*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 3, с. 354–365*

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

*УДК 517.951*

# ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. IV

 **В. И. Елкин**

*Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН, г. Москва*
*e-mail: elk_v@mail.ru*

*Поступила в редакцию 01.09.2024 г., после доработки 21.12.2024 г.; принята к публикации 21.01.2025 г.*

Исследован вопрос использования группы симметрий для изучения структуры систем уравнений с частными производными на основе применения дифференциально-геометрических и алгебраических методов теории управляемых динамических систем.

*Ключевые слова:* симметрия, декомпозиция

DOI: 10.31857/S0374064125030059, EDN: HMPZBG

## 1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается система дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

$$\Lambda_\nu(t,y,p)=0, \quad \nu=\overline{1,l},$$

после приведения которой к специальному виду [1] в параметрической форме

$$\partial_k y^i = g_k^i(t,y,u), \quad \partial_k=\partial/\partial t_k, \ \ k=\overline{1,r}, \ \ i=\overline{1,n}, \tag{1}$$

открывается возможность применения дифференциально-геометрических и алгебраических методов теории динамических систем с управлением из-за некоторой аналогии этих систем. Эта аналогия заключается в следующем. Каждое решение $y(t)$ управляемой системы

$$\dot y^i = g^i(t,y,u), \quad i=\overline{1,n}, \ \ (t,y)\in M\subset\mathbb{R}^{n+1}, \ \ u\in U\subset\mathbb{R}^r, \tag{2}$$

получается после подстановки в правую часть управлений $u(t)$ из некоторого класса допустимых функций. С другой стороны, решения $y(t)$ системы (1) соответствуют некоторому выбору параметрической функции $u(t)$ также из некоторого класса. Однако есть существенное различие в классах допустимых управлений. Для управляемых систем классы допустимых управлений достаточно известны и широки: от кусочно-непрерывных функций до измеримых функций. Для систем (1) заранее задать класс допустимых управлений затруднительно, так как далеко не каждый выбор функции $u(t)$ приводит к решению $y(t)$. Препятствием является, в частности, вероятность несовместности полученной системы после подстановки $u(t)$. Тем не менее идеология теории управлений может быть полезна, так как накоплен обширный материал в теории управления по применению дифференциально-геометрических и алгебраических методов.

Целью серии работ, куда входит и настоящая статья, является перенос данных методов в теорию систем дифференциальных уравнений с частными производными. Эти методы позволяют исследовать по новому некоторые вопросы декомпозиции, построения симметрий и др., что весьма актуально и для систем дифференциальных уравнений с частными производными. В статье [1] вводятся соответствующие понятия, в частности, ассоциированные объекты — семейства векторных полей и алгебры Ли, с помощью которых решается вопрос о существовании и нахождении первых интегралов. В [2] рассматривается декомпозиция, которая также имеет аналог в теории динамических систем с управлением под названием *агрегирование* (*факторизация*). В [3] вводятся симметрии, т.е преобразования переменных, переводящие решения в решения. Кроме практического смысла тиражирования решений, симметрии определяют также некоторую декомпозицию уравнений с частными производными. В данной работе продолжается изучение симметрий специального типа, которые приводят к выделению некоторого класса систем ($L$-систем) с ярко выраженными алгебраическими свойствами и структурой.

## 2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

Так как данная статья является продолжением работ [1–3], приведём некоторые понятия и результаты из них. Во-первых, для упрощения и не ограничивая общности рассматриваются "автономные" системы, т.е. системы с правыми частями, не зависящими от аргументов $t\in I\subset\mathbb{R}^r$:

$$\partial_k y^i = g_k^i(y,u), \quad y\in L\subset\mathbb{R}^n,\ \ u\in U\subset\mathbb{R}^s. \tag{3}$$

Вводится ассоциированное семейство векторных полей $\mathfrak{c}_0$ в области $L$. Объект

$$X_k = g_k^j(y,u)\frac{\partial}{\partial y^j} \tag{4}$$

можно трактовать как оператор полного дифференцирования в силу системы по переменной $t^k$. Каждое поле семейства $\mathfrak{c}_0$ получается из (4) подстановкой $u\in U$, $k=\overline{1,r}$. Таким образом, компоненты полей семейства зависят только от $y$.

Используется понятие производного ряда для семейства векторных полей, которое заключается в следующем. Для семейства векторных полей $\mathfrak{c}_0$ существует минимальная алгебра Ли, содержащая $\mathfrak{c}_0$, которую обозначим через ${\mathfrak{c}_0}^*$. Алгебру ${\mathfrak{c}_0}^*$ можно построить следующим образом. Рассмотрим последовательность семейств векторных полей

$$\mathfrak{c}_0\subset\mathfrak{c}_1\subset\ldots\subset\mathfrak{c}_k\subset\ldots, \tag{5}$$

где $\mathfrak{c}_k$ для $k>0$ состоит из $\mathfrak{c}_{k-1}$ и всевозможных коммутаторов полей из $\mathfrak{c}_{k-1}$. Линейная оболочка множества $\bigcup_{k=0}^{\infty}\mathfrak{c}_k$ будет равна ${\mathfrak{c}_0}^*$, т.е. ${\mathfrak{c}_0}^*=\operatorname{span}\bigcup_{k=0}^{\infty}\mathfrak{c}_k$. Положим $\mathfrak{c}=\mathfrak{c}_0^*$. Последовательность (5) назовём производным рядом для семейства полей $\mathfrak{c}_0$. Аналогичные понятия можно ввести и для произвольных семейств векторных полей $\mathfrak{b}$.

