ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 3, с. 374–393

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ A-ОРБИТАЛЬНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ АФФИННЫХ СИСТЕМ С ОДНИМ УПРАВЛЕНИЕМ

Д. А. Фетисов

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

e-mail: dfetisov@yandex.ru

Поступила в редакцию 30.10.2024 г., после доработки 09.12.2024 г.; принята к публикации 26.12.2024 г.

Для аффинных систем с одним управлением рассматривается проблема A-орбитальной линеаризации в окрестности особых точек производного флага распределения, ассоциированного с системой. Под особой точкой производного флага понимается такая точка, что хотя бы один из элементов производного флага в любой её окрестности не является распределением постоянного ранга. Доказывается локальное необходимое и достаточное условие A-орбитальной эквивалентности по обратной связи и состоянию аффинной системы с одним управлением линейной управляемой системе, рассматриваемой в окрестности нулевого положения равновесия.

Ключевые слова: аффинная система, орбитальная линеаризация, масштабирование времени

DOI: 10.31857/S0374064125030078, EDN: HMFUWP

ВВЕДЕНИЕ

Один из подходов, позволяющих эффективно решать задачи управления нелинейными системами, состоит в преобразовании нелинейной системы в линейную управляемую систему. Начиная с работы [1], условия существования и способы нахождения таких преобразований привлекают внимание многих исследователей. Переход от нелинейной системы к линейной может выполняться в разных классах преобразований: самый традиционный класс преобразований включает в себя невырожденные замены состояния и статическую обратную связь, но наряду с ними используются также динамическая обратная связь и масштабирования времени. Если для преобразования нелинейной системы в линейную управляемую систему достаточно обратимых замен состояния и управления, то говорят, что эта нелинейная система *линеаризуема обратной связью*. Полное описание аффинных систем, линеаризуемых обратной связью, дано в статьях [2, 3]. Если нелинейная система не линеаризуема обратной связью, то один из путей расширения класса преобразований — ввести в рассмотрение так называемые масштабирования времени [4]. Первые результаты в этом направлении появились в работах [5, 6], где было введено понятие *орбитальной линеаризации* аффинной системы. Под орбитальной линеаризацией понимают преобразование аффинной системы в линейную управляемую систему в результате выполнения в системе невырожденных замен состояния и управления, а также масштабирования времени, не зависящего от управления. Условия орбитальной линеаризуемости известны как для систем с одним управлением [5, 6], так и для систем с векторным управлением [7]. Наиболее общие для систем с управлением понятия орбитальной эквивалентности и орбитальной плоскостности были введены в [8].

В статье [9] показано, что аффинная система, не линеаризуемая орбитально, в некоторых случаях может быть преобразована в линейную управляемую систему, если использовать масштабирования времени, зависящие от управления. В [10] аффинные системы, которые могут быть преобразованы в линейную управляемую систему невырожденными заменами состояния и управления, а также масштабированием времени, зависящим от управления, были названы *A-орбитально линеаризуемыми.* Там же показано, что для выяснения, является ли аффинная система A-орбитально линеаризуемой, необходимо составить распределение, порождённое векторными полями системы, и его производный флаг. Локальные условия A-орбитальной линеаризуемости, полученные в работах [11, 12] для систем с одним управлением и в [10] для систем с векторным управлением, применимы лишь для систем, у которых все элементы указанного производного флага имеют постоянный ранг в окрестности рассматриваемой точки. Такое ограничение весьма существенно для приложений, поскольку в окрестности нулевого положения равновесия линейной управляемой системы ранг распределения, порождённого векторными полями системы, является переменным. Для систем третьего порядка условие A-орбитальной линеаризуемости, применимое в том числе к окрестностям положений равновесия, известно (см. [13]). В настоящей работе это условие обобщается на системы с произвольной размерностью состояния.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ВЕКТОРНЫХ ПОЛЯХ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ

Пусть X — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Через $\mathcal{T}(X)$ будем обозначать $C^\infty(X)$-модуль гладких векторных полей, заданных на множестве X. Под гладкостью в настоящей работе всюду понимается C^∞-гладкость. Если на множестве X фиксирована система координат $(x_1,\ldots,x_n)$, то базисные векторные поля будем обозначать через $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}$.

Распределением на множестве X называют подмодуль $\mathcal{P}$ модуля $\mathcal{T}(X)$. Если $\xi_1,\ldots,\xi_m \in \mathcal{T}(X)$, то будем говорить, что

$$\mathcal{P}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\xi_1,\ldots,\xi_m\}=\left\{\xi\in\mathcal{T}(X)\colon \xi=\sum_{i=1}^m\beta_i\xi_i,\ \ \beta_i\in C^\infty(X),\ \ i=\overline{1,m}\right\}$$

— распределение, порождённое векторными полями $\xi_1, \ldots, \xi_m$. Через $[\xi,\eta]$ будем обозначать коммутатор векторных полей $\xi,\eta\in\mathcal{T}(X)$. Для последовательных коммутаторов векторных полей ξ и η будем использовать традиционные обозначения $\operatorname{ad}_\xi^0\eta=\eta$, $\operatorname{ad}_\xi^k\eta=[\xi,\operatorname{ad}_\xi^{k-1}\eta]$, $k\in\mathbb{N}$.

Распределение $\mathcal{P}$ называют *инволютивным*, если для любых векторных полей $\xi,\eta\in\mathcal{P}$ выполнено условие $[\xi,\eta]\in\mathcal{P}$. *Характеристическим распределением* $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ распределения $\mathcal{P}$ называют подмодуль модуля $\mathcal{P}$, содержащий все векторные поля $\xi\in\mathcal{P}$ такие, что для любого векторного поля $\eta\in\mathcal{P}$ выполнено условие $[\xi,\eta]\in\mathcal{P}$. Важным свойством характеристического распределения является его инволютивность, которая вытекает из тождества Якоби для коммутаторов.

Напомним, что *производным флагом распределения* $\mathcal{P}$ называют восходящую последовательность распределений $\mathcal{P}_0\subset\mathcal{P}_1\subset\mathcal{P}_2\subset\ldots$, элементы которой определяются по правилу

$$\mathcal{P}_0=\mathcal{P},\quad \mathcal{P}_k=\mathcal{P}_{k-1}+[\mathcal{P}_{k-1},\mathcal{P}_{k-1}],\quad k\in\mathbb{N}.$$

Будем говорить, что точка $x_0\in X$ является регулярной точкой производного флага распределения $\mathcal{P}$, если в её окрестности все распределения $\mathcal{P}_k$ имеют постоянный ранг. В противном случае будем называть точку x_0 особой точкой производного флага распределения $\mathcal{P}$.

2. A-ОРБИТАЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПО ОБРАТНОЙ СВЯЗИ И СОСТОЯНИЮ

В настоящей работе рассматривается аффинная система

$$\Sigma:\quad \dot x=f_0(x)+f_1(x)u,$$

где $x=(x_1,\ldots,x_n)\in X$ — состояние, X — открытое подмножество пространства состояний $\mathbb{R}^n$, $n>3$; $u\in\mathbb{R}$ — управление; f_0 и f_1 — гладкие векторные поля; $\dot x=dx/dt$. Будем далее говорить, что распределение $\mathcal{P}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{f_0,f_1\}$ ассоциировано с системой Σ. Все результаты настоящей статьи являются локальными. Не ограничивая общности, будем далее полагать, что множество X содержит начало координат (точку $x=0$) и система Σ рассматривается в окрестности начала координат. Напомним понятие A-орбитальной эквивалентности аффинных систем по обратной связи и состоянию. С этой целью рассмотрим ещё одну аффинную систему

$$\hat\Sigma:\quad y'=h_0(y)+h_1(y)v$$

с состоянием $y=(y_1,\ldots,y_n)$, принадлежащим открытому подмножеству Y пространства состояний $\mathbb{R}^n$, и управлением $v\in\mathbb{R}$; полагаем, что штрих обозначает дифференцирование по τ, а h_0 и h_1 — гладкие векторные поля. Пусть $y_0\in Y$.

Говорят [10], что системы Σ и $\hat\Sigma$ A-орбитально эквивалентны по обратной связи и состоянию в паре точек $(0,y_0)$, если существуют окрестности $U(0)$ и $V(y_0)$, невырожденная матрица $A=(\alpha_{ij})_{i,j=0,1}$, $\alpha_{ij}\in C^\infty(U(0))$, $i,j=0,1$, и диффеоморфизм $\Phi:U(0)\to V(y_0)$, $\Phi(0)=y_0$, такие, что векторные поля h_0, h_1 и f_0, f_1 связаны равенством

$$\begin{pmatrix}h_0\\h_1\end{pmatrix}=\Phi_*\left((A^{-1})^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}f_0\\f_1\end{pmatrix}\right),$$

где через Φ_* обозначено касательное отображение, индуцированное отображением Φ. Фактически A-орбитальная эквивалентность систем Σ и $\hat\Sigma$ по обратной связи и состоянию означает, что распределения, ассоциированные с этими системами, совпадают с точностью до диффеоморфизма.

Известно [10], что A-орбитальная эквивалентность систем Σ и $\hat\Sigma$ по обратной связи и состоянию в паре точек $(0,y_0)$ равносильна тому, что система Σ в окрестности начала координат может быть преобразована в систему $\hat\Sigma$, ограниченную на окрестность точки y_0, при помощи замены состояния, замены управления и масштабирования времени, которые задаются соотношениями

$$y=\Phi(x),\quad v=\frac{\alpha_{10}(x)+\alpha_{11}(x)u}{\alpha_{00}(x)+\alpha_{01}(x)u},\quad \dot\tau=\alpha_{00}(x)+\alpha_{01}(x)u.$$

Отметим, что в общем случае выполнение такого преобразования приводит к ограничениям на управление как в системе Σ, так и в системе $\hat\Sigma$. Эти ограничения задаются условиями $\alpha_{00}(x)+\alpha_{01}(x)u\neq0$ для системы Σ и $\alpha_{11}(\Phi^{-1}(y))-\alpha_{01}(\Phi^{-1}(y))v\neq0$ для системы $\hat\Sigma$.

Частным случаем A-орбитальной эквивалентности по обратной связи и состоянию является орбитальная эквивалентность по обратной связи и состоянию [5]. Системы Σ и $\hat\Sigma$ орбитально эквивалентны по обратной связи и состоянию в паре точек $(0,y_0)$, если они A-орбитально эквивалентны в этой паре точек по обратной связи и состоянию и $\alpha_{01}=0$. Орбитальная эквивалентность систем Σ и $\hat\Sigma$ по обратной связи и состоянию означает, что система Σ может быть преобразована в систему $\hat\Sigma$ с помощью преобразований

$$y=\Phi(x),\quad v=\tilde\alpha_{10}(x)+\tilde\alpha_{11}(x)u,\quad \dot\tau=\alpha_{00}(x),$$

где $\tilde\alpha_{10}=\alpha_{10}/\alpha_{00}$ и $\tilde\alpha_{11}=\alpha_{11}/\alpha_{00}$.

Особый интерес представляет возможность преобразовать систему Σ в линейную управляемую систему

$$\Sigma_{\text{lin}}: \quad y_1' = y_2, \quad \ldots, \quad y_{n-1}' = y_n, \quad y_n' = v.$$

Аффинную систему Σ называют *A-орбитально* (*орбитально*) *линеаризуемой* в окрестности начала координат, если существует точка $y_0 \in Y$ такая, что системы Σ и Σ_{lin} A-орбитально (орбитально) эквивалентны по обратной связи и состоянию в паре точек $(0, y_0)$.

Необходимое и достаточное условие орбитальной линеаризуемости известно (см. [5]). В его формулировке используется последовательность распределений

$$\mathcal{F}_i = \operatorname{span}_{C^\infty}\{f_0, f_1, \operatorname{ad}_{f_0} f_1, \ldots, \operatorname{ad}_{f_0}^{i-1} f_1\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1 [5]. *Для того чтобы система Σ была орбитально линеаризуемой в окрестности начала координат, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *в окрестности начала координат имеют место включения* $[\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_i] \subset \mathcal{F}_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$;

2) *в окрестности начала координат выполнено условие* $[f_1, \mathcal{F}_2] \subset \mathcal{F}_2$;

3) $\dim \mathcal{F}_n(0) = n$.

