ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 3, с. 366–373

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СПИНОРОВ ВЕЙЛЯ И ELKO СПИНОРОВ

© 2025 г. Н. Г. Марчук

Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, г. Москва
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", г. Москва
e-mail: nmarchuk@mi-ras.ru

Поступила в редакцию 22.10.2024 г., после доработки 07.12.2024 г.; принята к публикации 26.12.2024 г.

Введены класс полевых (релятивистски инвариантных) уравнений для волновой функции, состоящей из нескольких спиноров Вейля, каждый из которых удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона с одной и той же массой, и подклассы уравнений майорановского типа и дираковского типа. Показано, что известные уравнения для Elko спиноров входят в подкласс уравнений дираковского типа.

Ключевые слова: уравнение Вейля, уравнение Дирака, уравнение Майораны, спинор

DOI: 10.31857/S0374064125030069, EDN: HMINRD

ВВЕДЕНИЕ

В релятивистской физике (в том числе и в квантовой теории поля) для изучения явлений используются математические модели (согласованные со специальной теорией относительности) с дифференциальными уравнениями с частными производными, инвариантными относительно преобразований Лоренца, в частности, уравнениями Максвелла, Дирака, Янга–Миллса, Клейна–Гордона и др. Для создания новых и/или развития существующих моделей предлагаются новые классы "лоренцинвариантных" уравнений, удовлетворяющих тем или иным дополнительным условиям. Например, в работе [1] выделен класс ковариантно оснащённых систем уравнений и доказана корректность постановки задачи Коши для уравнений из этого класса. В статье [2] введён в рассмотрение класс $\mathcal{K}$ полевых уравнений для волновой функции, состоящей из двух спиноров Вейля. Из него выделено уравнение, с помощью которого предложено описывать нейтрино с ненулевой массой.

В настоящей работе, обобщая результаты статьи [2], введены классы $\mathcal{K}_{p,q}$ полевых уравнений для волновой функции, состоящей из $n=p+q$ спиноров Вейля (p, q — целые неотрицательные числа, $n\in\mathbb{N}$). В классе уравнений $\mathcal{K}_{p,q}$ выделены два подкласса уравнений — уравнения майорановского типа (в частности, при $p=n$, $q=0$ или $p=0$, $q=n$) и уравнения дираковского типа (при чётном n и $p=q=n/2$). Показано, что уравнение Дирака (1928 г.) входит в подкласс уравнений дираковского типа, а уравнение Майораны (1937 г.) — в подкласс уравнений майорановского типа. Обсуждена возможность расширения подкласса уравнений дираковского типа за счёт использования теоремы Мура–Пенроуза о существовании псевдообратных матриц. Доказано, что уравнения для Elko спиноров [3] входят в подкласс уравнений дираковского типа класса $\mathcal{K}_{4,4}$.

1. КЛАСС ПОЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ $\mathcal{K}_{p,q}$

Пусть $\mathbb{R}^{1,3}$ — пространство Минковского с декартовыми координатами x^μ, $\mu=0,1,2,3$, с частными производными $\partial_\mu=\partial/\partial x^\mu$ и с метрическим тензором, заданным диагональной матрицей Минковского

$$\eta=\|\eta_{\mu\nu}\|=\|\eta^{\mu\nu}\|=\operatorname{diag}(1,-1,-1,-1).$$

В [2] даны определения правых и левых спиноров Вейля и определены операторы ∇, $\tilde{\nabla}$, $\ddagger$, отображающие спиноры Вейля в спиноры Вейля противоположной киральности, а также введены следующие множества спиноров (спинорных полей) Вейля и пар спиноров Вейля: (L) — множество левых (левокиральных) спиноров Вейля; (R) — множество правых (правокиральных) спиноров Вейля; (LL) — множество пар левых спиноров Вейля; (RR) — множество пар правых спиноров Вейля; (LR) — множество пар спиноров Вейля, первый из которых является левым, а второй правым.