Используется также понятие распределения. *Распределением* $D$ в области $L\subset\mathbb{R}^n$ называется отображение, сопоставляющее каждой точке $y\in L$ линейное подпространство векторов $D(y)$, исходящих из точки $y\in M$. Любое семейство векторных полей $\mathfrak{b}$, состоящее из полей $\xi_j$, $j\in J$, порождает распределение $y\in L\mapsto\operatorname{span}\{\xi_j(y),\ \ j\in J\}$, которое обозначается через $\Delta_{\mathfrak{b}}$. В дальнейшем предполагается, что распределения, порождаемые различными семействами, являются регулярными, т.е. величина $\dim\Delta_{\mathfrak{b}}(y)$ постоянна. Если $\dim\Delta_{\mathfrak{b}}(y)=p$, то в окрестности каждой точки $y$ существует базисное семейство векторных полей из $\mathfrak{b}$ (по повторяющемуся индексу здесь и далее проводится суммирование)

$$Z_a = b_a^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad l=\overline{1,p}, \tag{6}$$

причём
$$\operatorname{rank}\|b^i_a(y)\| = p,$$
т.е. векторы $Z_a(y)$, $a=\overline{1,p}$, линейно независимы в каждой точке окрестности $y$ или, как ещё говорят, линейно несвязны в окрестности $y$. Если $\mathfrak{b}$ — алгебра Ли, то базисное семейство является полным, т.е. добавляется свойство
$$[Z_a, Z_c] = h^d_{ac}(y) Z_d, \quad a, c, d = \overline{1,p}.$$

Таким образом, коммутаторы $[Z_a, Z_c]$ семейства выражаются линейно с переменными коэффициентами $h^d_{ac}(y)$ через остальные поля семейства.

Для того чтобы построить базисное семейство алгебры $\mathfrak{c}_0{}^*$, нужно вместо производного ряда (5) использовать последовательность соответствующих базисных семейств для семейств полей, составляющих ряд (5):
$$\mathfrak{d}_0 \subset \mathfrak{d}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{d}_N. \tag{7}$$
Здесь $\mathfrak{d}_k$ — базисное семейство семейства $c_k$. Последовательность (7) строится следующим образом: если $\mathfrak{d}_k$ построено, то $\mathfrak{d}_{k+1}$ получается добавлением к $\mathfrak{d}_k$ тех коммутаторов полей из $\mathfrak{d}_k$, которые не выражаются линейно (с переменными коэффициентами) через поля из $\mathfrak{d}_k$. Для некоторого $N \leqslant n-1$ все коммутаторы полей из $\mathfrak{d}_N$ линейно выражаются через поля семейства $\mathfrak{d}_N$. Очевидно, что $\mathfrak{d}_N$ является базисным семейством алгебры $\mathfrak{c}_0{}^*$. Тогда базисное семейство алгебры $\mathfrak{c}_0{}^*$ (при условии знания базисного семейства семейства $\mathfrak{c}_0$) находится за конечное число алгебраических операций вычисления некоторых определителей и операций дифференцирования. Указанный алгоритм называется *процессом пополнения* [4, с. 14].

Напомним известное утверждение.

**Теорема 1** [4, с. 12]. *Полное семейство* (6), $p<n$, *имеет в окрестности каждой точки* $m=n-p$ *функционально независимых интегралов* (*полный набор*)
$$\Phi^k(y), \quad \operatorname{rank}\left\|\frac{\partial \Phi^k}{\partial y^i}\right\|_{i=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,n-m}} = n-m,$$
*причём любой интеграл* $\Phi(y)$ *функционально выражается через полный набор*:
$$\Phi(y) = F(\Phi^1(y)\ldots, \Phi^m(y)).$$

На утверждении теоремы 1 основаны некоторые результаты по декомпозиции систем (3) [2]. Имеется в виду декомпозиция системы (3) с помощью замены зависимых переменных $y$, точнее, возможность преобразовании системы с помощью замены переменных
$$z^i = \varphi^i(y), \quad i = \overline{1,n}, \tag{8}$$
к виду
$$\partial_k z^l = h^l_k(z^1, \ldots, z^m, u), \quad l = \overline{1,m}, \tag{9}$$
$$\partial_k z^i = h^i_k(z^1, \ldots, z^n, u), \quad i = \overline{m+1,n}. \tag{10}$$
Если такое представление возможно, то говорят, что система (3) допускает декомпозицию (агрегирование) по зависимым переменным порядка $n-m$, причём первые $m$ функций в замене переменных (8)
$$z^i = \varphi^i(y), \quad i = \overline{1,m}, \tag{11}$$
называются *агрегатами*, а система (9) — *агрегированной системой*.