В отличие от теоремы 1 известное условие A-орбитальной линеаризуемости [11] систем с одним управлением применимо лишь к случаю, когда начало координат является регулярной точкой производного флага распределения $\mathcal{P} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{f_0, f_1\}$. Таким образом, в работе [11] речь идёт об A-орбитальной эквивалентности систем Σ и Σ_{lin} по обратной связи и состоянию в паре точек $(0, y_0)$, где y_0 — регулярная точка производного флага распределения $\mathcal{P}_{\text{lin}} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{y_2\partial y_1 + \ldots + y_n\partial y_{n-1}, \partial y_n\}$, ассоциированного с системой Σ_{lin}. Нетрудно проверить, что для распределения $\mathcal{P}_{\text{lin}}$ точка $y_0 = (y_{01}, \ldots, y_{0n})$ является регулярной точкой производного флага тогда и только тогда, когда $y_{02} \neq 0$. Следовательно, условие A-орбитальной линеаризуемости из [11] — это условие A-орбитальной эквивалентности систем Σ и Σ_{lin} по обратной связи и состоянию в паре точек $(0, y_0)$ при условии, что $y_{02} \neq 0$. В настоящей работе рассматривается случай, когда $y_{02} = 0$. Мы не исследуем эту проблему во всем её многообразии и ограничиваемся лишь установлением условий, при выполнении которых системы Σ и Σ_{lin} A-орбитально эквивалентны по обратной связи и состоянию в паре точек $(0, 0)$. Решение этой задачи для трёхмерных систем с одним управлением базируется на результатах работ [5; 14, с. 16; 15] и приведено в статье [13]. Ниже рассматриваются аффинные системы с одним управлением и произвольной размерностью состояния.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть S — гладкая гиперповерхность в пространстве $\mathbb{R}^n$, $\delta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Полагаем, что в $\mathbb{R}^n$ фиксирована система координат $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Пусть δ удовлетворяет одному из двух условий: а) δ равна нулю на гиперповерхности S; б) уравнение, которым задается S, содержит лишь часть переменных, а частные производные функции δ по остальным переменным равны нулю на S. В настоящем пункте будет получен ответ на вопрос, что в этих случаях можно сказать про вид функции δ. Справедливы следующие два утверждения.

Лемма 1 (лемма Адамара [16, с. 5]). *Пусть S — гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, заданная в окрестности начала координат соотношением $\zeta_1 = \psi(\bar{\zeta})$, где $\bar{\zeta} = (\zeta_2, \ldots, \zeta_n)$. Если δ — гладкая функция такая, что $\delta|_S = 0$, то в окрестности начала координат она представима в виде $\delta(\zeta) = (\zeta_1 - \psi(\bar{\zeta}))C(\zeta)$, где C — некоторая гладкая функция.*

Лемма 2. *Пусть S — гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, заданная в окрестности начала координат соотношением $\zeta_1 = \psi(\zeta_2, \zeta_3)$. Если δ — гладкая функция такая, что $(\partial\delta/\partial\zeta_j)|_S = 0$, $j = \overline{4, n}$, то в окрестности начала координат она представима в виде*

$$\delta(\zeta) = (\zeta_1 - \psi(\zeta_2, \zeta_3))H(\zeta) + \varphi(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3), \tag{1}$$

где H и φ — некоторые гладкие функции.

Доказательство. Согласно лемме 1 функция $\partial\delta/\partial\zeta_4$ представима в виде

$$\frac{\partial\delta}{\partial\zeta_4}(\zeta) = (\zeta_1 - \psi(\zeta_2, \zeta_3))C(\zeta),$$

где C — некоторая гладкая функция. Проинтегрировав функцию $\partial\delta/\partial\zeta_4$ по переменной ζ_4, будем иметь

$$\delta(\zeta) = (\zeta_1 - \psi(\zeta_2, \zeta_3))E(\zeta) + \varphi(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_5, \ldots, \zeta_n), \tag{2}$$

где E и φ — некоторые гладкие функции. Очевидно, что функция φ не зависит от ζ_4. Дифференцируя соотношение (2) по ζ_5 и учитывая условие леммы, получаем, что $(\partial\varphi/\partial\zeta_5)|_S = 0$. Следовательно, согласно лемме 1 функция $\partial\varphi/\partial\zeta_5$ представима в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_5}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_5, \ldots, \zeta_n) = (\zeta_1 - \psi(\zeta_2, \zeta_3))F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_5, \ldots, \zeta_n),$$

где F — некоторая гладкая функция. Интегрируя это равенство по ζ_5, придём к выражению

$$\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_5, \ldots, \zeta_n) = (\zeta_1 - \psi(\zeta_2, \zeta_3))G(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_5, \ldots, \zeta_n) + \hat{\varphi}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_6, \ldots, \zeta_n),$$

в котором G и $\hat{\varphi}$ — некоторые гладкие функции. Подставляя это соотношение в (2) и группируя слагаемые с общим множителем $\zeta_1 - \psi(\zeta_2, \zeta_3)$, получаем

$$\delta(\zeta) = (\zeta_1 - \psi(\zeta_2, \zeta_3))\hat{G}(\zeta) + \hat{\varphi}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_6, \ldots, \zeta_n),$$

где $\hat{G}$ — некоторая гладкая функция. Таким образом, установлено, что последнее слагаемое в правой части соотношения, определяющего функцию δ, не зависит не только от ζ_4, но и от ζ_5. Продолжив аналогичные рассуждения, убедимся, что это слагаемое может зависеть только от ζ_1, ζ_2 и ζ_3. Следовательно, δ описывается соотношением (1). Лемма доказана.

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Докажем условие A-орбитальной эквивалентности систем Σ и Σ_{lin} по обратной связи и состоянию в паре точек $(0,0)$. В его формулировке используется производный флаг распределения $\mathcal{P}$, ассоциированного с системой Σ. Для упрощения записи введём обозначение $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}(\mathcal{P}_i)$. Справедлива следующая

Теорема 2. *Для того чтобы системы Σ и Σ_{lin} были A-орбитально эквивалентны по обратной связи и состоянию в паре точек $(0,0)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) $\dim\mathcal{P}(0) = 1$;

2) *в окрестности точки $x = 0$ распределение $\mathcal{C}_{n-3}$ имеет ранг $n-3$ и содержит векторное поле, принадлежащее распределению $\mathcal{P}$ и не обращающееся в нуль в точке $x = 0$;*

3) *существует векторное поле g такое, что в окрестности точки $x = 0$ распределение $\mathcal{P}_{n-3}$ представимо в виде $\mathcal{P}_{n-3} = \mathcal{C}_{n-3} + \mathcal{P} + \mathrm{span}_{C^\infty}\{g\}$;*

4) $\dim\mathcal{P}_{n-2}(0) = n-1$;

5) $\dim(\mathcal{P}_{n-2} + [\mathcal{P}, \mathcal{P}_{n-2}])(0) = n$.

Доказательство. *Достаточность.* Обозначим через $f_{\rm char}$ векторное поле, удовлетворяющее условиям $f_{\rm char}\in\mathcal{P}$, $f_{\rm char}\in\mathcal{C}_{n-3}$, $f_{\rm char}(0)\neq 0$. Векторное поле $f_{\rm char}$ представимо в виде $f_{\rm char}=\beta_0 f_0+\beta_1 f_1$, где β_0 и β_1 — некоторые гладкие функции. Так как $f_{\rm char}(0)\neq 0$, то найдётся такой номер $k\in\{0,1\}$, для которого $\beta_k(0)\neq 0$, $f_k(0)\neq 0$. Предположим для определённости, что $k=1$. В силу равенства $\dim\mathcal{P}(0)=1$ существует число $B\in\mathbb{R}$ такое, что $f_0(0)=Bf_1(0)$. Нетрудно видеть, что соотношение

$$\begin{pmatrix} f_{\rm char}\\ f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_0 & \beta_1\\ 1 & -B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0\\ f_1\end{pmatrix}$$

задаёт в окрестности начала координат невырожденную замену образующих распределения $\mathcal{P}$. Действительно, если бы это было не так и матрица преобразования была бы вырожденной в начале координат, то выполнялось бы равенство $\beta_0(0)B+\beta_1(0)=0$, из которого следовало бы соотношение $f_{\rm char}(0)=\beta_0(0)(f_0(0)-Bf_1(0))=0$, являющееся противоречием. Таким образом, распределение $\mathcal{P}$ в окрестности начала координат можно представить в виде $\mathcal{P}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{f_{\rm char},f\}$, где образующая f удовлетворяет равенству $f(0)=0$.

Так как $f_{\rm char}\in\mathcal{C}_{n-3}$, то из условия 3) теоремы следует, что распределение $\mathcal{P}_{n-3}$ представимо в окрестности начала координат в виде $\mathcal{P}_{n-3}=\mathcal{C}_{n-3}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{g,f\}$, а распределение $\mathcal{P}_{n-2}$ описывается выражением $\mathcal{P}_{n-2}=\mathcal{P}_{n-3}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{[g,f]\}$. Так как $\operatorname{rank}\mathcal{C}_{n-3}=n-3$, $f(0)=0$ и $\dim\mathcal{P}_{n-2}(0)=n-1$, то в окрестности начала координат образующие распределения $\mathcal{C}_{n-3}$ и векторные поля g, $[g,f]$ поточечно линейно независимы.

Распределение $\mathcal{C}_{n-3}$, являясь характеристическим для распределения $\mathcal{P}_{n-3}$, вполне интегрируемо, поэтому в окрестности начала координат найдётся система из трёх независимых интегралов ζ_1, ζ_2, ζ_3 распределения $\mathcal{C}_{n-3}$. Дополним ζ_1, ζ_2, ζ_3 функциями ζ_4, …, ζ_n так, чтобы ζ_1, …, ζ_n являлись независимыми в окрестности начала координат. Полагаем, что все функции ζ_i, $i=\overline{1,n}$, выбраны так, что выполняются равенства $\zeta_i(0)=0$, $i=\overline{1,n}$. По построению распределение $\mathcal{C}_{n-3}$ в координатах ζ_i, $i=\overline{1,n}$, имеет вид $\mathcal{C}_{n-3}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{\zeta_4},\ldots,\partial_{\zeta_n}\}$.

Не ограничивая общности, можем полагать, что векторное поле g задаётся выражением $g=\partial_{\zeta_3}+\gamma_{11}\partial_{\zeta_1}+\gamma_{12}\partial_{\zeta_2}$, где γ_{11} и γ_{12} — некоторые гладкие функции. Разложим векторное поле f в гладкую комбинацию векторных полей ∂_{ζ_1}, ∂_{ζ_2}, g, ∂_{ζ_4}, …, ∂_{ζ_n}. Пусть это разложение имеет вид

$$f=\xi+\gamma_{03}g \bmod \mathcal{C}_{n-3}, \tag{3}$$

где $\xi=\gamma_{01}\partial_{\zeta_1}+\gamma_{02}\partial_{\zeta_2}$, а γ_{01}, γ_{02} и γ_{03} — некоторые гладкие функции. Тогда распределение $\mathcal{P}_{n-3}$ в окрестности начала координат запишется как

$$\mathcal{P}_{n-3}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{\zeta_4},\ldots,\partial_{\zeta_n}\}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{g,\xi\}. \tag{4}$$

Отметим, что из равенства $f(0)=0$ вытекает, что $\gamma_{01}(0)=\gamma_{02}(0)=\gamma_{03}(0)=0$.

Докажем, что две последние образующие распределения $\mathcal{P}_{n-3}$ всегда могут быть выбраны не зависящими от ζ_4, …, ζ_n, и покажем способ нахождения таких образующих. Отметим, что распределение $\mathcal{P}_{n-2}$ имеет вид $\mathcal{P}_{n-2}=\mathcal{P}_{n-3}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{[g,\xi]\}$, в котором коммутатор векторных полей g и ξ задаётся соотношением $[g,\xi]=\delta_1\partial_{\zeta_1}+\delta_2\partial_{\zeta_2}$, где δ_1, δ_2 — некоторые гладкие функции. Так как $\dim\mathcal{P}_{n-2}(0)=n-1$, то по крайней одна из функций δ_1 или δ_2 в начале координат отлична от нуля. Предположим, не ограничивая общности, что $\delta_2(0)\neq 0$. Тогда распределение $\mathcal{P}_{n-2}$ можно записать в виде

$$\mathcal{P}_{n-2}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{\zeta_4},\ldots,\partial_{\zeta_n}\}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{g,\xi,\partial_{\zeta_2}+\delta\partial_{\zeta_1}\}, \tag{5}$$

где $\delta=\delta_1/\delta_2$.