Введём следующие обозначения для множеств из $n=p+q$ спиноров Вейля ($p,q\in\mathbb{Z}_+$, $n\in\mathbb{N}$), где p — число левых спиноров Вейля и q — число правых спиноров Вейля: (L^n) — n левых спиноров Вейля ($p=n$, $q=0$), при $n=1$ имеем $(L^1)=(L)$; (R^n) — n правых спиноров Вейля ($p=0$, $q=n$), при $n=1$ имеем $(R^1)=(R)$; (L^pR^q) — n спиноров Вейля, первые p штук из которых являются левыми, а вторые q штук являются правыми ($p\neq 0$, $q\neq 0$).

Левые спиноры Вейля будем обозначать ξ, ξ_1, ξ_2, ..., а правые — χ, χ_1, χ_2, ... Совокупности из n спиноров Вейля будем обозначать $(\xi_1;\ldots;\xi_n)\in(L^n)$, $(\chi_1;\ldots;\chi_n)\in(R^n)$, $(\xi_1;\ldots;\xi_p;\chi_{p+1};\ldots;\chi_n)\in(L^pR^q)$ и называть *n-спинорами Вейля.*

Для произвольных чисел $n=p+q$ определим класс $\mathcal{K}_{p,q}$ систем дифференциальных уравнений следующими постулатами*.

I. В уравнениях из класса $\mathcal{K}_{p,q}$ неизвестными являются n-спиноры Вейля из (L^pR^q) ($2n$ неизвестных комплексных функций $\mathbb{R}^{1,3}\to\mathbb{C}$, являющихся компонентами n спиноров Вейля).

II. В уравнениях из класса $\mathcal{K}_{p,q}$ используются только операторы, отображающие спиноры Вейля в спиноры Вейля.

III. В класс $\mathcal{K}_{p,q}$ входят уравнения первого порядка (в уравнения входят частные производные ∂_μ не выше первого порядка) с нулевой правой частью. Число уравнений равно числу неизвестных (системы из $2n$ комплексных уравнений для $2n$ комплексных неизвестных).

IV. Если n спиноров Вейля удовлетворяют уравнению (системе уравнений) из $\mathcal{K}_{p,q}$, то каждый из этих спиноров Вейля удовлетворяет соответствующему уравнению Клейна–Гордона.

Следуя линии рассуждения в [2], с помощью постулатов I–IV определим класс $\mathcal{K}_{n,0}$ (систем) уравнений** для n-спинора Вейля $(\xi_1;\ldots;\xi_n)\in(L^n)$:

$$\tilde{\nabla}\xi_k+m\alpha_k^s\xi_s^\ddagger=0,\quad k=\overline{1,n},\tag{1}$$

где m — вещественная константа (в дальнейшем будет интерпретироваться как масса частицы); α_k^s — набор из n^2 комплексных констант, образующих матрицу (верхний индекс нумерует столбцы матрицы, а нижний — строки матрицы)

$$\alpha=\|\alpha_k^s\|\in\operatorname{Mat}(n,\mathbb{C}).$$

*В статье [2] с помощью этих постулатов (при $n=2$) определены классы уравнений $\mathcal{K}_{2,0}$, $\mathcal{K}_{0,2}$, $\mathcal{K}_{1,1}$, которые там обозначены через $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$.

**Далее индексы k, l, s, ... пробегают значения от 1 до n и по повторяющимся индексам ведётся суммирование.

Покажем, что требование выполнения постулата IV позволяет найти простое условие на матрицу α. Действительно, подействовав на левую часть уравнения (1) оператором дуальности $\ddagger$, получим

$$\nabla(\xi_s^{\ddagger}) = m\bar{\alpha}_s^l \xi_l. \tag{2}$$

Теперь подействуем на (1) оператором ∇ и воспользуемся равенством (2). Будем иметь

$$0 = \nabla\tilde{\nabla}\xi_k + m\alpha_k^s \nabla(\xi_s^{\ddagger}) = \nabla\tilde{\nabla}\xi_k + m^2\alpha_k^s\bar{\alpha}_s^l\xi_l.$$