Замена зависимых переменных (8) в системе (3) осуществляется следующим образом: подействуем операторами полного дифференцирования (4) на функции (8) и получим

$$X_l(\varphi^i(y)) = g_l^j(y,u)\frac{\partial \varphi^i}{\partial y^j},$$

а затем выразим функционально полученные функции через (8):

$$g_l^j(y,u)\frac{\partial \varphi^i}{\partial y^j} = h^i(\varphi^1(y),\ldots,\varphi^n(y),u). \tag{12}$$

Функции $h^i(z^1,\ldots,z^n,u)$ являются новыми правыми частями системы, при этом декомпозиция (9), (10) возникает, когда первые $m$ функций (12) функционально выражаются только через агрегаты (11), т.е.

$$g_l^j(y,u)\frac{\partial \varphi^i}{\partial y^j} = h^i(\varphi^1(y),\ldots,\varphi^m(y)u), \quad i=\overline{1,m}.$$

В частности, одна простая декомпозиция связана с существованием интегралов $\varphi(y)$ у системы, которые совпадают с интегралами семейства векторных полей, т.е. функциями $\varphi(y)$, для которых

$$X_k(\varphi(y)) = 0 = a_k^j(y)\frac{\partial \varphi(y)}{\partial y^j} = 0, \quad k=\overline{1,r}. \tag{13}$$

Существование интегралов определяется алгеброй $\mathfrak{c}_0{}^*$, точнее, базисным семейством, получаемым в процессе пополнения. Если это семейство имеет вид (6), то из закона преобразования дифференциальных уравнений при замене зависимых переменных (8) следует, что при использовании в качестве первых функций набора независимых первых интегралов (6) системы (таковыми являются интегралы семейства векторных полей $\mathfrak{c}_0$) в результате получится система

$$\partial_k z^i = 0, \quad i=\overline{1,m}, \quad \partial_k z^j = h_k^j(t,x,u), \quad j=\overline{q+1,n}.$$

Теперь приведём некоторые обозначения и термины из работы [3]. Симметрии дифференциальных уравнений — это такие преобразования переменных, которые переводят решения дифференциальных уравнений в другие их решения. Таким образом, симметрии позволяют находить новые решения по известным решениям. Но этим не ограничивается их роль. Различные качественные характеристики дифференциальных уравнений определяются существованием тех или иных симметрий. Например, для обыкновенных дифференциальных уравнений симметрии помогают находить первые интегралы, которые в случае уравнений механики дают законы сохранения. Для уравнений с частными производными симметрии также дают возможность использовать законы сохранения, которые имеют более сложный вид. Знание симметрий позволяет преобразовать дифференциальные уравнения к удобному для исследований виду, например, к некоторой декомпозиции. Аппарат симметрий для дифференциальных уравнений был разработан в XIX веке С. Ли в его теории непрерывных групп, которые стали называть группами Ли (Л.В. Овсянников развил эту теорию и назвал “групповой анализ” [5]).

При рассмотрении вопроса о симметриях вместо нахождения конечных преобразований удобнее сначала отыскивать инфинитезимальные операторы (векторные поля)

$$X = \theta^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \tag{14}$$

порождающие однопараметрические группы симметрий. Такие поля часто называют *инфинитезимальными симметриями.* Инфинитезимальные симметрии вида (14) (хотя есть и более общие) образуют алгебру Ли $\mathfrak{a}_0$ и удовлетворяют соотношениям

$$[X_l, X] = 0, \quad l = \overline{1, m}. \tag{15}$$

Следующее утверждение определяет условие декомпозиции на основании существования симметрий.

**Теорема 2** [3]. *Если в алгебре Ли* $\mathfrak{a}_0$ *существует полное семейство векторных полей*

$$Z_a = b_a^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad l = \overline{1, p}, \;\; p < n,$$

*то система допускает декомпозицию* (9), (10) *системы* (3), *причём агрегатами является полный набор интегралов этого семейства, где* $p = n - m$.

Далее будут другие уточнения структуры системы на основе алгебраических свойств алгебры $\mathfrak{a}_0$.

В подробной записи соотношения (15) имеют вид

$$g_l^j(y, u)\frac{\partial \theta^i}{\partial y^j} - \theta^j(y)\frac{\partial g_l^i}{\partial y^j} = 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \;\; u \in U, \;\; l = \overline{1, m}. \tag{16}$$

## 3. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ОДИНАКОВОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ

Система вида (16) является частным случаем так называемых систем уравнений с частными производными с одинаковой главной частью

$$a_k^j(y)\frac{\partial z^i}{\partial y^j} = b_k^i(y, z), \quad i = \overline{1, n}, \;\; j = \overline{1, m}, \;\; k = \overline{1, r}, \tag{17}$$

где $a_k^j$, $b_k^i$ — гладкие в области $V \times U$ функции, $V \subset \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$.

В общем виде вопрос о совместности и алгоритме нахождения решений систем (17) рассмотрен в статье [6].