Введём в рассмотрение множество $S=\{\zeta\in\mathbb{R}^n : \dim\mathcal{P}_{n-2}(\zeta)<n\}$. Очевидно, что $0\in S$. Легко видеть, что S задаётся уравнением $\gamma_{01}(\zeta)-\delta(\zeta)\gamma_{02}(\zeta)=0$. Выражения для векторных полей ξ и g запишем в удобном для последующих преобразований виде:

$$\xi=(\gamma_{01}-\delta\gamma_{02})\partial_{\zeta_1}+\gamma_{02}(\partial_{\zeta_2}+\delta\partial_{\zeta_1}), \tag{6}$$

$$g=\partial_{\zeta_3}+(\gamma_{11}-\delta\gamma_{12})\partial_{\zeta_1}+\gamma_{12}(\partial_{\zeta_2}+\delta\partial_{\zeta_1}). \tag{7}$$

Докажем, что в окрестности начала координат S является гладкой гиперповерхностью. Для этого покажем, что существует номер $i\in\{1,2\}$, для которого $\partial(\gamma_{01}-\delta\gamma_{02})/\partial\zeta_i(0)\neq 0$. Предположим противное. Так как $f_{\mathrm{char}}\in\mathcal{C}_{n-3}$ и $\mathcal{C}_{n-3}\subset\mathcal{C}_{n-2}$ (см. [17]), то $f_{\mathrm{char}}\in\mathcal{C}_{n-2}$, поэтому $\mathcal{P}_{n-2}+[\mathcal{P},\mathcal{P}_{n-2}]=\mathcal{P}_{n-2}+\mathrm{span}_{C^\infty}\{[f,\partial_{\zeta_2}+\delta\partial_{\zeta_1}]\}$. Из сравнения (3) следует, что

$$[f,\partial_{\zeta_2}+\delta\partial_{\zeta_1}]=[\xi,\partial_{\zeta_2}+\delta\partial_{\zeta_1}]+\gamma_{03}[g,\partial_{\zeta_2}+\delta\partial_{\zeta_1}] \bmod \mathcal{P}_{n-2}.$$

Поскольку $[\xi,\partial_{\zeta_2}+\delta\partial_{\zeta_1}]=-(\partial_{\zeta_2}+\delta\partial_{\zeta_1})(\gamma_{01}-\delta\gamma_{02})\partial_{\zeta_1} \bmod \mathcal{P}_{n-2}$, то приходим к сравнению

$$[f,\partial_{\zeta_2}+\delta\partial_{\zeta_1}]=-(\partial_{\zeta_2}+\delta\partial_{\zeta_1})(\gamma_{01}-\delta\gamma_{02})\partial_{\zeta_1}+\gamma_{03}[g,\partial_{\zeta_2}+\delta\partial_{\zeta_1}] \bmod \mathcal{P}_{n-2}.$$

Так как $\gamma_{03}(0)=0$ и $\partial(\gamma_{01}-\delta\gamma_{02})/\partial\zeta_i(0)=0$, $i=1,2$, получаем, что $[f,\partial_{\zeta_2}+\delta\partial_{\zeta_1}](0)\in\mathcal{P}_{n-2}(0)$. Отсюда вытекает равенство $(\mathcal{P}_{n-2}+[\mathcal{P},\mathcal{P}_{n-2}])(0)=\mathcal{P}_{n-2}(0)$, из которого следует, что $\dim(\mathcal{P}_{n-2}+[\mathcal{P},\mathcal{P}_{n-2}])(0)=n-1$, а это противоречит условию 5) теоремы. Следовательно, существует номер $i\in\{1,2\}$, для которого $\partial(\gamma_{01}-\delta\gamma_{02})/\partial\zeta_i(0)\neq 0$. Это означает, что в окрестности начала координат S является гладкой гиперповерхностью, уравнение которой может быть записано в виде $\zeta_i=\psi(\overline{\zeta})$, где значение $i\in\{1,2\}$ таково, что $\partial(\gamma_{01}-\delta\gamma_{02})/\partial\zeta_i(0)\neq 0$; ψ — гладкая функция, обращающаяся в нуль в начале координат; $\overline{\zeta}=(\zeta_1,\ldots,\zeta_{i-1},\zeta_{i+1}\ldots,\zeta_n)$. Отметим, что из доказанного вытекают два важных факта: $\dim\mathcal{P}_{n-1}(0)=n$ и $\mathcal{P}_{n-1}=\mathcal{P}_{n-2}+[f,\mathcal{P}_{n-2}]$.

Согласно лемме 1 функция $\gamma_{01}-\delta\gamma_{02}$ в окрестности начала координат представима в виде $\gamma_{01}-\delta\gamma_{02}=(\zeta_i-\psi(\overline{\zeta}))C$, где C — гладкая функция. Поскольку $\partial(\gamma_{01}-\delta\gamma_{02})/\partial\zeta_i(0)\neq 0$, то $C(0)\neq 0$. Из соотношения (6) получаем, что векторное поле ξ описывается выражением

$$\xi=(\zeta_i-\psi(\overline{\zeta}))C\partial_{\zeta_1}+\gamma_{02}(\partial_{\zeta_2}+\delta\partial_{\zeta_1}). \tag{8}$$

Покажем, что функция ψ не зависит от $\zeta_4,\ \ldots,\ \zeta_n$, и установим, какими соотношениями задаются функции δ и $\gamma_{11}-\delta\gamma_{12}$. С учётом вида (5) распределения $\mathcal{P}_{n-2}$, равенств (7), (8) и условия $C(0)\neq 0$ распределение $\mathcal{P}_{n-2}$ можно записать как

$$\mathcal{P}_{n-2}=\mathrm{span}_{C^\infty}\{\partial_{\zeta_4},\ldots,\partial_{\zeta_n}\}+\mathrm{span}_{C^\infty}\{\partial_{\zeta_3}+(\gamma_{11}-\delta\gamma_{12})\partial_{\zeta_1},\partial_{\zeta_2}+\delta\partial_{\zeta_1},(\zeta_i-\psi(\overline{\zeta}))\partial_{\zeta_1}\}. \tag{9}$$

Воспользуемся тем, что векторные поля $\partial_{\zeta_4},\ \ldots,\ \partial_{\zeta_n}$, являясь характеристическими для распределения $\mathcal{P}_{n-3}$, являются характеристическими и для распределения $\mathcal{P}_{n-2}$. Следовательно, каким бы ни было $j\in\{4,\ldots,n\}$, коммутаторы векторного поля ∂_{ζ_j} с последними тремя векторными полями, порождающими $\mathcal{P}_{n-2}$, содержатся в распределении $\mathcal{P}_{n-2}$:

$$[\partial_{\zeta_j},(\zeta_i-\psi(\overline{\zeta}))\partial_{\zeta_1}]=-(\partial\psi/\partial\zeta_j)\partial_{\zeta_1}\in\mathcal{P}_{n-2},$$

$$[\partial_{\zeta_j},\partial_{\zeta_3}+(\gamma_{11}-\delta\gamma_{12})\partial_{\zeta_1}]=(\partial(\gamma_{11}-\delta\gamma_{12})/\partial\zeta_j)\partial_{\zeta_1}\in\mathcal{P}_{n-2},$$

$$[\partial_{\zeta_j},\partial_{\zeta_2}+\delta\partial_{\zeta_1}]=(\partial\delta/\partial\zeta_j)\partial_{\zeta_1}\in\mathcal{P}_{n-2}.$$

С учётом вида (9) распределения $\mathcal{P}_{n-2}$ эти условия могут быть выполнены лишь в случае, если при всех $j=\overline{4,n}$ имеют место равенства

$$\partial\psi/\partial\zeta_j=(\zeta_i-\psi(\overline{\zeta}))\tilde{D}_j, \tag{10}$$

$$\partial(\gamma_{11}-\delta\gamma_{12})/\partial\zeta_j=(\zeta_i-\psi(\overline{\zeta}))D_j, \quad \partial\delta/\partial\zeta_j=(\zeta_i-\psi(\overline{\zeta}))\hat{D}_j, \tag{11}$$

где $\tilde{D}_j$, D_j, $\hat{D}_j$ — некоторые гладкие функции, $j=\overline{4,n}$.

Поскольку функция ψ является гладкой и не зависит от ζ_i, соотношения (10) означают, что в окрестности точки $\zeta=0$ выполнены равенства $\partial\psi/\partial\zeta_j=0$, $j=\overline{4,n}$. Таким образом, ψ не зависит от ζ_4, $\ldots$, ζ_n и $\overline{\zeta}$ имеет вид $\overline{\zeta}=(\zeta_k,\zeta_3)$, $k\in\{1,2\}$, $k\neq i$.

Используя соотношения (11) и лемму 2, получаем, что функции $\gamma_{11}-\delta\gamma_{12}$ и δ в окрестности начала координат описываются выражениями

$$\gamma_{11}-\delta\gamma_{12}=(\zeta_i-\psi(\overline{\zeta}))H(\zeta)+\varphi(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3), \tag{12}$$

$$\delta=(\zeta_i-\psi(\overline{\zeta}))\hat{H}(\zeta)+\hat{\varphi}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3), \tag{13}$$

где H, $\hat{H}$, φ и $\hat{\varphi}$ — некоторые гладкие функции. Из равенств (8) и (13) получим преобразованное соотношение для векторного поля ξ, а из равенств (7), (12) и (13) — преобразованное соотношение для векторного поля g:

$$\xi=(\zeta_i-\psi(\overline{\zeta}))c(\zeta)\partial_{\zeta_1}+\gamma_{02}(\partial_{\zeta_2}+\hat{\varphi}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\partial_{\zeta_1}),$$

$$g=\partial_{\zeta_3}+((\zeta_i-\psi(\overline{\zeta}))h(\zeta)+\varphi(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3))\partial_{\zeta_1}+\gamma_{12}(\partial_{\zeta_2}+\hat{\varphi}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\partial_{\zeta_1}),$$

где $c=C+\gamma_{02}\hat{H}$, $h=H+\gamma_{12}\hat{H}$. Отметим, что поскольку $C(0)\neq0$ и $\gamma_{02}(0)=0$, то $c(0)\neq0$.

Выполним в распределении $\mathcal{P}_{n-3}$, описываемом соотношением (4), замену образующих: перейдём от образующих ξ и g к образующим $\hat{\xi}$ и $\hat{g}$ по правилу

$$\hat{\xi}=\frac{\xi}{c}=(\zeta_i-\psi(\overline{\zeta}))\partial_{\zeta_1}+\hat{\gamma}_{02}(\partial_{\zeta_2}+\hat{\varphi}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\partial_{\zeta_1}), \tag{14}$$

$$\hat{g}=g-\frac{h}{c}\xi=\partial_{\zeta_3}+\varphi(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\partial_{\zeta_1}+\hat{\gamma}_{12}(\partial_{\zeta_2}+\hat{\varphi}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\partial_{\zeta_1}), \tag{15}$$

где $\hat{\gamma}_{02}=\gamma_{02}/c$, $\hat{\gamma}_{12}=\gamma_{12}-h\gamma_{02}/c$. В результате для распределения $\mathcal{P}_{n-3}$ получим выражение

$$\mathcal{P}_{n-3}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{\zeta_4},\ldots,\partial_{\zeta_n},\hat{g},\hat{\xi}\}. \tag{16}$$

Из сравнения (3) и равенств (14), (15) имеем сравнение

$$f=a\hat{\xi}+\gamma_{03}\hat{g} \bmod \mathcal{C}_{n-3}, \tag{17}$$

где $a=c+\gamma_{03}h$. Так как $c(0)\neq0$ и $\gamma_{03}(0)=0$, то $a(0)\neq0$.

Покажем, что функции $\hat{\gamma}_{12}$ и $\hat{\gamma}_{02}$ в соотношениях (14), (15) не зависят от ζ_4, $\ldots$, ζ_n. Действительно, векторные поля ∂_{ζ_4}, $\ldots$, ∂_{ζ_n} являются характеристическими для распределения $\mathcal{P}_{n-3}$, поэтому $[\partial_{\zeta_j},\hat{g}]\in\mathcal{P}_{n-3}$, $[\partial_{\zeta_j},\hat{\xi}]\in\mathcal{P}_{n-3}$ для любого $j=\overline{4,n}$. Рассмотрим, к примеру, коммутатор $[\partial_{\zeta_j},\hat{g}]$. Он описывается выражением $[\partial_{\zeta_j},\hat{g}]=(\partial\hat{\gamma}_{12}/\partial\zeta_j)(\partial_{\zeta_2}+\hat{\varphi}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\partial_{\zeta_1})$. Следовательно, условие $[\partial_{\zeta_j},\hat{g}]\in\mathcal{P}_{n-3}$ означает, что существуют гладкие функции b_g, b_ξ, для которых имеет место равенство

$$(\partial\hat{\gamma}_{12}/\partial\zeta_j)(\partial_{\zeta_2}+\hat{\varphi}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\partial_{\zeta_1})=b_g\hat{g}+b_\xi\hat{\xi},$$

приводящее к системе уравнений

$$b_\xi(\zeta_i-\psi(\overline{\zeta}))=0,\quad b_g=0,\quad \partial\hat\gamma_{12}/\partial\zeta_j=b_g\hat\gamma_{12}+b_\xi\hat\gamma_{02}.$$

Поскольку функция b_ξ гладкая, система имеет только нулевое решение: $b_\xi=0$, $b_g=0$, откуда следует, что $\partial\hat\gamma_{12}/\partial\zeta_j=0$. Таким образом, каким бы ни было $j\in\{4,\ldots,n\}$, имеют место равенства $\partial\hat\gamma_{12}/\partial\zeta_j=0$. Отсюда вытекает, что $\hat\gamma_{12}=\hat\gamma_{12}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$. Аналогично из условия $[\partial_{\zeta_j},\hat\xi]\in\mathcal{P}_{n-3}$ следует, что $\hat\gamma_{02}=\hat\gamma_{02}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$. Таким образом, в соотношении (16) образующие распределения $\mathcal{P}_{n-3}$ выбраны так, что $\mathcal{P}_{n-3}$ не зависит от ζ_4, …, ζ_n.

