M., and Paulianok, N.S., Optimal control of some hybrid systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2010, no. 49, pp. 872–882.
10. Agranovich, G., Observer for discrete-continuous LTI systems with continuous-time measurements, *Funct. Differ. Equat.*, 2011, no. 18 (1), pp. 3–12.
11. Branicky, M., Borkar, V., and Mitter S., A unified framework for hybrid control: model and optimal control theory, *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 43, no. 1, pp. 31–45.
12. De la Sen, M., On the controller synthesis for linear hybrid systems, *IMA J. of Math. Control and Information*, 2001, no. 18 (4), pp. 503–529.
13. Marchenko, V.M., Hybrid discrete-continuous systems. Controllability and reachability, *Differ. Equat.*, 2013, vol. 49, no. 1, pp. 112–125.
14. Marchenko, V.M., Observability of hybrid discrete-continuous systems, *Differ. Equat.*, 2013, vol. 49, no. 11, pp. 1389–1404.
15. Khartovskii, V.E., Finite stabilization controllers for hybrid linear continuous-discrete systems, *Differ. Equat.*, 2024, vol. 60, no. 10, pp. 1463–1475.
16. Metel'skii, A.V., Urban, O.I., and Khartovskii, V.E., Damping of a solution of linear autonomous difference–differential systems with many delays using feedback, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2015, vol. 54, no. 2, pp. 202–211.
17. Metel'skii, A.V., Khartovskii, V.E., and Urban O.I., Solution damping controllers for linear systems of the neutral type, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 3, pp. 386–399.
18. Metel'skii, A.V. and Khartovskii, V.E., Synthesis of damping controllers for the solution of completely regular differential-algebraic delay systems, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 4, pp. 539–550.
19. Khartovskii, V.E., On a linear autonomous descriptor equation with discrete time. I. Appendix to the 0-controllability problem, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, iss. 2, pp. 290–311.
20. Khartovskii, V.E., On a linear autonomous descriptor equation with discrete time. II. Canonical representation and structural properties, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 55, pp. 102–121.
21. Khartovskii, V.E., Finite stabilization and finite spectrum assignment by a single controller based on incomplete measurements for linear systems of the neutral type, *Differ. Equat.*, 2024, vol. 60, no. 5, pp. 686–706.
22. Khartovskii, V.E. and Urban O.I., Incomplete measurements-based finite stabilization of neutral systems by controllers with lumped commensurate delays, *Automation and Remote Control*, 2025, no. 1, pp. 3–26.