**Пример 1.** Приведём систему

$$\partial_k x = 1 + z\partial_k y, \quad \partial_k z = x\partial_k y, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \;\; k = \overline{1, r},$$

к специальному виду:

$$\partial_k x = 1 + zv, \quad \partial_k y = v, \quad \partial_k z = xv, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \;\; k = \overline{1, m}. \tag{18}$$

Найдём алгебру $\mathfrak{a}_0$, состоящую из полей

$$\Theta = \theta^1\frac{\partial}{\partial x} + \theta^2\frac{\partial}{\partial y} + \theta^3\frac{\partial}{\partial z}.$$

Система дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью вида (16) относительно $\theta^i$ определяется как

$$\theta_x^i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad z\theta_x^1 + \theta_y^1 + x\theta_x^1 = \theta^3, \quad z\theta_x^2 + \theta_y^2 + x\theta_z^2 = 0, \quad z\theta_x^3 + \theta_y^3 + x\theta_z^3 = \theta^1 \tag{19}$$

(здесь и далее нижние индексы $x$, $y$, $z$ обозначают производные по соответствующим аргументам). С помощью алгоритма исследования уравнений такого вида [6] получим общее решение системы (19), определяющее совокупность векторных полей, принадлежащих алгебре $\mathfrak{a}_0$:

$$\Theta = (C_1e^y + C_2e^{-y})\frac{\partial}{\partial x} + C_3\frac{\partial}{\partial y} + (C_1e^y - C_2e^{-y})\frac{\partial}{\partial z}, \tag{20}$$

где $C_i = \mathrm{const},\ i = 1,2,3.$

Далее приведём основные результаты, касающиеся частного случая — системы

$$\frac{\partial z^i}{\partial y^j} = b^i_j(y,z), \quad i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{1,m}. \tag{21}$$

Если система (21) имеет решение для любых начальных данных $y_0$, $z_0$, то она называется *вполне интегрируемой.*

**Теорема 3** [3]. *Для того чтобы система дифференциальных уравнений* (21) *была вполне интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы равенства*

$$\frac{\partial b^i_k}{\partial y^j} + \frac{\partial b^i_k}{\partial z^l}b^l_j = \frac{\partial b^i_j}{\partial y^k} + \frac{\partial b^i_j}{\partial z^l}b^l_k \tag{22}$$

*выполнялись тождественно по всем переменным* $y$, $z$.

**Доказательство.** *Необходимость.* Вычислив смешанные производные

$$\frac{\partial^2 z^i}{\partial y^j\partial y^k} = \frac{\partial^2 z^i}{\partial y^k\partial y^j},$$

приходим к равенствам (22) на решениях $z(y)$ и, в частности, в начальных точках $y_0$, $z_0$. Так как последние произвольны, то (22) — тождество по $y$ и $z$.

*Достаточность.* Докажем существование решения системы (21) для некоторых начальных данных $y_0$, $z_0$. Для упрощения записи будем считать, что $y_0 = 0$ (это не нарушает общности результата). Построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dv^i}{dt} = e^k b^i_k(te, v). \tag{23}$$

Здесь $e = (e^1,\ldots,e^m)$ — постоянный вектор. Определим функции $v^i = v^i(t,e)$ как решение системы (23) при начальном условии $v^i(0,e) = z^i_0$. Так как в уравнениях (23) растяжение вектора $e$ в $s$ раз равносильно растяжению $t$ в $s$ раз, то из единственности решения следует, что $v^i(st,e) = v^i(t,se)$. Отсюда, положив $t = 1$ и заменив $s$ на $t$, получим $v^i(t,e) = v^i(1,te)$. Докажем, что функция $z(y) = v(1,y)$ является решением системы (21), причём $z(y_0) = z_0$. Для этого нужно показать, что для функции $z(y)$ выполняются тождества

$$R^i_j(y) = \frac{\partial z^i}{\partial y^j} - b^i_j(y, z(y)) \equiv 0.$$

Рассмотрим функции $S^i_j(t) = R^i_j(t,e)$ и продифференцируем их по $t$. Используя (23) и меняя порядок дифференцирования первого слагаемого по $t$ и $z$, получаем выражения

$$e^k\left(\frac{\partial b^i_k}{\partial y^j} + \frac{\partial b^i_k}{\partial z^l}\frac{\partial z^l}{\partial y^j}\right) - e^k\left(\frac{\partial b^i_j}{\partial y^k} - \frac{\partial b^i_j}{\partial z^l}b^l_k\right).$$

Учитывая (22) и определение $S^i_j$, будем иметь

$$\frac{dS^i_j}{dt} = e^k\frac{\partial b^i_k}{\partial z^l}S^l_j, \quad S^i_j(0) = 0.$$

Итак, функции $S^i_j(t)$ удовлетворяют системе однородных обыкновенных дифференциальных уравнений с нулевыми начальными условиями, поэтому $S^i_j(t) \equiv 0$. Теорема доказана.