Покажем, что распределение $\mathcal{P}_{n-3}$ можно представить в виде $\mathcal{P}_{n-3}=\mathcal{D}+\mathrm{span}_{C^\infty}\{\hat\xi\}$, где распределение $\mathcal{D}$ удовлетворяет условию $\mathcal{D}\subset\mathcal{C}_{n-2}$. Из равенства (16) следует, что распределение $\mathcal{P}_{n-2}$ имеет вид

$$\mathcal{P}_{n-2}=\mathcal{P}_{n-3}+\mathrm{span}_{C^\infty}\{[\hat g,\hat\xi]\}.\tag{18}$$

Как показано выше, $\mathcal{P}_{n-1}=\mathcal{P}_{n-2}+\mathrm{span}_{C^\infty}\{[f,[\hat g,\hat\xi]]\}$. Векторное поле f удовлетворяет сравнению (17), поэтому $[f,[\hat g,\hat\xi]]=[a\hat\xi+\gamma_{03}\hat g,[\hat g,\hat\xi]] \bmod \mathcal{P}_{n-2}$. Легко видеть, что отсюда вытекает сравнение

$$[f,[\hat g,\hat\xi]]=a[\hat\xi,[\hat g,\hat\xi]]+\gamma_{03}[\hat g,[\hat g,\hat\xi]] \bmod \mathcal{P}_{n-2}.$$

Поскольку $a(0)\neq0$, $\gamma_{03}(0)=0$ и $\dim\mathcal{P}_{n-1}(0)=n$, то распределение $\mathcal{P}_{n-1}$ можно представить в виде $\mathcal{P}_{n-1}=\mathcal{P}_{n-2}+\mathrm{span}_{C^\infty}\{[\hat\xi,[\hat g,\hat\xi]]\}$. Так как $[\hat g,[\hat g,\hat\xi]]\in\mathcal{P}_{n-1}$, то найдётся гладкая функция b такая, что $[\hat g,[\hat g,\hat\xi]]=b[\hat\xi,[\hat g,\hat\xi]] \bmod \mathcal{P}_{n-2}$. Поскольку отсюда вытекает сравнение $[\hat g,[\hat g,\hat\xi]]=$ $=[b\hat\xi,[\hat g,\hat\xi]] \bmod \mathcal{P}_{n-2}$, то получаем, что $[\hat g-b\hat\xi,[\hat g,\hat\xi]]\in\mathcal{P}_{n-2}$. Так как остальные образующие распределения $\mathcal{P}_{n-2}$, кроме $[\hat g,\hat\xi]$, содержатся в распределении $\mathcal{P}_{n-3}$ и $[\hat g-b\hat\xi,\mathcal{P}_{n-3}]\subset\mathcal{P}_{n-2}$, то векторное поле $\hat g-b\hat\xi$ является характеристическим для распределения $\mathcal{P}_{n-2}$. Из включения $\mathcal{C}_{n-3}\subset\mathcal{C}_{n-2}$ следует, что $\partial_{\zeta_4},\ldots,\partial_{\zeta_n}\in\mathcal{C}_{n-2}$. Отсюда вытекает, что распределение $\mathcal{D}=\mathrm{span}_{C^\infty}\{\hat g-b\hat\xi,\partial_{\zeta_4},\ldots,\partial_{\zeta_n}\}$ удовлетворяет включению $\mathcal{D}\subset\mathcal{C}_{n-2}$. При этом, очевидно, из соотношения (16) следует, что распределение $\mathcal{P}_{n-3}$ представимо в виде $\mathcal{P}_{n-3}=\mathcal{D}+\mathrm{span}_{C^\infty}\{\hat\xi\}$. Отметим, что поскольку распределение (16) не зависит от ζ_4, …, ζ_n, то и распределение (18), и векторные поля $[\hat g,[\hat g,\hat\xi]]$, $[\hat\xi,[\hat g,\hat\xi]]$ также не зависят от этих переменных. Следовательно, функция b всегда может быть выбрана зависящей только от ζ_1, ζ_2, ζ_3. Отметим также, что сравнение (17) для векторного поля f можно записать в виде

$$f=(a+\gamma_{03}b)\,\hat\xi+\gamma_{03}(\hat g-b\hat\xi) \bmod \mathcal{C}_{n-3}.$$

Так как $a(0)\neq0$ и $\gamma_{03}(0)=0$, то $(a+\gamma_{03}b)(0)\neq0$. Это позволяет ввести в рассмотрение векторное поле $\hat f=f/(a+\gamma_{03}b)$, которое удовлетворяет сравнению $\hat f=\hat\xi \bmod \mathcal{D}$ и условиям $\hat f\in\mathcal{P}$, $\hat f(0)=0$.

Выпрямим распределение $\mathcal{D}$. С учётом вида распределения $\mathcal{D}$ для этого достаточно выпрямить векторное поле $\hat g-b(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\hat\xi$. Под *выпрямлением векторного поля* $\hat g-b(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\hat\xi$ понимаем переход к таким координатам z_1, …, z_n, в которых оно примет вид ∂_{z_3}. Пусть выпрямляющий диффеоморфизм задаётся соотношениями [18, с. 228]

$$z_1=\phi_1(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3),\quad z_2=\phi_2(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3),\quad z_j=\zeta_j,\quad j=\overline{3,n},$$

где $\phi_1(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$ и $\phi_2(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$ — гладкие функции, удовлетворяющие условиям $\phi_1(0,0,0)=$ $=\phi_2(0,0,0)=0$. Нетрудно видеть, что в координатах z_1, …, z_n:

а) распределение $\mathcal{D}$ запишется в виде $\mathcal{D}=\mathrm{span}_{C^\infty}\{\partial_{z_3},\ldots,\partial_{z_n}\}$;

б) векторное поле $\hat\xi$ — в виде $\hat\xi=\sigma_{01}(z_1,z_2,z_3)\partial_{z_1}+\sigma_{02}(z_1,z_2,z_3)\partial_{z_2}$, где σ_{01} и σ_{02} — гладкие функции, удовлетворяющие условиям $\sigma_{01}(0,0,0)=0$, $\sigma_{02}(0,0,0)=0$;

в) распределение $\mathcal{P}_{n-3}$ задаётся соотношением $\mathcal{P}_{n-3}=\mathrm{span}_{C^\infty}\{\partial_{z_3},\ldots,\partial_{z_n}\}+\mathrm{span}_{C^\infty}\{\hat{\xi}\}$;

г) распределение $\mathcal{P}_{n-2}$ — соотношением

$$\mathcal{P}_{n-2}=\mathrm{span}_{C^\infty}\{\partial_{z_3},\ldots,\partial_{z_n}\}+$$
$$+\mathrm{span}_{C^\infty}\{\sigma_{01}(z_1,z_2,z_3)\partial_{z_1}+\sigma_{02}(z_1,z_2,z_3)\partial_{z_2},\sigma_{11}(z_1,z_2,z_3)\partial_{z_1}+\sigma_{12}(z_1,z_2,z_3)\partial_{z_2}\}, \tag{19}$$

где $\sigma_{11}=\partial\sigma_{01}/\partial z_3$, $\sigma_{12}=\partial\sigma_{02}/\partial z_3$;

д) гиперповерхность S задаётся уравнением вида $z_i=\tilde{\psi}(z_k,z_3)$, где $\tilde{\psi}$ — гладкая функция, $i,k\in\{1,2\}$, $i\neq k$, $\tilde{\psi}(0,0)=0$.

Введём обозначение $\sigma=(\sigma_{lm})_{l=0,1;\,m=1,2}$. Функция $\det\sigma$ равна нулю на гиперповерхности S и, следовательно, представима в виде $\det\sigma=(z_i-\tilde{\psi}(z_k,z_3))\tilde{C}$, где $\tilde{C}$ — некоторая гладкая функция.

Покажем, что существует номер $m\in\{1,2\}$, для которого $\sigma_{1m}(0)\neq 0$ и $\partial(\det\sigma)/\partial z_m(0)\neq 0$. Так как $\dim\mathcal{P}_{n-2}(0)=n-1$, то найдётся $m\in\{1,2\}$, для которого $\sigma_{1m}(0)\neq 0$. Предположим, не ограничивая общности, что $\sigma_{12}(0)\neq 0$. Тогда, как следует из соотношения (19), распределение $\mathcal{P}_{n-2}$ можно представить в виде

$$\mathcal{P}_{n-2}=\mathrm{span}_{C^\infty}\{\partial_{z_3},\ldots,\partial_{z_n}\}+\mathrm{span}_{C^\infty}\left\{\det\sigma(z_1,z_2,z_3)\partial_{z_1},\partial_{z_2}+\frac{\sigma_{11}(z_1,z_2,z_3)}{\sigma_{12}(z_1,z_2,z_3)}\partial_{z_1}\right\}. \tag{20}$$

Поскольку $\mathcal{D}\subset\mathcal{C}_{n-2}$, то распределение $\mathcal{P}_{n-1}$ задаётся выражением

$$\mathcal{P}_{n-1}=\mathcal{P}_{n-2}+\mathrm{span}_{C^\infty}\left\{\left[\partial_{z_2}+\frac{\sigma_{11}(z_1,z_2,z_3)}{\sigma_{12}(z_1,z_2,z_3)}\partial_{z_1},\det\sigma(z_1,z_2,z_3)\partial_{z_1}\right]\right\}.$$

Как отмечалось выше, $\dim\mathcal{P}_{n-1}(0)=n$, поэтому из равенства

$$\left[\partial_{z_2}+\frac{\sigma_{11}(z_1,z_2,z_3)}{\sigma_{12}(z_1,z_2,z_3)}\partial_{z_1},\det\sigma(z_1,z_2,z_3)\partial_{z_1}\right](0)=\left(\frac{\partial(\det\sigma)}{\partial z_2}+\frac{\sigma_{11}(z_1,z_2,z_3)}{\sigma_{12}(z_1,z_2,z_3)}\frac{\partial(\det\sigma)}{\partial z_1}\right)\bigg|_{z=0}\partial_{z_1}$$

вытекает, что имеет место хотя бы один из двух случаев: либо $\partial(\det\sigma)/\partial z_2(0)\neq 0$ (тогда доказываемое утверждение справедливо с $m=2$), либо $\sigma_{11}(0)\neq 0$, $\partial(\det\sigma)/\partial z_1(0)\neq 0$ (тогда доказываемое утверждение справедливо с $m=1$). Далее будем полагать, что $\sigma_{12}(0)\neq 0$ и $\partial(\det\sigma)/\partial z_2(0)\neq 0$. Тогда $\mathcal{P}_{n-2}$ задаётся соотношением (20), а векторное поле $\hat{\xi}$ удовлетворяет равенству

$$\hat{\xi}=\frac{\det\sigma}{\sigma_{12}}\partial_{z_1}+\sigma_{02}\left(\partial_{z_2}+\frac{\sigma_{11}(z_1,z_2,z_3)}{\sigma_{12}(z_1,z_2,z_3)}\partial_{z_1}\right).$$

Покажем, что в уравнении гиперповерхности S всегда можно полагать, что $i=2$. Действительно, даже если уравнение гиперповерхности S записано в виде $z_1=\tilde{\psi}(z_2,z_3)$, то из равенства $\det\sigma=(z_1-\tilde{\psi}(z_2,z_3))\tilde{C}$ получим

$$\frac{\partial(\det\sigma)}{\partial z_2}=-\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial z_2}\tilde{C}+(z_1-\tilde{\psi}(z_2,z_3))\frac{\partial\tilde{C}}{\partial z_2}.$$

Отсюда следует соотношение $\partial(\det\sigma)/\partial z_2(0)=-\tilde{C}(0)\partial\tilde{\psi}/\partial z_2(0)$. Так как $\partial(\det\sigma)/\partial z_2(0)\neq 0$, то $\partial\tilde{\psi}/\partial z_2(0)\neq 0$ и, следовательно, уравнение $z_1=\tilde{\psi}(z_2,z_3)$ в окрестности начала координат разрешимо относительно z_2 и может быть записано в виде $z_2=\hat{\psi}(z_1,z_3)$, где $\hat{\psi}$ — некоторая гладкая функция. Таким образом, можем полагать, что гиперповерхность S задаётся уравнением $z_2 = \tilde{\psi}(z_1, z_3)$, а функция $\det\sigma = (z_2 - \tilde{\psi}(z_1, z_3))\tilde{C}$. Поскольку $\partial(\det\sigma)/\partial z_2(0) \neq 0$, то $\tilde{C}(0) \neq 0$. Запишем соотношение (20) в виде

$$\mathcal{P}_{n-2} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{z_3}, \ldots, \partial_{z_n}\} + \operatorname{span}_{C^\infty}\left\{(z_2 - \tilde{\psi}(z_1, z_3))\partial_{z_1}, \partial_{z_2} + \frac{\sigma_{11}(z_1, z_2, z_3)}{\sigma_{12}(z_1, z_2, z_3)}\partial_{z_1}\right\} \tag{21}$$

и отметим, что векторное поле $\hat{\xi}$ задаётся равенством

$$\hat{\xi} = (z_2 - \tilde{\psi}(z_1, z_3))\frac{\tilde{C}}{\sigma_{12}}\partial_{z_1} + \sigma_{02}\left(\partial_{z_2} + \frac{\sigma_{11}(z_1, z_2, z_3)}{\sigma_{12}(z_1, z_2, z_3)}\partial_{z_1}\right).$$

Покажем, что функция $\tilde{\psi}$ не зависит от z_3. Действительно, векторное поле ∂_{z_3} содержится в распределении $\mathcal{D}$ и, следовательно, является характеристическим для распределения $\mathcal{C}_{n-2}$, поэтому $[\partial_{z_3}, (z_2 - \tilde{\psi}(z_1, z_3))\partial_{z_1}] = -(\partial\tilde{\psi}(z_1, z_3)/\partial z_3)\partial_{z_1} \in \mathcal{P}_{n-2}$. Из вида (21) распределения $\mathcal{P}_{n-2}$ вытекает, что $\partial\tilde{\psi}(z_1, z_3)/\partial z_3 = (z_2 - \tilde{\psi}(z_1, z_3))L$, где L — некоторая гладкая функция. Поскольку функция $\tilde{\psi}$ не зависит от z_2, полученное соотношение может быть выполнено лишь в случае, когда в окрестности начала координат справедливо равенство $\partial\tilde{\psi}(z_1, z_3)/\partial z_3 = 0$. Таким образом, функция $\tilde{\psi}$ не зависит от z_3 и, следовательно, уравнение гиперповерхности S имеет вид $z_2 = \tilde{\psi}(z_1)$.