В соответствии с постулатом IV правая часть этого равенства должна быть равна оператору Клейна–Гордона, действующему на ξ_k:

$$\nabla\tilde{\nabla}\xi_k + m^2\xi_k.$$

Поэтому $\alpha_k^s\bar{\alpha}_s^l\xi_l = \xi_k$ и

$$\alpha_k^s\bar{\alpha}_s^l = \delta_k^l, \tag{3}$$

где δ_k^l — символ Кронекера. Обозначив через $\bar{\alpha}$ матрицу с комплексно-сопряжёнными элементами $\bar{\alpha} = \|\bar{\alpha}_s^l\| \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$, условие для компонент матриц (3) запишем в виде матричного равенства

$$\bar{\alpha} = \alpha^{-1}. \tag{4}$$

Оно не только выглядит проще условия, выписанного для $n=2$ в статье [2] (формулы (21), (22)), но и даёт естественное обобщение на произвольную размерность $n\in\mathbb{N}$.

Таким образом, определён класс $\mathcal{K}_{n,0}$ уравнений вида (1) с условием (4) на коэффициенты уравнений. Из класса уравнений $\mathcal{K}_{n,0}$ легко получить все остальные классы уравнений $\mathcal{K}_{p,q}$ с $p+q=n$, $q>0$. Прежде всего определим класс уравнений $\mathcal{K}_{0,n}$. Для этого подействуем оператором дуальности $\ddagger$ на уравнения (1) и введём обозначения для правых спиноров Вейля

$$\chi_k = \xi_k^{\ddagger}, \quad k=\overline{1,n}.$$

Получим уравнения

$$\nabla\chi_k + m\bar{\alpha}_k^s\chi_s^{\ddagger} = 0, \quad k=\overline{1,n},$$

которые при выполнении условий на коэффициенты (4) составляют класс уравнений $\mathcal{K}_{0,n}$.

Для определения классов уравнений $\mathcal{K}_{p,q}$ с $p+q=n$, $p>0$, $q>0$, уравнения (1) разделим на две группы:

$$\tilde{\nabla}\xi_a + m\left(\sum_{b=1}^{p}\alpha_a^b\xi_b^{\ddagger} + \sum_{c=p+1}^{n}\alpha_a^c\xi_c^{\ddagger}\right) = 0, \quad a=\overline{1,p};$$

$$\tilde{\nabla}\xi_d + m\left(\sum_{b=1}^{p}\alpha_d^b\xi_b^{\ddagger} + \sum_{c=p+1}^{n}\alpha_d^c\xi_c^{\ddagger}\right) = 0, \quad d=\overline{p+1,n}.$$

Теперь на эти уравнения подействуем оператором $\ddagger$ и выполним замену переменных

$$\chi_d = \xi_d^{\ddagger}, \quad d=\overline{p+1,n}.$$

Придём к системе уравнений для n-спинора Вейля $\Theta = (\xi_1;\ldots;\xi_p;\chi_{p+1};\ldots;\chi_n) \in (L^pR^q)$:

$$\tilde{\nabla}\xi_a + m\left(\sum_{b=1}^{p}\alpha_a^b\xi_b^{\ddagger} + \sum_{c=p+1}^{n}\alpha_a^c\chi_c\right) = 0, \quad a=\overline{1,p}; \tag{5}$$

$$\nabla\chi_d + m\left(-\sum_{b=1}^{p}\bar{\alpha}_d^b\xi_b + \sum_{c=p+1}^{n}\bar{\alpha}_d^c\chi_c^{\ddagger}\right) = 0, \quad d=\overline{p+1,n}. \tag{6}$$

Введём обозначения для множеств матриц

$$\mathcal{A}_n = \{\alpha \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})\colon \bar{\alpha} = \alpha^{-1}\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Множество систем уравнений вида (5), (6) с произвольной матрицей $\alpha \in \mathcal{A}_n$ составляет класс уравнений $\mathcal{K}_{p,q}$ для n-спиноров Вейля из $(L^p R^q)$.