**Следствие.** *В случае полной интегрируемости система имеет общее решение, зависящее от $n$ констант*:

$$z^i = \varphi^i(y, c^1, \ldots, c^n), \quad i = \overline{1, n},$$

*так как согласно доказательству теоремы 3 решение сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Равенства смешанных производных в подробной записи имеют вид

$$\frac{\partial b^i_k}{\partial y^j} + \frac{\partial b^i_k}{\partial z^l} b^l_j = \frac{\partial b^i_j}{\partial y^k} + \frac{\partial b^i_j}{\partial z^l} b^l_k.$$

В общем случае уравнения (21), если они не являются тождествами, определяют некоторые связи, накладываемые на искомые функции $z(y)$:

$$\psi^l(y, z) = 0, \quad l \in L. \tag{24}$$

Таким образом, возникает некоторая дополнительная система алгебраических уравнений, которую обозначим через $F_1$. Далее, для исследования существования решений нужно, следуя [4, с. 8], действовать операторами полного дифференцирования $X_l$ на функции из (24). Найденные функции необходимо приравнять к нулю и добавить к равенствам (24). Полученные уравнения либо будут следствиями $F_1$, либо составят новую систему $F_2$. Продолжив этот процесс, получим систему уравнений $F_1$, ..., $F_N$, которые задают некоторое множество $W$ и которые должны быть либо совместны (если система (21) имеет решения), либо несовместны (в противном случае). Представим полученные алгебраические уравнения в разрешённом относительно максимального числа переменных $z$ виде:

$$z^i = \varphi^i(y, z^1, \ldots, z^d), \quad i = \overline{d+1, n}, \;\; d = n - s. \tag{25}$$

Для переменных $z^1$, ..., $z^d$ существует своя вполне интегрируемая система

$$\frac{\partial z^i}{\partial y^j} = \overline{b^i_j}(y, z), \quad i = \overline{1, d}, \;\; j = \overline{1, m}. \tag{26}$$

Тогда [4, с. 9] общее решение системы (21) можно записать в виде (25) и

$$z^i = \varphi^i(y, c^1, \ldots, c^d), \quad i = \overline{1, d}, \tag{27}$$

где $c^i$ — постоянные.

## 4. $L$-СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Далее рассмотрим систему (3) в общем положении, что означает следующее. Напомним сначала, что минимальная алгебра Ли векторных полей, содержащая семейство $\mathfrak{c}_0$, называется *ассоциированной алгеброй Ли* системы (3) и обозначается через $\mathfrak{c}$. Если $\dim \Delta_{\mathfrak{c}}(y) = n$ для любого $y \in M$, где $\Delta_{\mathfrak{c}}$ — распределение, порождаемое ассоциированной алгеброй $\mathfrak{c}$, то говорят, что система (3) находится в общем положении (в определённом смысле почти все системы вида (3) находятся в общем положении [2]). Система в общем положении характеризуется, в частности, отсутствием интегралов, так как базисное семейство (6) алгебры $\mathfrak{c}$ состоит из $n$ полей, т.е. в (6) $p = n$, а интегралы существуют только в случае $p < n$.

Дадим ещё одно определение. Говорят, что алгебра $\mathfrak{c}$ обладает $L$-свойством, если $\dim \mathfrak{c} = \dim \Delta_{\mathfrak{c}}(y)$ для любого $y$, т.е. размерность алгебры совпадает с рангом распределения, порождаемого алгеброй (ранг, естественно, должен быть постоянным). Заметим, что ранг распределения, т.е. величина $\dim\Delta_{\mathfrak{c}}(y)$, никогда не превышает $n$, а алгебра может быть бесконечномерной. Другими словами, $L$-свойство равносильно тому, что базис алгебры состоит из линейно несвязных полей и, следовательно, является базисным семейством распределения $\Delta_{\mathfrak{c}}$. Это определение применяется для любых алгебр Ли (не только для $\mathfrak{c}$).

Будем говорить, что система (3) является $L$-системой, если для этой системы алгебра симметрий $\mathfrak{a}_0$ конечномерна и имеет размерность, равную $n$. Данная терминология принята по аналогии с похожим типом управляемых динамических систем [7].

**Пример 2.** Рассмотрим систему (18) из примера 1. В качестве базисного семейства ассоциированного семейства $\mathfrak{c}_0$ можно взять семейство, состоящее из векторных полей

$$f_0=\frac{\partial}{\partial x},\quad f_1=z\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+x\frac{\partial}{\partial z}.$$

Имеем $[f_0,f_1]=\partial/\partial z$. Таким образом, базисное семейство алгебры $\mathfrak{c}$ состоит из трёх полей $f_0,f_1,f_3=\partial/\partial z$. Поэтому система (18) находится в общем положении. Из (20) вытекает, что алгебра $\mathfrak{a}_0$ является трёхмерной, причём в качестве базиса можно выбрать поля

$$X_1=e^y\frac{\partial}{\partial x}+e^y\frac{\partial}{\partial z},\quad X_2=e^{-y}\frac{\partial}{\partial x}-e^{-y}\frac{\partial}{\partial z},\quad X_3=\frac{\partial}{\partial y}.$$

Тогда (18) — $L$-система.