Установим вид функции σ_{11}/σ_{12} в окрестности начала координат. Так как $\partial_{z_3} \in \mathcal{C}_{n-2}$, то

$$\left[\partial_{z_3}, \partial_{z_2} + \frac{\sigma_{11}(z_1, z_2, z_3)}{\sigma_{12}(z_1, z_2, z_3)}\partial_{z_1}\right] = \frac{\partial}{\partial z_3}\left(\frac{\sigma_{11}(z_1, z_2, z_3)}{\sigma_{12}(z_1, z_2, z_3)}\right)\partial_{z_1} \in \mathcal{P}_{n-2}.$$

Учитывая (21) и то, что $\tilde{\psi}$ не зависит от z_3, получаем соотношение

$$\frac{\partial}{\partial z_3}\left(\frac{\sigma_{11}(z_1, z_2, z_3)}{\sigma_{12}(z_1, z_2, z_3)}\right) = (z_2 - \tilde{\psi}(z_1))M,$$

где M — некоторая гладкая функция. Проинтегрировав это соотношение по z_3, придём к равенству

$$\frac{\sigma_{11}(z_1, z_2, z_3)}{\sigma_{12}(z_1, z_2, z_3)} = (z_2 - \tilde{\psi}(z_1))\tilde{M} + N(z_1, z_2),$$

где $\tilde{M}$ и N — некоторые гладкие функции. Подставив найденный результат в (21), будем иметь

$$\mathcal{P}_{n-2} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{z_3}, \ldots, \partial_{z_n}\} + \operatorname{span}_{C^\infty}\{(z_2 - \tilde{\psi}(z_1))\partial_{z_1}, \partial_{z_2} + ((z_2 - \tilde{\psi}(z_1))\tilde{M} + N(z_1, z_2))\partial_{z_1}\}.$$

Вычитая из последней образующей предпоследнюю, умноженную на $\tilde{M}$, получаем

$$\mathcal{P}_{n-2} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{z_3}, \ldots, \partial_{z_n}\} + \operatorname{span}_{C^\infty}\{(z_2 - \tilde{\psi}(z_1))\partial_{z_1}, \partial_{z_2} + N(z_1, z_2)\partial_{z_1}\}.$$

Отметим, что равенство, которому удовлетворяет векторное поле $\hat{\xi}$, принимает вид

$$\hat{\xi} = (z_2 - \tilde{\psi}(z_1))\hat{C}\partial_{z_1} + \sigma_{02}(\partial_{z_2} + N(z_1, z_2)\partial_{z_1}),$$

где $\hat{C} = \tilde{C}/\sigma_{12} + \sigma_{02}\tilde{M}$. Так как $\sigma_{02}(0) = 0$, то $\hat{C}(0) \neq 0$.

Выпрямим векторное поле $\partial_{z_2} + N(z_1, z_2)\partial_{z_1}$, т.е. подберём координаты $\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n$, в которых это поле имеет вид $\partial_{\hat{z}_2}$. Пусть выпрямляющий диффеоморфизм задаётся соотношениями [18, с. 228]

$$\hat{z}_1 = \theta(z_1, z_2), \quad \hat{z}_j = z_j, \quad j = \overline{2, n},$$

в которых $\theta(z_1,z_2)$ — гладкая функция, удовлетворяющая условиям $\theta(0,0)=0$, $\theta'_{z_1}(0)\neq 0$. Если обратное преобразование задаётся равенствами $z_1=\theta^{-1}(\hat z_1,\hat z_2)$, $z_j=\hat z_j$, $j=\overline{2,n}$, то в координатах $\hat z_1$, …, $\hat z_n$ распределение $\mathcal{P}_{n-2}$ примет вид

$$\mathcal{P}_{n-2}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{\hat z_2},\partial_{\hat z_3},\ldots,\partial_{\hat z_n}\}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{(\hat z_2-\hat\psi(\hat z_1,\hat z_2))\partial_{\hat z_1}\},$$

где $\hat\psi$ — гладкая функция, связанная с функцией $\tilde\psi$ соотношением $\hat\psi(\hat z_1,\hat z_2)=\tilde\psi(\theta^{-1}(\hat z_1,\hat z_2))$. Отметим, что в координатах $\hat z_1$, …, $\hat z_n$ распределение $\mathcal{D}$ имеет вид $\mathcal{D}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{\hat z_3},\ldots,\partial_{\hat z_n}\}$, а распределение $\mathcal{P}_{n-3}$ — вид $\mathcal{P}_{n-3}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{\hat z_3},\ldots,\partial_{\hat z_n},\hat\xi\}$, в котором векторное поле $\hat\xi$ описывается соотношением $\hat\xi=\varepsilon((\hat z_2-\hat\psi(\hat z_1,\hat z_2))\partial_{\hat z_1}+\hat\mu\partial_{\hat z_2})$, где ε и $\hat\mu$ — гладкие функции такие, что $\varepsilon(0)\neq 0$, $\hat\mu(0)=0$. Так как $\varepsilon(0)\neq 0$, то распределение $\mathcal{P}_{n-3}$ можно записать как $\mathcal{P}_{n-3}=$ $=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{\hat z_3},\ldots,\partial_{\hat z_n},\tilde\xi\}$, где $\tilde\xi=\hat\xi/\varepsilon=(\hat z_2-\hat\psi(\hat z_1,\hat z_2))\partial_{\hat z_1}+\hat\mu\partial_{\hat z_2}$. Отметим, что: 1) векторное поле $\tilde f=\hat f/\varepsilon$ содержится в распределении $\mathcal{P}$, удовлетворяет равенству $\tilde f(0)=0$ и сравнению $\tilde f=\tilde\xi \bmod \mathcal{D}$; 2) распределение $\mathcal{P}_{n-3}$ можно задать также соотношением $\mathcal{P}_{n-3}=\mathcal{D}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{\tilde f\}$.

Поскольку $\mathcal{D}\subset\mathcal{C}_{n-2}$, то распределение $\mathcal{P}_{n-1}$ описывается выражением

$$\mathcal{P}_{n-1}=\mathcal{P}_{n-2}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{[\partial_{\hat z_2},(\hat z_2-\hat\psi(\hat z_1,\hat z_2))\partial_{\hat z_1}]\},$$

поэтому из равенств $[\partial_{\hat z_2},(\hat z_2-\hat\psi(\hat z_1,\hat z_2))\partial_{\hat z_1}]=(1-\partial\hat\psi/\partial\hat z_2(\hat z_1,\hat z_2))\partial_{\hat z_1}$ и $\dim\mathcal{P}_{n-1}(0)=n$ вытекает, что $1-\partial\hat\psi/\partial\hat z_2(0,0)\neq 0$. Установленное свойство позволяет ввести в рассмотрение координаты $\tilde z_1$, …, $\tilde z_n$ по формулам

$$\tilde z_1=\hat z_1,\quad \tilde z_2=\hat z_2-\hat\psi(\hat z_1,\hat z_2),\quad \tilde z_i=\hat z_i,\quad i=\overline{3,n}.$$

В новых координатах распределения $\mathcal{C}_{n-3}$ и $\mathcal{P}_{n-3}$ примут вид

$$\mathcal{C}_{n-3}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{\tilde z_4},\ldots,\partial_{\tilde z_n}\},\quad \mathcal{P}_{n-3}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{\tilde z_3},\ldots,\partial_{\tilde z_n}\}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{\tilde f\},$$

где векторное поле $\tilde f$ удовлетворяет сравнению $\tilde f=\tilde z_2\partial_{\tilde z_1}+\mu\partial_{\tilde z_2} \bmod \{\partial_{\tilde z_3},\ldots,\partial_{\tilde z_n}\}$, в котором μ — гладкая функция такая, что $\mu(0)=0$.

Отметим, что поскольку $\partial_{\tilde z_4},\ldots,\partial_{\tilde z_n}\in\mathcal{C}_{n-3}$, то

$$\mathcal{P}_{n-2}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{\tilde z_3},\ldots,\partial_{\tilde z_n}\}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{\tilde f\}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{[\partial_{\tilde z_3},\tilde z_2\partial_{\tilde z_1}+\mu\partial_{\tilde z_2}]\}=$$
$$=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{\tilde z_3},\ldots,\partial_{\tilde z_n}\}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{\tilde f\}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{(\partial\mu/\partial\tilde z_3)\partial_{\tilde z_2}\},$$

поэтому из равенства $\dim\mathcal{P}_{n-2}(0)=n-1$ вытекает свойство $\partial\mu/\partial\tilde z_3(0)\neq 0$. В связи с этим можно ввести в рассмотрение координаты y_1, …, y_n, задаваемые соотношениями

$$y_1=\tilde z_1,\quad y_2=\tilde z_2,\quad y_3=\mu(\tilde z),\quad y_i=\tilde z_i,\quad i=\overline{4,n}.$$

В координатах y_1, …, y_n распределение $\mathcal{P}_{n-3}$ примет вид

$$\mathcal{P}_{n-3}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{y_3},\ldots,\partial_{y_n}\}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{\tilde f\},\tag{22}$$

где векторное поле $\tilde f$ удовлетворяет сравнению

$$\tilde f=y_2\partial_{y_1}+y_3\partial_{y_2} \bmod \{\partial_{y_3},\ldots,\partial_{y_n}\}.\tag{23}$$

Покажем теперь, что для распределения $\mathcal{P}_{n-4}$ выполнено включение

$$\mathcal{P}_{n-4}\subset\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{y_4},\ldots,\partial_{y_n}\}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{\tilde f\}.\tag{24}$$

Будем следовать рассуждениям, предложенным в работе [19]. Предположим, что включение (24) является неверным. Тогда найдётся векторное поле $q\in\mathcal{P}_{n-4}$ такое, что

$$q\notin \operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{y_4},\ldots,\partial_{y_n}\}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{\tilde f\}.$$

Так как $q\in\mathcal{P}_{n-4}\subset\mathcal{P}_{n-3}$, то векторное поле q удовлетворяет сравнению

$$q=\nu\partial_{y_3} \bmod \{\partial_{y_4},\ldots,\partial_{y_n},\tilde f\},$$

где ν — гладкая функция, не равная тождественно нулю. Из указанного сравнения и соотношения (23) вытекает, что $[q,\tilde f]=[\nu\partial_{y_3}, y_2\partial_{y_1}+y_3\partial_{y_2}] \bmod \mathcal{P}_{n-3}$. Следовательно, $[q,\tilde f]=$ $=\nu[\partial_{y_3}, y_2\partial_{y_1}+y_3\partial_{y_2}] \bmod \mathcal{P}_{n-3}$ или, что то же самое, $[q,\tilde f]=\nu\partial_{y_2} \bmod \mathcal{P}_{n-3}$. Поскольку $[q,\tilde f]\in$ $\in\mathcal{P}_{n-3}$ и функция ν отлична от тождественного нуля, полученное сравнение является противоречием. Таким образом, имеет место включение (24).

Как следует из соотношения (23), векторное поле $\tilde f$ удовлетворяет сравнению

$$\tilde f=y_2\partial_{y_1}+y_3\partial_{y_2}+\tilde\mu\partial_{y_3} \bmod \{\partial_{y_4},\ldots,\partial_{y_n}\}, \tag{25}$$

где $\tilde\mu$ — некоторая гладкая функция. Отметим, что из равенства $\tilde f(0)=0$ вытекает, что $\tilde\mu(0)=0$. Покажем, что найдётся номер $i\in\{4,\ldots,n\}$ такой, что $\partial\tilde\mu/\partial y_i(0)\neq 0$. Предположим противное. Из соотношения (24) следует, что распределение $\mathcal{P}_{n-3}$ удовлетворяет включению

$$\mathcal{P}_{n-3}\subset \operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{y_4},\ldots,\partial_{y_n}\}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{\tilde f\}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{[\partial_{y_4},\tilde f],\ldots,[\partial_{y_n},\tilde f]\}.$$

Поскольку имеет место сравнение (25), это включение принимает вид

$$\mathcal{P}_{n-3}\subset \operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{y_4},\ldots,\partial_{y_n}\}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{\tilde f\}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{(\partial\tilde\mu/\partial y_4)\partial_{y_3},\ldots,(\partial\tilde\mu/\partial y_n)\partial_{y_3}\}.$$

Из сравнения (25) и сделанного предположения получаем $\mathcal{P}_{n-3}(0)\subset\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{y_4},\ldots,\partial_{y_n}\}(0)$, а это противоречит равенству (22). Таким образом, существует номер $i\in\{4,\ldots,n\}$ такой, что $\partial\tilde\mu/\partial y_i(0)\neq 0$. Не ограничивая общности, считаем, что $\partial\tilde\mu/\partial y_4(0)\neq 0$.