Если n-спинор Вейля $\Theta = (\xi_1;\ldots;\xi_p;\chi_{p+1};\ldots;\chi_n) \in (L^p R^q)$ удовлетворяет уравнению из класса $\mathcal{K}_{p,q}$ (т.е. системе уравнений (5), (6) с некоторой матрицей $\alpha \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$, удовлетворяющей условию (4)), то левые и правые спиноры Вейля, составляющие n-спинор Вейля Θ, удовлетворяют соответствующим уравнениям Клейна–Гордона

$$\nabla\tilde{\nabla}\xi_a + m^2\xi_a = 0, \quad a = \overline{1,p}; \quad \tilde{\nabla}\nabla\chi_d + m^2\chi_d = 0, \quad d = \overline{p+1,n}.$$

2. ПОДКЛАСС $\mathcal{M}(\mathcal{K}_{p,q})$ ПОЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ МАЙОРАНОВСКОГО ТИПА

Класс полевых уравнений $\mathcal{K}_{p,q}$, $p+q=n$, определяется целыми неотрицательными числами p, q и множеством матриц $\alpha \in \mathcal{A}_n$ коэффициентов уравнений. Далее выделим два подкласса полевых уравнений и для этого выделим два подмножества множества матриц $\mathcal{A}_n$.

Обозначим через $\mathrm{Mat}(p,q,\mathbb{C})$ множества комплексных матриц, у которых p строк и q столбцов $(p \geqslant 1,\ q \geqslant 1)$, в частности, $\mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{C}) = \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$.

Матрицу $\alpha \in \mathcal{A}_n$, $n \geqslant 2$, запишем в блочном виде

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где $\alpha_1 \in \mathrm{Mat}(p,\mathbb{C})$, $\alpha_2 \in \mathrm{Mat}(q,\mathbb{C})$, $\alpha_3 \in \mathrm{Mat}(p,q,\mathbb{C})$, $\alpha_4 \in \mathrm{Mat}(q,p,\mathbb{C})$.

Из множества матриц (7) выделим подмножество блочно-диагональных матриц (с $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 0$)

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Условие $\alpha \in \mathcal{A}_n$ для таких матриц даёт условия

$$\alpha_1 \in \mathcal{A}_p, \quad \alpha_2 \in \mathcal{A}_q. \tag{9}$$

Подмножество матриц (8) с условиями (9) выделяет из класса полевых уравнений $\mathcal{K}_{p,q}$ подкласс уравнений вида

$$\tilde{\nabla}\xi_a + m\sum_{b=1}^{p}\alpha_a^b\xi_b^\ddagger = 0, \quad a = \overline{1,p}; \quad \nabla\chi_d + m\sum_{c=p+1}^{n}\bar{\alpha}_d^c\chi_c^\ddagger = 0, \quad d = \overline{p+1,n}, \tag{10}$$

который будем обозначать $\mathcal{M}(\mathcal{K}_{p,q}) \subseteq \mathcal{K}_{p,q}$ и называть *подклассом уравнений майорановского типа*. Отметим, что при $p=n$, $q=0$ и $p=0$, $q=n$

$$\mathcal{M}(\mathcal{K}_{n,0}) = \mathcal{K}_{n,0}, \quad \mathcal{M}(\mathcal{K}_{0,n}) = \mathcal{K}_{0,n},$$

а при $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ система уравнений (10) распадается на две независимые системы уравнений.