Для изучения $L$-систем следует обратиться к уравнениям (15), определяющим поля (14) алгебры симметрий $\mathfrak{a}_0$. Заметим, что все поля ассоциированной алгебры $\mathfrak{c}$ системы (3) удовлетворяют соотношениям (15), если им удовлетворяют ассоциированные поля (13) (это вытекает из тождества Якоби). В частности, для базисного семейства (6) распределения $\Delta_{\mathfrak{c}}$ эти уравнения (записанные в виде (16)) имеют следующий вид:

$$b_a^j(y)\frac{\partial\eta^i}{\partial y^j}=\eta^j(y)\frac{\partial b_a^i}{\partial y^j}=0,\quad i,j=\overline{1,n},\ \ a=\overline{1,p}, \tag{28}$$

где $p=\dim\Delta_{\mathfrak{c}}$. Так как исходная система находится в общем положении, то соответствующая система (28) приводится к виду (21) путём умножения левой части (28) на обратную матрицу к $\|b_a^j(y)\|$. Последняя является невырожденной, так как состоит из компонентов базисного семейства (6) алгебры $\mathfrak{c}$ (напомним, что базисное семейство по определению является линейно несвязным). Правые части этих уравнений линейны и однородны по $\eta^i$.

*Случай 1.* Пусть система (26) вполне интегрируема. В таком случае общее решение вида (27) зависит от $n$ произвольных постоянных. Поэтому алгебра $\mathfrak{a}_0$ конечномерна, а её размерность равна $n$. Система (21) в данном случае перепишется как

$$\frac{\partial\theta^i}{\partial y^j}=\Lambda_{jk}^i(y)\theta^k \tag{29}$$

и будет линейной. Понятно, что каждый базис

$$X_l=\theta_l^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i},\quad l=\overline{1,n}, \tag{30}$$

алгебры $\mathfrak{a}_0$ определяется фундаментальной системой решений такой линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, что в терминах семейств векторных полей выражается в линейной несвязности семейства (30). Итак, общее решение системы (16) можно представить в виде

$$X=c^lX_l,\quad l=\overline{1,n},\ \ c^l=\mathrm{const}\,. \tag{31}$$

*Случай 2.* Пусть теперь соотношения (24) не выполняются тождественно. С помощью последовательности $F_1, \ldots, F_N$ построим множество $W$. Уравнения (24), задающие $W$ (для системы (16)), являются линейными и однородными по $\theta^i$. Предположим, что они имеют вид

$$a_i^j(y)\theta^i = 0, \quad j = \overline{1,s}, \ \operatorname{rank}\|a_i^j\|_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,s}} = s. \tag{32}$$

Если в (32) $s = n$, то имеется единственное нулевое решение и, следовательно, алгебра $\mathfrak{a}_0$ нульмерная. Пусть $s < n$. Дальнейшее исследование сводит задачу к случаю 1.

В результате приходим к следующим выводам. Пусть $p = n$ и система (2) находится в общем положении. Тогда в случае 2 получаем, что алгебра $\mathfrak{a}_0$ конечномерна и обладает $L$-свойством, причём $\dim \mathfrak{a}_0 = d = n - s$. Базис алгебры $\mathfrak{a}_0$ образует линейно несвязное семейство векторных полей

$$X_l = \theta_l^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad l = \overline{1,d},$$

а общее решение системы (16) можно представить в виде

$$X = c^l X_l, \quad l = \overline{1,d}, \ c^l = \text{const}\,. \tag{33}$$

Результаты исследований уравнений (16), описывающих алгебру $\mathfrak{a}_0$, сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 4.** *Размерность алгебры симметрий $\mathfrak{a}_0$ управляемой системы* (3) *находится с помощью алгебраических операций. Базисное семейство алгебры $\mathfrak{a}_0$ находится решением систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для управляемой системы* (3) *общего положения базисное семейство алгебры $\mathfrak{a}_0$ совпадает с базисом данной алгебры. Поэтому в таком случае алгебра $\mathfrak{a}_0$ имеет конечную размерность* (*не превышающую $n$*), *обладает $L$-свойством и описывается соотношениями* (31) *или* (33).

Теперь докажем критерий принадлежности к типу $L$-систем.

**Теорема 5.** *Управляемая система* (3) *является $L$-системой тогда и только тогда, когда ассоциированная алгебра Ли $\mathfrak{c}$ системы* (3) *обладает $L$-свойством, причём* $\dim \Delta_{\mathfrak{c}}(y) = \dim \mathfrak{c} = n$ *для любого $y \in M$.*

**Доказательство.** Уравнения (28), связывающие алгебры $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{a}_0$, абсолютно симметричны относительно друг друга, что влечёт одинаковость их свойств. Более того, такого рода связь известна в классической теории групп преобразований Ли для алгебр Ли взаимных просто-транзитивных групп. Эти алгебры изоморфны, обладают $L$-свойством (т.е. ранг каждой алгебры совпадает с размерностью, которая, естественно, конечная, причём в данном случае равна $n$). Уравнения (28) сводятся к уравнениям вида (29), которые вполне интегрируемы.