Введём новые координаты $\tilde y_1, \ldots, \tilde y_n$ по формулам

$$\tilde y_1=y_1,\quad \tilde y_2=y_2,\quad \tilde y_3=y_3,\quad \tilde y_4=\tilde\mu(y),\quad \tilde y_i=y_i,\quad i=\overline{5,n}.$$

В координатах $\tilde y_1, \ldots, \tilde y_n$ распределение из правой части включения (24) принимает вид

$$\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{\tilde y_4},\ldots,\partial_{\tilde y_n}\}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{\tilde f\},$$

где векторное поле $\tilde f$, как следует из соотношения (25), удовлетворяет сравнению

$$\tilde f=\tilde y_2\partial_{\tilde y_1}+\tilde y_3\partial_{\tilde y_2}+\tilde y_4\partial_{\tilde y_3} \bmod \{\partial_{\tilde y_4},\ldots,\partial_{\tilde y_n}\}.$$

Возвращаясь для упрощения записи к обозначениям $y_1, \ldots, y_n$ вместо $\tilde y_1, \ldots, \tilde y_n$, можем утверждать, что доказано существование координат $y_1, \ldots, y_n$, в которых распределение $\mathcal{P}_{n-4}$ удовлетворяет включению (24), где для векторного поля $\tilde f$ имеет место сравнение $\tilde f=y_2\partial_{y_1}+y_3\partial_{y_2}+y_4\partial_{y_3} \bmod \{\partial_{y_4},\ldots,\partial_{y_n}\}$. Из приведённых выкладок следует, что распределение $\mathcal{P}_{n-3}$ описывается в новых координатах тем же самым выражением (22).

Покажем, что в распределении $\mathcal{P}_{n-4}$ содержится векторное поле κ_4, удовлетворяющее сравнению

$$\kappa_4=r_4\partial_{y_4} \bmod \{\partial_{y_5},\ldots,\partial_{y_n}, y_2\partial_{y_1}+y_3\partial_{y_2}+y_4\partial_{y_3}\}, \tag{26}$$

где r_4 — гладкая функция, для которой выполнено условие $r_4(0)\neq 0$. Выберем два произвольных векторных поля η_1 и η_2, содержащихся в распределении $\mathcal{P}_{n-4}$. Согласно включению (24) они удовлетворяют равенствам

$$\eta_i=\sum_{j=4}^{n}\lambda_{ij}\partial_{y_j}+\lambda_{if}(y_2\partial_{y_1}+y_3\partial_{y_2}+y_4\partial_{y_3}),\quad i=1,2,$$

где λ_{ij}, λ_{if} — некоторые гладкие функции, $i=1,2$, $j=\overline{4,n}$. Коммутатор векторных полей η_1 и η_2 имеет вид

$$[\eta_1,\eta_2]=\left[\sum_{j=4}^{n}\lambda_{1j}\partial_{y_j}+\lambda_{1f}(y_2\partial_{y_1}+y_3\partial_{y_2}+y_4\partial_{y_3}),\sum_{j=4}^{n}\lambda_{2j}\partial_{y_j}+\lambda_{2f}(y_2\partial_{y_1}+y_3\partial_{y_2}+y_4\partial_{y_3})\right]$$

и содержится в распределении $\mathcal{P}_{n-3}$. Нетрудно видеть, что $[\eta_1,\eta_2]=(\lambda_{14}\lambda_{2f}-\lambda_{1f}\lambda_{24})\partial_{y_3}+K$, где через K обозначено векторное поле, являющееся гладкой комбинацией векторных полей $\partial_{y_4},\ldots,\partial_{y_n}$, $\lambda\partial_{y_3}$, а λ — гладкая функция такая, что $\lambda(0)=0$. Если доказываемое утверждение неверно, то при любом выборе векторных полей η_1 и η_2 выполнены равенства $\lambda_{14}(0)=$ $=\lambda_{24}(0)=0$. Следовательно, какими бы ни были η_1 и η_2, коэффициент при ∂_{y_3} в коммутаторе $[\eta_1,\eta_2]$ равен нулю в точке $y=0$. Полученный результат является противоречием, так как векторное поле ∂_{y_3} принадлежит распределению $\mathcal{P}_{n-3}$. Таким образом, в распределении $\mathcal{P}_{n-4}$ содержится векторное поле κ_4, удовлетворяющее сравнению (26), в котором $r_4(0)\neq 0$.

Продолжая аналогичные рассуждения, нетрудно убедиться, что для всех $k=\overline{5,n}$ найдутся координаты, в которых распределение $\mathcal{P}_{n-k}$ удовлетворяет включению

$$\mathcal{P}_{n-k}\subset\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{y_k},\ldots,\partial_{y_n}\}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{\tilde f\},$$

где для векторного поля $\tilde f$ выполнено сравнение $\tilde f=y_2\partial_{y_1}+\cdots+y_k\partial_{y_{k-1}} \bmod \{\partial_{y_k},\ldots,\partial_{y_n}\}$, причём в распределении $\mathcal{P}_{n-k}$ содержится векторное поле κ_k, удовлетворяющее сравнению $\kappa_k=r_k\partial_{y_k} \bmod \{\partial_{y_{k+1}},\ldots,\partial_{y_n},y_2\partial_{y_1}+\cdots+y_k\partial_{y_{k-1}}\}$, в котором r_k — гладкая функция такая, что $r_k(0)\neq 0$.

В частности, для $k=n$ получим, что существуют координаты $y_1,\ \ldots,\ y_n$, в которых для распределения $\mathcal{P}$ имеет место включение

$$\mathcal{P}\subset\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{y_n}\}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{\tilde f\},\tag{27}$$

причём векторное поле $\tilde f$ удовлетворяет сравнению $\tilde f=y_2\partial_{y_1}+\cdots+y_n\partial_{y_{n-1}} \bmod \{\partial_{y_n}\}$. Так как $\tilde f(0)=0$ и $\dim\mathcal{P}(0)=1$, то, очевидно, $\partial_{y_n}\in\mathcal{P}$. Следовательно, включение (27) является равенством:

$$\mathcal{P}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{y_n}\}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{\tilde f\}.\tag{28}$$

Интерпретация равенства (28) заключается в том, что в координатах $y_1,\ \ldots,\ y_n$ система Σ принимает вид

$$\tilde\Sigma:\quad \dot y=\tilde f_0(y)+\tilde f_1(y)u,$$

где векторные поля $\tilde f_0$ и $\tilde f_1$ удовлетворяют равенству

$$\begin{pmatrix}\tilde f_0\\ \tilde f_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde\alpha_{00}(y) & \tilde\alpha_{01}(y)\\ \tilde\alpha_{10}(y) & \tilde\alpha_{11}(y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_2\partial_{y_1}+\cdots+y_n\partial_{y_{n-1}}\\ \partial_{y_n}\end{pmatrix},$$

а $\tilde{A}=(\tilde{\alpha}_{ij})_{i,j=0,1}$ — невырожденная гладкая матрица. Очевидно, система $\tilde{\Sigma}$ образована уравнениями

$$\tilde{\Sigma}:\quad \dot{y}_1=y_2(\tilde{\alpha}_{00}(y)+\tilde{\alpha}_{10}(y)u),\quad \ldots,\quad \dot{y}_{n-1}=y_n(\tilde{\alpha}_{00}(y)+\tilde{\alpha}_{10}(y)u),\quad \dot{y}_n=\tilde{\alpha}_{01}(y)+\tilde{\alpha}_{11}(y)u.$$

Несложно заметить, что масштабированием времени $\dot{\tau}=\tilde{\alpha}_{00}(y)+\tilde{\alpha}_{10}(y)u$ и заменой управления $v=(\tilde{\alpha}_{01}(y)+\tilde{\alpha}_{11}(y)u)/(\tilde{\alpha}_{00}(y)+\tilde{\alpha}_{10}(y)u)$ система $\tilde{\Sigma}$ преобразуется в линейную управляемую систему Σ_{lin}.

Необходимость. Из A-орбитальной эквивалентности систем Σ и Σ_{lin} в паре точек $(0,0)$ вытекает существование замены состояния $y=y(x)$, преобразующей систему Σ в систему $\tilde{\Sigma}$. Распределение $\mathcal{P}$, ассоциированное с системой $\tilde{\Sigma}$, имеет вид $\mathcal{P}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{y_2\partial_{y_1}+\cdots+y_n\partial_{y_{n-1}},\partial_{y_n}\}$. Производный флаг распределения $\mathcal{P}$ описывается соотношениями

$$\mathcal{P}_0=\mathcal{P},\quad \mathcal{P}_k=\operatorname{span}_{C^\infty}\{y_2\partial_{y_1}+\cdots+y_{n-k}\partial_{y_{n-k-1}},\partial_{y_{n-k}},\ldots,\partial_{y_n}\},\quad k=\overline{1,n-2},$$
$$\mathcal{P}_{n-1}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{y_1},\ldots,\partial_{y_n}\}.$$

Отсюда следует, что $\dim\mathcal{P}(0)=1$ и $\dim\mathcal{P}_{n-2}(0)=n-1$.

Для распределения $\mathcal{P}_{n-3}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{y_2\partial_{y_1}+y_3\partial_{y_2},\partial_{y_3},\ldots,\partial_{y_n}\}$ характеристическое распределение имеет вид $\mathcal{C}_{n-3}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{y_4},\ldots,\partial_{y_n}\}$. Очевидно, $\operatorname{rank}\mathcal{C}_{n-3}=n-3$ и распределение $\mathcal{C}_{n-3}$ содержит векторное поле ∂_{y_n}, принадлежащее распределению $\mathcal{P}$ и не обращающееся в нуль в начале координат. Распределение $\mathcal{P}_{n-3}$ представимо в виде $\mathcal{P}_{n-3}=$ $=\mathcal{C}_{n-3}+\mathcal{P}+\operatorname{span}_{C^\infty}\{g\}$, где $g=\partial_{y_3}$. Наконец, $\mathcal{P}_{n-2}+[\mathcal{P},\mathcal{P}_{n-2}]=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{y_1},\partial_{y_2},\ldots,\partial_{y_n}\}$, откуда следует выполнение условия 5) теоремы. Теорема доказана.

5. АЛГОРИТМ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Из доказательства достаточности в теореме 2 вытекает алгоритм, позволяющий при выполнении условий теоремы преобразовать систему Σ в линейную управляемую систему Σ_{lin}, ограниченную на некоторую окрестность начала координат. Приведём этот алгоритм. Пусть производный флаг распределения $\mathcal{P}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{f_0,f_1\}$ образован распределениями $\mathcal{P}_k$, $k=0,1,2,\ldots$, и удовлетворяет условиям теоремы 2. Как показано в доказательстве теоремы 2, при выполнении её условий распределение $\mathcal{P}$ можно представить в виде $\mathcal{P}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{f_{\mathrm{char}},f\}$, где $f_{\mathrm{char}}\in\mathcal{C}_{n-3}$, $f_{\mathrm{char}}(0)\neq 0$, а $f(0)=0$. Полагаем далее, что такое представление найдено. Предлагаемый алгоритм состоит из пяти этапов.

Этап 1. Найдём полную систему $\zeta_1=\zeta_1(x)$, $\zeta_2=\zeta_2(x)$, $\zeta_3=\zeta_3(x)$ независимых интегралов характеристического распределения $\mathcal{C}_{n-3}$. Дополним ζ_1, ζ_2, ζ_3 произвольными функциями ζ_4, $\ldots$, ζ_n такими, что ζ_1, $\ldots$, ζ_n независимы в окрестности начала координат. Пусть каждая из функций ζ_i выбрана так, что выполняются равенства $\zeta_i(0)=0$, $i=\overline{1,n}$. Пусть g — векторное поле, удовлетворяющее условию 3) теоремы 2. Не ограничивая общности, можем считать, что $g=\partial_{\zeta_3}+\gamma_{11}\partial_{\zeta_1}+\gamma_{12}\partial_{\zeta_2}$, где γ_{11}, γ_{12} — некоторые гладкие функции. Разложим векторное поле f в гладкую комбинацию базисных полей ∂_{ζ_1}, ∂_{ζ_2}, g, ∂_{ζ_4}, $\ldots$, ∂_{ζ_n}. Пусть это разложение имеет вид $f=\xi \bmod \{g,\partial_{\zeta_4},\ldots,\partial_{\zeta_n}\}$, где $\xi=\gamma_{01}\partial_{\zeta_1}+\gamma_{02}\partial_{\zeta_2}$, а γ_{01} и γ_{02} — гладкие функции такие, что $\gamma_{01}(0)=\gamma_{02}(0)=0$. В доказательстве теоремы 2 показано, что распределения $\mathcal{P}_{n-3}$ и $\mathcal{P}_{n-2}$ задаются соотношениями $\mathcal{P}_{n-3}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{\zeta_4},\ldots,\partial_{\zeta_n},g,\xi\}$, $\mathcal{P}_{n-2}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{\zeta_4},\ldots,\partial_{\zeta_n},g,\xi,[g,\xi]\}$. Составим уравнение гиперповерхности $S=\{\zeta\in\mathbb{R}^n\colon \dim\mathcal{P}_{n-2}(\zeta)<n\}$. Как показано в доказательстве теоремы 2, это уравнение имеет вид $\zeta_i=\psi(\zeta_k,\zeta_3)$, где ψ — гладкая функция такая, что $\psi(0,0)=0$, $i,k\in\{1,2\}$, $i\neq k$.