Пример 1. Рассмотрим класс уравнений $\mathcal{K}_{1,0} = \mathcal{M}(\mathcal{K}_{1,0})$, который описывается комплексной матрицей α первого порядка, т.е. числом $\alpha \in \mathbb{C}$, удовлетворяющим условию $\bar{\alpha} = \alpha^{-1}$, а значит, $|\alpha| = 1$. Уравнения из $\mathcal{K}_{1,0}$ для левого спинора Вейля $\xi = \xi_1 \in (L)$ имеют вид

$$\tilde{\nabla}\xi + me^{i\phi}\xi^\ddagger = 0, \quad e^{i\phi} = \alpha, \ \ \phi \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Уравнение (11) является уравнением Майораны для левого спинора Вейля (см. [2]).

Уравнения из класса $\mathcal{K}_{0,1}=\mathcal{M}(\mathcal{K}_{0,1})$ для правого спинора Вейля $\chi\in(R)$ являются уравнениями Майораны (с фазовыми множителями $e^{i\psi}$)

$$\nabla\chi+me^{i\psi}\chi^{\ddagger}=0.$$

Этот пример обосновывает название *подкласс уравнений майорановского типа* для уравнений из $\mathcal{M}(\mathcal{K}_{p,q})$.

Пример 2. Рассмотрим класс уравнений $\mathcal{K}_{2,0}=\mathcal{M}(\mathcal{K}_{2,0})$ для пары левых спиноров Вейля $(\xi_1;\xi_2)\in(L^2)$:

$$\tilde\nabla\xi_1+m(\alpha_1^1\xi_1^{\ddagger}+\alpha_1^2\xi_2^{\ddagger})=0,\quad \tilde\nabla\xi_2+m(\alpha_2^1\xi_1^{\ddagger}+\alpha_2^2\xi_2^{\ddagger})=0, \tag{12}$$

где матрица $\alpha=\|\alpha_l^k\|\in\mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$ удовлетворяет условию $\bar\alpha=\alpha^{-1}$. В [2] предложено использовать эту систему уравнений для описания динамики нейтрино с ненулевой массой m. В качестве представителя класса там выбрана система уравнений с матрицей, зависящей от двух параметров $\lambda,\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon\neq0$:

$$\alpha=\begin{bmatrix}0 & -\varepsilon ie^{i\lambda}\\ -ie^{i\lambda}/\varepsilon & 0\end{bmatrix}. \tag{13}$$

В силу доказанной в [2] теоремы о модельной эквивалентности всех уравнений из класса $\mathcal{K}_{2,0}$ выбор конкретного представителя класса не играет существенной роли для теории.

В качестве уравнения для антинейтрино в работе [2] предложено использовать уравнение из класса $\mathcal{K}_{0,2}=\mathcal{M}(\mathcal{K}_{0,2})$ для пары правых спиноров Вейля $(\chi_1;\chi_2)\in(R^2)$:

$$\nabla\chi_1+m(\bar\alpha_1^1\chi_1^{\ddagger}+\bar\alpha_1^2\chi_2^{\ddagger})=0,\quad \nabla\chi_2+m(\bar\alpha_2^1\chi_1^{\ddagger}+\bar\alpha_2^2\chi_2^{\ddagger})=0,$$

с комплексно-сопряжённой матрицей (13).

3. ПОДКЛАСС $\mathcal{D}(\mathcal{K}_{p,q})$ ПОЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ ДИРАКОВСКОГО ТИПА

Выделим из множества матриц (7) подмножество матриц (с $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$)

$$\alpha=\begin{bmatrix}0 & \alpha_3\\ \alpha_4 & 0\end{bmatrix}. \tag{14}$$

Матрицы $\alpha_3\in\mathrm{Mat}(p,q,\mathbb{C})$, $\alpha_4\in\mathrm{Mat}(q,p,\mathbb{C})$ имеют вид

$$\alpha_3=\begin{bmatrix}\alpha_1^{p+1} & \cdots & \alpha_1^n\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_p^{p+1} & \cdots & \alpha_p^n\end{bmatrix},\quad \alpha_4=\begin{bmatrix}\alpha_{p+1}^1 & \cdots & \alpha_{p+1}^p\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_n^1 & \cdots & \alpha_n^p\end{bmatrix}.$$