Пусть алгебра симметрий $\mathfrak{a}_0$ системы (3) имеет размерность $n$ и обладает $L$-свойством. Как уже отмечалось, система (2) в этом случае должна находиться в общем положении, т.е. $\dim \Delta_{\mathfrak{c}}(y) = n$ для любого $y \in M$. Докажем $L$-свойство алгебры $\mathfrak{c}$. Рассмотрим некоторое базисное семейство алгебры $\mathfrak{c}$. Нужно доказать, что это семейство является базисом алгебры $\mathfrak{c}$. Для любого поля $\xi \in \mathfrak{c}$ справедливо представление $\xi = a^\alpha(y) f_\alpha$, где $a^\alpha(y)$ — гладкие функции. Имеем равенства

$$[\xi, \theta] = [a^\alpha(y)h_\alpha, \theta] = a^\alpha(y)[h_\alpha, \theta] - \theta(a^\alpha(y))h_\alpha = -\theta(a^\alpha(y))h_\alpha = 0,$$

где $\theta$ — произвольное поле, принадлежащее $\mathfrak{a}_0$. Так как поля $\xi$ являются линейно несвязными, то $\theta(a^\alpha(y)) = 0$. Следовательно, функции $a^\alpha(y)$ — интегралы алгебры $\mathfrak{a}_0$. Из $L$-свойства этой алгебры следует, что интегралами могут быть только постоянные. Таким образом, рассматриваемое семейство образует базис алгебры $\mathfrak{c}$. Теорема доказана.

**Замечание.** Группы Ли, соответствующие алгебрам $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{a}_0$, являются взаимными просто-транзитивными. Для взаимных просто-транзитивных групп преобразования перестановочны. Структуры их совпадают [4, с. 138].

Рассмотрим классификационные результаты, которые касаются приведения управляемых систем к эквивалентным системам определённого вида и основаны на свойствах алгебры симметрий. Начнём со следующего простого утверждения.

**Предложение.** *Система общего положения* (3) *является $L$-системой тогда и только тогда, когда её можно представить в виде*

$$\dot{y} = h(y)\nu(u), \quad u \in U \subset \mathbb{R}^r, \tag{34}$$

*где матрица $h$ имеет в качестве столбцов гладкие векторные поля $h_\alpha$, $\alpha = \overline{1,n}$, образующие линейно несвязное семейство, причём выполняются соотношения вида*

$$[h_\alpha, h_\beta] = c^\gamma_{\alpha\beta} h_\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = \overline{1,n}, \;\; c^\gamma_{\alpha\beta} = \mathrm{const}\,.$$

**Доказательство.** Пусть система (3) является $L$-системой. Тогда ассоциированная алгебра $\mathfrak{c}$ обладает $L$-свойством. Понятно, что в качестве семейства полей $h_\alpha$, $\alpha = \overline{1,n}$, нужно взять некоторый базис $h_\alpha$, $\alpha = \overline{1,n}$, алгебры $\mathfrak{c}$. Пусть теперь, наоборот, система общего положения (3) представима в виде (34).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью

$$h^j_\alpha(y)\frac{\partial \theta^i}{\partial y^j} - \theta^j(y)\frac{\partial h^i_\alpha}{\partial y^j} = 0, \quad i, j = \overline{1,n}, \;\; \alpha = \overline{1,n}.$$

Эта система уравнений определяет векторные поля

$$\theta = \theta^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \tag{35}$$

удовлетворяющие условию $[h_\alpha, \theta] = 0$, $\alpha = \overline{1,n}$. Из доказательства теоремы 5 непосредственно следует, что поля (35) образуют $n$-мерную алгебру Ли. Из вида системы (34) следует, что эта алгебра содержится в алгебре симметрий $\mathfrak{a}_0$ системы (34). Так как система (34) находится в общем положении, то размерность её алгебры симметрий не может превышать $n$, поэтому построенная алгебра, состоящая из полей (35), совпадает с $\mathfrak{a}_0$. Предложение доказано.

Итак, каждая подалгебра алгебры симметрий $\mathfrak{a}_0$ определяет некоторую декомпозицию вида (9), (10). Декомпозиция, порождаемая подалгебрами алгебры $\mathfrak{a}_0$, имеет некоторую специфику, выражающуюся в специальном виде системы (10). Уточним этот вид.

**Теорема 6.** *Система* (3) *приводится заменой зависимых переменных к системе вида*

$$\dot{z} = g(z, u), \quad z \in N \subset \mathbb{R}^{n-p}, \;\; u \in \mathbb{R}^r, \tag{36}$$

$$\dot{x} = h(x)\nu(z, u), \quad x \in K \subset \mathbb{R}^p, \;\; u \in \mathbb{R}^r, \tag{37}$$

*где $h$ — $p \times p$-матрица, столбцы которой составляют базис $p$-мерной алгебры Ли, обладающей $L$-свойством в области $K$, тогда и только тогда, когда существует $p$-мерная подалгебра $\mathfrak{a}$ алгебры $\mathfrak{a}_0$ системы* (2), *причём $p < n$ и алгебра $\mathfrak{a}$ обладает $L$-свойством.*