Этап 2. Если векторные поля g и ξ не зависят от $\zeta_4, \ldots, \zeta_n$, то полагаем $\hat{g}=g$, $\hat{\xi}=\xi$ и переходим к этапу 3. В противном случае в соотношении $[g,\xi]=\delta_1\partial_{\zeta_1}+\delta_2\partial_{\zeta_2}$ определяем, какая из функций δ_k, $k\in\{1,2\}$, отлична от нуля в начале координат. Из условий теоремы 2 вытекает, что такая функция существует. Не ограничивая общности, будем полагать, что $\delta_2(0)\neq 0$. Введём обозначение $\delta=\delta_1/\delta_2$. В доказательстве теоремы 2 показано, что имеют место равенства $(\gamma_{01}-\delta\gamma_{02})|_S=0$, $(\partial(\gamma_{11}-\delta\gamma_{12})/\partial\zeta_j)|_S=0$, $(\partial\delta/\partial\zeta_j)|_S=0$, $j=\overline{4,n}$. Согласно леммам 1 и 2 функции $\gamma_{01}-\delta\gamma_{02}$, $\gamma_{11}-\delta\gamma_{12}$, δ представимы в виде

$$\gamma_{01}-\delta\gamma_{02}=(\zeta_i-\psi(\zeta_k,\zeta_3))C(\zeta),$$

$$\gamma_{11}-\delta\gamma_{12}=(\zeta_i-\psi(\zeta_k,\zeta_3))H(\zeta)+\varphi(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3), \quad \delta=(\zeta_i-\psi(\zeta_k,\zeta_3))\hat{H}(\zeta)+\hat{\varphi}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3), \tag{29}$$

где C, H, $\hat{H}$, φ, $\hat{\varphi}$ — гладкие функции, причём $C(0)\neq 0$. Отметим, что способ нахождения представлений (29) приведён в доказательстве леммы 2. Как показано в доказательстве теоремы 2, векторные поля $\hat{g}=g-(h/c)\xi$ и $\hat{\xi}=\xi/c$, где $h=H+\gamma_{12}\hat{H}$, $c=C+\gamma_{02}\hat{H}$, не зависят от $\zeta_4, \ldots, \zeta_n$.

Этап 3. Заменив в распределении $\mathcal{P}_{n-3}$ образующие g, ξ на $\hat{g}$, $\hat{\xi}$, запишем $\mathcal{P}_{n-3}$ в виде $\mathcal{P}_{n-3}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{\zeta_4},\ldots,\partial_{\zeta_n},\hat{g},\hat{\xi}\}$. Как показано в доказательстве теоремы 2, имеет место представление $[\hat{g},[\hat{g},\hat{\xi}]]=b[\hat{\xi},[\hat{g},\hat{\xi}]] \bmod \mathcal{P}_{n-2}$, где b — гладкая функция, которая всегда может быть выбрана зависящей только от ζ_1, ζ_2, ζ_3. Составим векторное поле $\hat{g}-b(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\hat{\xi}$ и выпрямим его, т.е. совершим такое преобразование координат

$$z_1=\phi_1(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3), \quad z_2=\phi_2(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3), \quad z_j=\zeta_j, \quad j=\overline{3,n},$$

что векторное поле $\hat{g}-b(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\hat{\xi}$ запишется в этих координатах как ∂_{z_3}.

Этап 4. В координатах $z_1, \ldots, z_n$ распределение $\mathcal{P}_{n-3}$ примет вид

$$\mathcal{P}_{n-3}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{z_3},\partial_{z_4},\ldots,\partial_{z_n},\sigma_{01}(z_1,z_2,z_3)\partial_{z_1}+\sigma_{02}(z_1,z_2,z_3)\partial_{z_2}\},$$

где σ_{01} и σ_{02} — некоторые гладкие функции такие, что $\sigma_{01}(0)=0$, $\sigma_{02}(0)=0$. Обозначим $\sigma_{11}=\partial\sigma_{01}/\partial z_3$, $\sigma_{12}=\partial\sigma_{02}/\partial z_3$, $\sigma=(\sigma_{lm})_{l=0,1;\, m=1,2}$. Как показано в доказательстве теоремы 2, существует номер $m\in\{1,2\}$ такой, что $\sigma_{1m}(0)\neq 0$ и $\partial(\det\sigma)/\partial z_m(0)\neq 0$. Не ограничивая общности, будем полагать, что $m=2$. Тогда уравнение гиперповерхности S можно записать в виде $z_2=\tilde{\psi}(z_1)$, где $\tilde{\psi}$ — гладкая функция такая, что $\tilde{\psi}(0)=0$. Как показано в доказательстве теоремы 2, имеет место равенство $\partial(\sigma_{11}/\sigma_{12})/\partial z_3=(z_2-\tilde{\psi}(z_1))M$, где M — некоторая гладкая функция. Проинтегрировав это равенство по z_3, придём к соотношению $\sigma_{11}/\sigma_{12}=(z_2-\tilde{\psi}(z_1))\tilde{M}+N(z_1,z_2)$, где $\tilde{M}$ и N — некоторые гладкие функции. Выпрямим векторное поле $\partial_{z_2}+N(z_1,z_2)\partial_{z_1}$, т.е. выполним такое преобразование координат

$$\hat{z}_1=\theta(z_1,z_2), \quad \hat{z}_j=z_j, \quad j=\overline{2,n},$$

что в новых координатах векторное поле $\partial_{z_2}+N(z_1,z_2)\partial_{z_1}$ примет вид $\partial_{\hat{z}_2}$.

Этап 5. Положим

$$y_1=\theta(z_1,z_2)|_{z_i=\phi_i(\zeta_1(x),\zeta_2(x),\zeta_3(x)),\, i=1,2}, \quad y_2=(z_2-\tilde{\psi}(z_1))|_{z_i=\phi_i(\zeta_1(x),\zeta_2(x),\zeta_3(x)),\, i=1,2}$$

и вычислим производную $\dot{y}_1$ функции y_1 в силу системы Σ. Как показано в доказательстве теоремы 2, существуют гладкие функции α_{00} и α_{01} такие, что $\dot{y}_1=(\alpha_{00}(x)+\alpha_{01}(x)u)y_2$. Поскольку y_1 и y_2 известны, из этого соотношения могут быть определены функции α_{00} и α_{01}. Далее для $k=\overline{2,n-1}$ последовательно вычисляем $\dot{y}_k$ и из равенства $\dot{y}_k=(\alpha_{00}(x)+\alpha_{01}(x)u)y_{k+1}$, которое, как показано в доказательстве теоремы 2, имеет место, определяем функцию y_{k+1}. Из доказательства теоремы 2 вытекает, что все функции $y_3, \ldots, y_n$ являются гладкими в окрестности начала координат. Пусть производная функции $\dot{y}_n$ в силу системы Σ задаётся соотношением $\dot{y}_n = \alpha_{10}(x) + \alpha_{11}(x)u$. Тогда линеаризующие замены состояния и управления, а также линеаризующее масштабирование времени описываются выражениями

$$y = y(x), \quad v = (\alpha_{10}(x) + \alpha_{11}(x)u)/(\alpha_{00}(x) + \alpha_{01}(x)u), \quad \dot{\tau} = \alpha_{00}(x) + \alpha_{01}(x)u.$$

6. ПРИМЕР

Рассмотрим в качестве примера четырёхмерную систему

$$\Sigma_{\text{ex}}: \quad \dot{x}_1 = x_3 + x_3^2 u, \quad \dot{x}_2 = x_4 + x_1^3 + 2x_1x_3 + (x_3x_4 + x_3x_1^3 + 2x_1x_3^2)u,$$
$$\dot{x}_3 = u, \quad \dot{x}_4 = x_1 - 3x_1^2x_3 + (x_1x_3 - 3x_1^2x_3^2)u,$$

где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ — состояние, $u \in \mathbb{R}$ — управление. Покажем, используя теорему 2, что система Σ_{ex} и система

$$\Sigma_{\text{lin},4}: \quad y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3, \quad y_3' = y_4, \quad y_4' = v$$

A-орбитально эквивалентны по обратной связи и состоянию в паре точек $(0,0)$. Системе Σ_{ex} соответствуют векторные поля

$$f_0 = x_3\partial_{x_1} + (x_4 + x_1^3 + 2x_1x_3)\partial_{x_2} + (x_1 - 3x_1^2x_3)\partial_{x_4},$$
$$f_1 = x_3^2\partial_{x_1} + (x_3x_4 + x_3x_1^3 + 2x_1x_3^2)\partial_{x_2} + \partial_{x_3} + (x_1x_3 - 3x_1^2x_3^2)\partial_{x_4}$$

и распределение $\mathcal{P} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{f_0, f_1\}$. Построим производный флаг распределения $\mathcal{P}$. Непосредственные вычисления показывают, что он образован распределениями

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}, \quad \mathcal{P}_1 = \operatorname{span}_{C^\infty}\{f_0, f_1, \operatorname{ad}_{f_0} f_1\}, \quad \mathcal{P}_2 = \operatorname{span}_{C^\infty}\{f_0, f_1, \operatorname{ad}_{f_0} f_1, \operatorname{ad}_{f_0}^2 f_1\}, \quad \mathcal{P}_3 = \mathcal{T}(\mathbb{R}^4),$$

где $\operatorname{ad}_{f_0} f_1 = -\partial_{x_1} - 2x_1\partial_{x_2} + 3x_1^2\partial_{x_4}$, $\operatorname{ad}_{f_0}^2 f_1 = \partial_{x_4}$. Легко видеть, что $\dim \mathcal{P}(0) = 1$ и $\dim \mathcal{P}_2(0) = 3$. Следовательно, условия 1) и 4) теоремы 2 выполнены. Нетрудно проверить, что характеристическое распределение распределения $\mathcal{P}_1$ имеет вид $\mathcal{C}_1 = \operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{x_3}\}$. Очевидно, $\operatorname{rank} \mathcal{C}_1 = 1$. Так как $\partial_{x_3} = f_1 - x_3 f_0$, то $\mathcal{C}_1$ содержит векторное поле $f_{\text{char}} = \partial_{x_3}$, принадлежащее $\mathcal{P}$ и не обращающееся в нуль в начале координат. Таким образом, условие 2) теоремы 2 также выполнено. Распределение $\mathcal{P}_1$ представимо в виде $\mathcal{P}_1 = \mathcal{C}_1 + \operatorname{span}_{C^\infty}\{g\} + \mathcal{P}$, где векторное поле g задаётся, к примеру, выражением $g = -\operatorname{ad}_{f_0} f_1$. Отсюда вытекает, что выполнено условие 3) теоремы 2. Наконец, распределение $\mathcal{P}_2 + [\mathcal{P}, \mathcal{P}_2]$ имеет вид $\mathcal{P}_2 + \operatorname{span}_{C^\infty}\{[f_0, \operatorname{ad}_{f_0}^2 f_1]\} = \mathcal{P}_3$, и, следовательно, равенство $\dim(\mathcal{P}_2 + [\mathcal{P}, \mathcal{P}_2])(0) = 4$ также выполнено. Таким образом, согласно теореме 2 системы Σ_{ex} и $\Sigma_{\text{lin},4}$ A-орбитально эквивалентны по обратной связи и состоянию в паре точек $(0,0)$. Одновременно отметим, что распределение $\mathcal{P}$ можно представить в виде $\mathcal{P} = \operatorname{span}_{C^\infty}\{f_{\text{char}}, f\}$, где $f = f_0$, $f(0) = 0$. Построим линеаризующие преобразования, выполнив следующие пять этапов.

Этап 1. Полная система независимых интегралов характеристического распределения $\mathcal{C}_1$ образована функциями $\zeta_1 = x_2$, $\zeta_2 = x_4$, $\zeta_3 = x_1$. Дополним их функцией $\zeta_4 = x_3$ до системы из четырёх независимых функций. Векторные поля g и f в координатах $\zeta_1, \ldots, \zeta_4$ примут вид

$$g = \partial_{\zeta_3} + 2\zeta_3\partial_{\zeta_1} - 3\zeta_3^2\partial_{\zeta_2}, \quad f = (\zeta_2 + \zeta_3^3 + 2\zeta_3\zeta_4)\partial_{\zeta_1} + (\zeta_3 - 3\zeta_3^2\zeta_4)\partial_{\zeta_2} + \zeta_4\partial_{\zeta_3}.$$

Раскладывая векторное поле f в гладкую комбинацию базисных векторных полей ∂_{ζ_1}, ∂_{ζ_2}, g, ∂_{ζ_4}, получаем сравнение $f=\xi \bmod \{\partial_{\zeta_4}, g\}$, где $\xi=(\zeta_2+\zeta_3^3)\partial_{\zeta_1}+\zeta_3\partial_{\zeta_2}$. Поскольку распределения $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ в координатах $\zeta_1, \ldots, \zeta_4$ имеют вид

$$\mathcal{P}_1=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{\zeta_4}, g, \xi\},$$

$$\mathcal{P}_2=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{\zeta_4}, g, \xi, [g,\xi]\}=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{\zeta_4}, \partial_{\zeta_3}+2\zeta_3\partial_{\zeta_1}, (\zeta_2+\zeta_3^3)\partial_{\zeta_1}, \partial_{\zeta_2}\},$$

то гиперповерхность S, образованная всеми такими точками ζ, в которых $\dim\mathcal{P}_2(\zeta)<4$, описывается уравнением $\zeta_2+\zeta_3^3=0$.