Условие $\alpha\in\mathcal{A}_n$ для таких матриц даёт условия

$$\bar\alpha_3\alpha_4=Id_p,\quad \bar\alpha_4\alpha_3=Id_q, \tag{15}$$

где Id_p, Id_q — единичные матрицы размерностей p и q соответственно. Равенства (15) могут быть выполнены только при чётном n и $p=q=n/2$. В этом случае матрицы $\alpha_3,\alpha_4\in\mathrm{Mat}(n/2,\mathbb{C})$ невырождены и

$$\bar\alpha_3=\alpha_4^{-1}. \tag{16}$$

Подмножество матриц (14) с условием (16) выделяет из класса полевых уравнений $\mathcal{K}_{p,p}$ подкласс уравнений (для $2p$-спинора Вейля $\Theta=(\xi_1;\ldots;\xi_p;\chi_{p+1};\ldots;\chi_{2p})\in(L^pR^p)$) вида

$$\tilde{\nabla}\xi_a+m\sum_{c=p+1}^{2p}\alpha_a^c\chi_c=0,\quad a=\overline{1,p};\quad \nabla\chi_d-m\sum_{b=1}^{p}\bar{\alpha}_d^b\xi_b=0,\quad d=\overline{p+1,2p},\tag{17}$$

который будем обозначать $\mathcal{D}(\mathcal{K}_{p,p})\subset\mathcal{K}_{p,p}$ и называть *подклассом уравнений дираковского типа*.

Пример 3. Рассмотрим подкласс уравнений дираковского типа $\mathcal{D}(\mathcal{K}_{1,1})$ для пары спиноров Вейля $(\xi_1;\chi_2)\in(LR)$:

$$\tilde{\nabla}\xi_1+m\alpha_1^2\chi_2=0,\quad \nabla\chi_2-m\bar{\alpha}_2^1\xi_1=0,$$

где

$$\alpha=\begin{bmatrix}0 & \alpha_1^2\\ \alpha_2^1 & 0\end{bmatrix}$$

и комплексные числа α_2^1, α_1^2 таковы, что $\bar{\alpha}_2^1\alpha_1^2=1$.

В частности, если возьмём $\alpha_2^1=\alpha_1^2=i$, то получим уравнение Дирака в представлении Вейля (см. [2]) $\tilde{\nabla}\xi+im\chi=0$, $\nabla\chi+im\xi=0$, где $\xi=\xi_1$, $\chi=\chi_2$.

Этот пример обосновывает название *подкласс уравнений дираковского типа* для уравнений из $\mathcal{D}(\mathcal{K}_{p,p})$.

Замечание. По теореме Мура–Пенроуза [4, 5] для любой матрицы $A\in\mathrm{Mat}(p,q,\mathbb{C})$ существует псевдообратная матрица $A^g\in\mathrm{Mat}(q,p,\mathbb{C})$ такая, что $AA^gA=A$. Если два равенства (15) заменить одним (более слабым) равенством

$$\alpha_3\bar{\alpha}_4\alpha_3=\alpha_3,\tag{18}$$

то можем получить $\bar{\alpha}_4=\alpha_3^g$, что даст возможность расширить подкласс уравнений дираковского типа $\mathcal{D}(\mathcal{K}_{p,q})$, включив в него уравнения с произвольными натуральными p, q. Вместе с тем для уравнений с $p\neq q$ и с условием (18) постулат IV будет ослаблен и этот факт требует дальнейшего изучения.

4. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ELKO СПИНОРОВ ИЗ ПОДКЛАССА $\mathcal{D}(\mathcal{K}_{4,4})$

В 2005 году в работе [3] были введены так называемые Elko* спиноры, являющиеся собственными спинорами оператора зарядового сопряжения. Те же авторы предложили использовать Elko спиноры для описания тёмной материи [6]. Это направление исследований активно развивается (см. обзор [7] и критические замечания [8]).