**Доказательство.** Пусть существует $p$-мерная подалгебра $\mathfrak{a}$ алгебры $\mathfrak{a}_0$ системы (3), причём $p < n$ и алгебра $\mathfrak{a}$ обладает $L$-свойством. Согласно теореме 2 заменой координат система (3) приводится к декомпозиции, причём первые $m = n - p$ функций

$$z^k = \varphi^k(y), \quad k = \overline{1,m},$$

образуют полный набор интегралов распределения $\Delta_{\mathfrak{a}}$. В качестве остальных $p$ функций можно взять любые функции $x^l = \psi^l(y)$, $l = \overline{m+1, n}$, такие, что в совокупности функции $\varphi^k$ и $\psi^l$ функционально независимы. Первые $m$ уравнений в декомпозированной системе образуют агрегированную систему (36). Рассмотрим последние $n-m$ уравнений в декомпозированной системе

$$\dot{x}^l = g^l(z, x), \quad l = \overline{m+1, n}, \ z \in \mathbb{R}^m, \ x \in \mathbb{R}^p. \tag{38}$$

Уточнение касается именно вида этих уравнений, т.е. нужно показать, что их можно записать в виде (37). Рассмотрим в новой системе координат также векторные поля, принадлежащие алгебре $\mathfrak{a}$. Очевидно, что они будут следующими:

$$\Theta = \vartheta^l(z, x)\frac{\partial}{\partial x^l}, \quad l = \overline{1, p}, \tag{39}$$

т.е. первые $m$ компонент равны нулю. Будем трактовать уравнения (38) как управляемую систему в пространстве фазовых переменных $x$, считая переменные $z$ параметрами. Аналогичную трактовку применим к полям (39): поля (39) образуют алгебру симметрий управляемой системы (38) и, следовательно, система (38) является $L$-системой (для каждого фиксированного значения $z$). Поэтому можно применить предложение с учётом наличия параметра $z$, что выражается в зависимости функции $\nu$ от $z$.

Предположим теперь, что система (3) приводится к системе (36), (37). Очевидно, что в пространстве переменных $x$ система (37) является $L$-системой (для каждого фиксированного значения $z$) и имеет $p$-мерную алгебру симметрий, которая обладает $L$-свойством и состоит из векторных полей вида (39). В пространстве переменных $(z, x)$ эти поля образуют алгебру симметрий системы (36), (37). Теорема доказана.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе уточнена структура систем дифференциальных уравнений с частными производными, для которых алгебра симметрий имеет некоторый специальный вид. Эта структура имеет ярко выраженный алгебраический характер и, в частности, ярко выраженные декомпозиционные свойства, причём структура таких систем может детально уточняться.

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Елкин, В.И. Применение дифференциально-геометрических методов теории управления в теории дифференциальных уравнений с частными производными. I / В.И. Елкин // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 11. — С. 1474–1482.
2. Елкин, В.И. Применение дифференциально-геометрических методов теории управления в теории дифференциальных уравнений с частными производными. II / В.И. Елкин // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 11. — С. 1453–1460.
3. Елкин, В.И. Применение дифференциально-геометрических методов теории управления в теории дифференциальных уравнений с частными производными. III / В.И. Елкин // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 1. — С. 55–63.
4. Эйзенхарт, Л.П. Непрерывные группы преобразований / Л.П. Эйзенхарт ; пер. с англ. М.М. Постникова. — М. : Изд-во Иностр. лит-ры, 1947. — 359 с.
5. Овсянников, Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 399 с.

6. Елкин, В.И. Общее решение систем уравнений в частных производных с одинаковой главной частью / В.И. Елкин // Дифференц. уравнения. — 1985. — Т. 21, № 8. — С. 1389–1398.
7. Яковенко, Г.Н. Теория управления регулярными системами / Г.Н. Яковенко. — М. : БИНОМ, 2008. — 264 с.

## APPLICATION OF DIFFERENTIAL-GEOMETRIC METHODS OF CONTROL THEORY TO THE THEORY OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS. IV

 **V. I. Elkin**

*Federal Research Center "Informatics and Control" of RAS, Moscow, Russia*
*e-mail: elk_v@mail.ru*

We consider the symmetries of partial differential equations based on the use of differential-geometric and algebraic methods of the theory of dynamical control systems.

*Keywords:* symmetry, decomposition

REFERENCES

1. Elkin, V.I., Application of differential-geometric methods of control theory to the theory of partial differential equations. I, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 11, pp. 1451–1459.
2. Elkin, V.I., Application of differential-geometric methods of control theory to the theory of partial differential equations. II, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 11, pp. 1450–1456.
3. Elkin, V.I., Application of differential-geometric methods of control theory to the theory of partial differential equations. III, *Differ. Equat.*, 2024, vol. 60, no. 1, pp. 56–64.
4. Eisenhart, L.P., *Continuous Groups of Transformations*, Princeton: Princeton Univ. Press, 1933.
5. Ovsyannikov, L.V., *Gruppovoy analiz differentsial'nykh uravneniy* (Group Analysis of Differential Equations), Moscow: Nauka, 1978.
6. Elkin, V.I., General solution of systems of partial differential equations with identical principal part, *Differ. Uravn.*, 1985, vol. 21, no. 8, pp. 1389–1398.
7. Yakovenko, G.N., *Teoriya upravleniya regulyarnymi sistemami* (Control Theory of Regular Systems), Moscow: Binom, 2008.