Этап 2. Векторные поля g и ξ не зависят от ζ_4, поэтому полагаем $\hat{g}=g$, $\hat{\xi}=\xi$.

Этап 3. Непосредственные вычисления показывают, что $[\hat{\xi},[\hat{g},\hat{\xi}]]=-\partial_{\zeta_1}$, $[\hat{g},[\hat{g},\hat{\xi}]]=0$, поэтому в представлении $[\hat{g},[\hat{g},\hat{\xi}]]=b[\hat{\xi},[\hat{g},\hat{\xi}]] \bmod \mathcal{P}_2$ функция b может быть выбрана тождественно равной нулю, и выпрямляющий диффеоморфизм необходимо подобрать для векторного поля $\hat{g}$. Применяя алгоритм, изложенный в [18, с. 228], найдём координаты

$$z_1=\zeta_1-\zeta_3^2,\quad z_2=\zeta_2+\zeta_3^3,\quad z_3=\zeta_3,\quad z_4=\zeta_4,$$

в которых векторное поле $\hat{g}$ принимает вид ∂_{z_3}.

Этап 4. В координатах $z_1, \ldots, z_4$ распределение $\mathcal{P}_1$ имеет вид

$$\mathcal{P}_1=\operatorname{span}_{C^\infty}\{\partial_{z_3}, \partial_{z_4}, \sigma_{01}\partial_{z_1}+\sigma_{02}\partial_{z_2}\},$$

где $\sigma_{01}(z)=z_2$, $\sigma_{02}(z)=z_3$. Очевидно, $\sigma_{11}=\partial\sigma_{01}/\partial z_3=0$, $\sigma_{12}=\partial\sigma_{02}/\partial z_3=1$ и $\det\sigma(z)=z_2$. Гиперповерхность S в координатах $z_1, \ldots, z_4$ описывается уравнением $z_2=0$. Следовательно, имеет место случай $\sigma_{12}(0)\neq 0$, $\partial(\det\sigma)/\partial z_2(0)\neq 0$. Поскольку $\sigma_{11}/\sigma_{12}=0$, то в представлении $\sigma_{11}/\sigma_{12}=z_2\tilde{M}(z)+N(z_1,z_2)$ обе функции — и $\tilde{M}$, и N — могут быть выбраны тождественно равными нулю: $\tilde{M}=0$, $N=0$. Векторное поле $\partial_{z_2}+N(z_1,z_2)\partial_{z_1}=\partial_{z_2}$, таким образом, не нуждается в выпрямлении, и можем полагать, что выпрямляющий диффеоморфизм является тождественным отображением $\hat{z}_j=z_j$, $j=\overline{1,n}$.

Этап 5. Положим

$$y_1=z_1=\zeta_1-\zeta_3^2=x_2-x_1^2,\quad y_2=z_2=\zeta_2+\zeta_3^3=x_4+x_1^3.$$

Вычислим $\dot{y}_1=(1+x_3u)(x_4+x_1^3)=(1+x_3u)y_2$ и определим из этого равенства функции α_{00} и α_{01}: $\alpha_{00}=1$, $\alpha_{01}(x)=x_3$. Поскольку $\dot{y}_2=(1+x_3u)x_1$, то $y_3=x_1$. Так как $\dot{y}_3=(1+x_3u)x_3$, то $y_4=x_3$. Из равенства $\dot{y}_4=u$ вытекает, что линеаризующее преобразование системы Σ_{ex} в систему $\Sigma_{\mathrm{lin},4}$ имеет вид

$$y_1=x_2-x_1^2,\quad y_2=x_4+x_1^3,\quad y_3=x_1,\quad y_4=x_3,\quad v=u/(1+x_3u),\quad \dot{\tau}=1+x_3u.$$

Отметим, что система Σ_{ex} не линеаризуема орбитально. Действительно, рассмотрим последовательность распределений $\mathcal{F}_i=\operatorname{span}_{C^\infty}\{f_0, f_1, \operatorname{ad}_{f_0} f_1, \ldots, \operatorname{ad}_{f_0}^{i-1} f_1\}$, $i\in\mathbb{N}$. Проверка условия 2) теоремы 1, как нетрудно видеть, состоит в проверке выполнения условия $[f_1, \operatorname{ad}_{f_0} f_1]\in \operatorname{span}_{C^\infty}\{f_0, f_1, \operatorname{ad}_{f_0} f_1\}$. Вместе с тем вычисления показывают, что $[f_1, \operatorname{ad}_{f_0} f_1]=x_3 \operatorname{ad}_{f_0}^2 f_1\notin \mathcal{F}_2$. Следовательно, система Σ_{ex} не линеаризуема орбитально.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дальнейшие исследования особенностей A-орбитальной линеаризации могут быть нацелены на рассмотрение других особенностей, возникающих в случаях, когда аффинная система с одним управлением A-орбитально эквивалентна по обратной связи и состоянию линейной управляемой системе Σ_{lin} в паре точек $(0, y_0)$, где $y_0 \neq 0$, но $y_{02} = 0$. Представляется также интересным обобщить полученные в настоящей работе результаты на системы с векторным управлением.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brockett, R.W. Feedback invariants for nonlinear systems / R.W. Brockett // Proc. of the 1978 IFAC Congress, Helsinki, Finland. — Oxford : Pergamon Press, 1978. — P. 1115–1120.
2. Jakubczyk, B. On linearization of control systems / B. Jakubczyk, W. Respondek // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. — 1980. — V. 28. — P. 517–522.
3. Hunt, L.R. Linear equivalents of nonlinear time-varying systems / L.R. Hunt, R. Su // Proc. of the MTNS. — 1981. — P. 119–123.
4. Sampei, M. On time scaling for nonlinear systems: application to linearization / M. Sampei, K. Furuta // IEEE Trans. Automatic Control. — 1986. — V. 31. — P. 459–462.
5. Respondek, W. Orbital feedback linearization of single-input nonlinear control systems / W. Respondek // Proc. of the IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems. — 1998. — P. 483–488.
6. Guay, M. An algorithm for orbital feedback linearization of single-input control affine systems / M. Guay // Systems and Control Letters. — 1999. — V. 38, № 4–5. — P. 271–281.
7. Li, S.-J. Orbital feedback linearization for multi-input control systems / S.-J. Li, W. Respondek // Int. J. Robust and Nonlinear Control. — 2015. — V. 25. — P. 1352–1378.
8. A Lie–Backlund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems / M. Fliess, J. Levine, P. Martin, P. Rouchon // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1999. — V. 44, № 5. — P. 922–937.
9. Фетисов, Д.А. Линеаризация аффинных систем на основе замен независимой переменной, зависящих от управления / Д.А. Фетисов // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 11. — С. 1514–1525.
10. Fetisov, D.A. A-orbital feedback linearization of multiinput control affine systems / D.A. Fetisov // Int. J. Robust and Nonlin. Control. — 2020. — V. 30, № 14. — P. 5602–5627.
11. Фетисов, Д.А. A-орбитальная линеаризация аффинных систем / Д.А. Фетисов // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 11. — С. 1518–1532.
12. Fetisov, D.A. On some approaches to linearization of affine systems / D.A. Fetisov // IFAC-PapersOnline. — 2019. — V. 52, № 16. — P. 700–705.
13. Фетисов, Д.А. Об A-орбитальной линеаризации трехмерных аффинных систем с одним управлением / Д.А. Фетисов // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 4. — С. 519–533.
14. Jakubczyk, B. Singularities of k-Tuples of Vector Fields. Dissertationes Mathematicae / B. Jakubczyk, M. Przytycki. — Warsaw : Panstwowe wydawnictwo naukowe, 1984. — 64 p.
15. Jakubczyk, B. Singularities and normal forms of generic 2-distributions on 3-manifolds / B. Jakubczyk, M. Zhitomirskii // Studia Math. — 1995. — V. 113. — P. 223–248.
16. Remizov, A.O. A Brief Introduction to Singularity Theory. Lecture Notes / A.O. Remizov. — Trieste : SISSA, 2010. — 50 p.
17. Gstottner, C. Necessary and sufficient conditions for the linearisability of two-input systems by a two-dimensional endogenous dynamic feedback / C. Gstottner, B. Kolar, M. Schoberl // Int. J. Control. — 2023. — V. 96, № 3. — P. 800–821.
18. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учеб. пособие для вузов / В.И. Арнольд. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1984.
19. Respondek, W. Canonical contact systems for curves: a survey / W. Respondek, W. Pasillas-Lepine // Contemporary Trends in Geometric Control Theory and Applications / Eds. A. Anzaldo-Meneses, F. Monroy-Pérez, B. Bonnard, J.P. Gauthier. — Singapore : World Scientific, 2001. — P. 77–112.

ON SINGULARITIES OF A-ORBITAL FEEDBACK LINEARIZATION OF SINGLE-INPUT AFFINE CONTROL SYSTEMS

© 2025 / D. A. Fetisov

Bauman Moscow State Technical University, Russia
e-mail: dfetisov@yandex.ru

For single-input affine control systems, we address the problem of A-orbital feedback linearization around singular points of the derived flag of the distribution associated with the control system. By a singular point of a derived flag we mean a point such that at least one of the elements of the derived flag in any neighborhood of this point is not a distribution of constant rank. We prove a local necessary and sufficient condition for A-orbital feedback equivalence of a single-input affine control system to a linear controllable system considered in a neighbourhood of the zero equilibrium point.

Keywords: affine control system, orbital feedback linearization, time scaling

REFERENCES

1. Brockett, R.W., Feedback invariants for nonlinear systems, in *Proc. of the 1978 IFAC Congress, Helsinki, Finland*, Oxford: Pergamon Press, 1978, pp. 1115–1120.
2. Jakubczyk, B. and Respondek, W., On linearization of control systems, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math.*, 1980, vol. 28, pp. 517–522.
3. Hunt, L.R. and Su, R., Linear equivalents of nonlinear time-varying systems, *Proc. of the MTNS*, 1981, pp. 119–123.
4. Sampei, M. and Furuta, K., On time scaling for nonlinear systems: application to linearization, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1986, vol. 31, pp. 459–462.
5. Respondek, W., Orbital feedback linearization of single-input nonlinear control systems, *Proc. of the IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems*, 1998, pp. 483–488.
6. Guay, M., An algorithm for orbital feedback linearization of single-input control affine systems, *Systems and Control Letters*, 1999, vol. 38, no. 4–5, pp. 271–281.
7. Li, S.-J and Respondek, W., Orbital feedback linearization for multi-input control systems, *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 2015, vol. 25, pp. 1352–1378.
8. Fliess, M., Levine, J., Martin, P., and Rouchon, P., A Lie–Backlund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1999, vol. 44, no. 5, pp. 922–937.
9. Fetisov, D.A., Linearization of affine systems based on control-dependent changes of independent variable, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 11, pp. 1483–1494.
10. Fetisov, D.A., A-orbital feedback linearization of multiinput control affine systems, *Int. J. Robust and Nonlin. Control*, 2020, vol. 30, no. 14, pp. 5602–5627.
11. Fetisov, D.A., A-orbital linearization of affine systems, *Differ. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 11, pp. 1494–1508.
12. Fetisov, D.A., On some approaches to linearization of affine systems, *IFAC-PapersOnline*, 2019, vol. 52, no. 16, pp. 700–705.
13. Fetisov, D.A., On A-orbital linearization of three-dimensional single-input affine systems, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 4, pp. 519–534.
14. Jakubczyk, B. and Przytycki, M., *Singularities of k-Tuples of Vector Fields. Dissertationes Mathematicae*, Warsaw: Panstwowe wydawnictwo naukowe, 1984.
15. Jakubczyk, B. and Zhitomirskii, M., Singularities and normal forms of generic 2-distributions on 3-manifolds, *Studia Math.*, 1995, vol. 113, pp. 223–248.
16. Remizov, A.O., *A Brief Introduction to Singularity Theory. Lecture Notes*, Trieste: SISSA, 2010.
17. Gstottner, C., Kolar, B., and Schoberl, M., Necessary and sufficient conditions for the linearisability of two-input systems by a two-dimensional endogenous dynamic feedback, *Int. J. Control*, 2023, vol. 96, no. 3, pp. 800–821.
18. Arnold, V.I., *Ordinary Differential Equations*, Cambridge, Massachusetts; London, England: The MIT Press, 1998.
19. Respondek, W. and Pasillas-Lepine, W., Canonical contact systems for curves: a survey, in *Contemporary Trends in Geometric Control Theory and Applications*, A. Anzaldo-Meneses, F. Monroy-Pérez, B. Bonnard, and J.P. Gauthier, eds., Singapore: World Scientific, 2001, pp. 77–112.