Покажем, что система уравнений для Elko спиноров принадлежит подклассу $\mathcal{D}(\mathcal{K}_{4,4})$. Для этого воспользуемся формой записи системы уравнений для Elko спиноров, приведённой в статье [9]:

$$\gamma^\mu p_\mu\psi_+^+ +im\psi_-^+=0,\quad \gamma^\mu p_\mu\psi_-^+ -im\psi_+^+=0,\quad \gamma^\mu p_\mu\psi_+^- -im\psi_-^-=0,\quad \gamma^\mu p_\mu\psi_-^- +im\psi_+^-=0,\tag{19}$$

где $p_\mu=i\partial_\mu$ и γ-матрицы Дирака взяты в представлении Вейля

$$\gamma^\mu=\begin{bmatrix}0 & \sigma^\mu\\ \tilde{\sigma}^\mu & 0\end{bmatrix},\quad \mu=0,1,2,3.\tag{20}$$

*“Eigenspinoren des Ladungskonjugations Operators” (нем.).

Четыре спинора Дирака $\psi^{\pm}_{\pm}$ запишем с использованием 8-спинора Вейля

$$(\xi_1;\xi_2;\xi_3;\xi_4;\chi_5;\chi_6;\chi_7;\chi_8)\in(L^4R^4)$$

в виде

$$\psi^+_+=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \chi_5\end{bmatrix},\quad \psi^+_-=\begin{bmatrix}\xi_2\\ \chi_6\end{bmatrix},\quad \psi^-_+=\begin{bmatrix}\xi_3\\ \chi_7\end{bmatrix},\quad \psi^-_-=\begin{bmatrix}\xi_4\\ \chi_8\end{bmatrix}.$$

Подставляя их в (19), используя формулу

$$\gamma^\mu p_\mu\begin{bmatrix}\xi\\ \chi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i\sigma^\mu\partial_\mu\chi\\ i\tilde\sigma^\mu\partial_\mu\xi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i\nabla\chi\\ i\tilde\nabla\xi\end{bmatrix},$$

и в получившейся системе уравнений упорядочивая последовательность уравнений, придём к системе уравнений (17) с $p=4$ и матрицей $\alpha\in\mathrm{Mat}(8,\mathbb{C})$ вида (14) с двумя ненулевыми блоками

$$\alpha_3=-\alpha_4=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&-1&0\end{bmatrix}.$$

В этом случае, как легко убедиться, $\bar\alpha_3=\alpha_4^{-1}$. Тем самым доказано, что система уравнений для Elko спиноров входит в подкласс $\mathcal{D}(\mathcal{K}_{4,4})$ уравнений дираковского типа (в рамках предлагаемой в этой статье классификации).

Учитывая научный интерес к уравнениям для Elko спиноров из подкласса $\mathcal{D}(\mathcal{K}_{4,4})$ уравнений дираковского типа, отметим, что подклассы $\mathcal{D}(\mathcal{K}_{2,2})$ и $\mathcal{D}(\mathcal{K}_{3,3})$, по мнению автора, также заслуживают внимания специалистов (напомним, что уравнение Дирака (1928 г.) принадлежит подклассу $\mathcal{D}(\mathcal{K}_{1,1})$).

Автор благодарен сотрудникам отдела математической физики Математического института имени В.А. Стеклова РАН, а также сотрудникам лаборатории геометрической алгебры и приложений Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики” за конструктивное обсуждение результатов работы.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-71-10028). Результаты пп. 1–3 получены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-71-10028), результаты п. 4 получены в рамках проекта “Зеркальные лаборатории” НИУ ВШЭ “Кватернионы, геометрические алгебры и приложения”.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марчук, Н.Г. Об одном классе релятивистски инвариантных уравнений первого порядка / Н.Г. Марчук // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 12. — С. 1621–1633.
2. Марчук, Н.Г. Класс полевых уравнений для нейтрино с ненулевой массой / Н.Г. Марчук // Теор. и мат. физика. — 2024. — Т. 219, № 3. — С. 422–439.
3. Ahluwalia, D.V. Spin half fermions with mass dimension one: theory, phenomenology, and dark matter / D.V. Ahluwalia, D. Grumiller // J. Cosmol. Astropart. Phys. — 2005. — № 7. — Art. 012.

4. Moore, E.H. On the reciprocal of the general algebraic matrix / E.H. Moore // Bull. Amer. Math. Soc. — 1920. — V. 26. — P. 394–395.
5. Penrose, R. A generalized inverse for matrices / R. Penrose // Proc. Cambridge Philosoph. Soc. — 1955. — V. 51. — P. 406–413.
6. Ahluwalia, D.V. Dark matter: a spin one half fermion field with mass dimension one? / D.V. Ahluwalia, D. Grumiller // Phys. Rev. D. — 2005. — V. 72, № 6. — Art. 067701.
7. Mass dimension one fermions: constructing darkness / D.V. Ahluwalia, J.M.H. da Silva, C.Y. Lee, [et al.] // Phys. Rept. — 2022. — V. 967. — P. 1–43.
8. Romero, R. Elko spinors revised / R. Romero // Revista Mexicana de Física. — 2023. — V. 69, № 2. — Art. 020201.
9. Nikitin, A.G. Non-standard Dirac equations for non-standard spinors / A.G. Nikitin // Int. J. Modern Phys. D. — 2014. — V. 23, № 14. — Art. 1444007.

CLASSIFICATION OF FIELD EQUATIONS FOR WEYL SPINORS AND ELKO SPINORS

 N. G. Marchuk

Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow, Russia
National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia
e-mail: nmarchuk@mi-ras.ru

A class of field (relativistically invariant) equations is introduced for a wave function consisting of several Weyl spinors. The equations are such that each of these Weyl spinors satisfies the Klein–Gordon equation with the same mass. Subclasses of equations of Majorana type and Dirac-type are introduced. It is shown that the known equations for Elko spinors belong to the subclass of Dirac-type equations.

Keywords: Weyl equation, Dirac equation, Majorana equation, spinor

FUNDING

This work is supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-71-10028) (sections 1–3). Section 4 is prepared within the framework of the project "Mirror Laboratories" of HSE University "Quaternions, geometric algebras and applications".

REFERENCES

1. Marchuk, N.G., One class of relativistically invariant first-order equations, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 12, pp. 1575–1586.
2. Marchuk, N.G., A class of field equations for neutrinos with nonzero masses, *Theor. Math. Phys.*, 2024, vol. 219, no. 3, pp. 897–912.
3. Ahluwalia, D.V. and Grumiller, D., Spin half fermions with mass dimension one: theory, phenomenology, and dark matter, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, 2005, no. 7, art. 012.
4. Moore, E.H., On the reciprocal of the general algebraic matrix, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1920, vol. 26, pp. 394–395.
5. Penrose, R., A generalized inverse for matrices, *Proc. Cambridge Philosoph. Soc.*, 1955, vol. 51, pp. 406–413.
6. Ahluwalia, D.V. and Grumiller, D., Dark matter: a spin one half fermion field with mass dimension one?, *Phys. Rev. D*, 2005, vol. 72, no. 6, art. 067701.
7. Ahluwalia, D.V., da Silva, J.M.H., Lee, C.Y. [et al.], Mass dimension one fermions: constructing darkness, *Phys. Rept.*, 2022, vol. 967, pp. 1–43.
8. Romero, R., Elko spinors revised, *Revista Mexicana de Física*, vol. 69, no. 2, art. 020201.
9. Nikitin, A.G., Non-standard Dirac equations for non-standard spinors, *Int. J. Modern Phys. D*, 2014, vol. 23, no. 14, art. 1444007.