ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 3, с. 330–353

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ДЕВЯТОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

© 2025 г. М. В. Шамолин

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@rambler.ru

Поступила в редакцию 15.08.24 г., после доработки 02.12.24 г.; принята к публикации 26.12.24 г.

Представлены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем девятого порядка, в которых может быть выделена система на кокасательном расслоении к четырёхмерному многообразию. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм.

Ключевые слова: интегрируемость, однородная система, знакопеременная диссипация, тензорный инвариант

DOI: 10.31857/S0374064125030048, EDN: HMUNXU

ВВЕДЕНИЕ

Найдено достаточное количество тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов), что, как известно [1–3], облегчает исследование систем дифференциальных уравнений, а иногда даёт возможность и точно их проинтегрировать. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объёма позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных (в частности, гамильтоновых) систем, когда фазовый поток сохраняет объём с гладкой (или постоянной) плотностью, этот факт естественен.

Сложнее (в смысле гладкости инвариантов) дело обстоит для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Для таких систем коэффициенты искомых инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [4]).

Рассматриваемый в данной работе подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m нужно знать $m-1$ независимых тензорных инвариантов. При этом для достижения интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Важные случаи интегрируемых систем с четырьмя степенями свободы в неконсервативном поле сил рассматривались в работах [5, 6] автора. Настоящее исследование распространяет полученные результаты на более широкий класс динамических систем. В указанных работах акцент делался на нахождении достаточного количества именно первых интегралов. Но, как известно, иногда полного набора первых интегралов для систем может и не быть, при этом достаточное количество инвариантных форм может быть обеспечено.

Для систем классической механики понятия “консервативность”, “силовое поле”, “диссипация” и др. вполне естественны. Поскольку в данной работе изучаются системы на касательном расслоении к гладкому многообразию, уточним для них данные понятия.

Анализ “в целом” начинается с исследования приведённых уравнений геодезических на четырёхмерной поверхности, левые части которых при правильной параметризации представляют собой записи координат ускорения движения материальной частицы по такой поверхности, а правые части приравнены к нулю. Тогда величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, можно рассматривать как некоторые обобщённые силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать “силовые поля”. Так, например, введя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат (по одной из квазискоростей системы) касательного пространства, получим *силовое поле с диссипацией разного знака* (в зависимости от знака самого коэффициента). И хотя словосочетание “диссипация разного знака” несколько противоречиво, тем не менее остановимся на нём, учитывая при этом, что в математической физике диссипация “со знаком “плюс” — это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация “со знаком “минус” — это своеобразная “подкачка” энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии, называются *диссипативными*, а силы, обеспечивающие подкачку энергии, называются *разгоняющими*).

Консервативность для систем на касательных расслоениях можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим следующее. Будем считать, что *система консервативна*, если она обладает полным набором гладких первых интегралов, т.е. не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она обладает указанными предельными множествами, то будем говорить, что система в той или иной области фазового пространства обладает диссипацией какого-то знака и, как следствие, хотя бы одним первым интегралом (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В данной работе силовое поле разделяется на так называемые внутреннее и внешнее поля. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы, а внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Вид внутренних силовых полей заимствован из классической пространственной динамики твердого тела (см., например, [7, 8]). Внешнее поле вводится с помощью унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

Приводятся первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы однородных по части переменных динамических систем девятого порядка, в которых может быть выделена система с четырьмя степенями свободы на своём восьмимерном многообразии.

1. СИСТЕМЫ ДЕВЯТОГО ПОРЯДКА ПРИ ОТСУТСТВИИ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ

Пусть v, α, $\beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $z=(z_1,z_2,z_3,z_4)$ — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α, β следующим образом:

$$(\dot v,\dot z_4,\ldots,\dot z_1,v\dot\alpha,v\dot\beta_1,v\dot\beta_2,v\dot\beta_3)^{\mathrm{T}}=A(\alpha,\beta)P,$$
$$P=(v^2,vz_4,\ldots,vz_1,z_4^2,z_4z_3,z_4z_2,z_4z_1,z_3^2,z_3z_2,z_3z_1,z_2^2,z_2z_1,z_1^2)^{\mathrm{T}},\tag{1}$$

где $A(\alpha,\beta)$ — матрица размерности 9×15.

Вводя новую независимую переменную q $(dq = vdt,\ d/dq = <'>,\ v \neq 0)$, а также фазовые переменные $Z_k,\ z_k = Z_k v,\ k = \overline{1,4},\ Z = (Z_1, \ldots, Z_4)$, перепишем систему (1) в следующем виде:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{2}$$

где

$$\Psi(\alpha, Z) = A_v(\alpha, \beta)Q,$$

$$Q = (1, Z_4, \ldots, Z_1, Z_4^2, Z_4Z_3, Z_4Z_2, Z_4Z_1, Z_3^2, Z_3Z_2, Z_3Z_1, Z_2^2, Z_2Z_1, Z_1^2)^{\mathrm{т}},$$

$$(Z_4', \ldots, Z_1', \alpha', \beta_1', \beta_2', \beta_3')^{\mathrm{т}} = \hat{A}(\alpha, \beta)Q - (Z_4\Psi(\alpha, Z), \ldots, Z_1\Psi(\alpha, Z), 0, 0, 0, 0)^{\mathrm{т}}, \tag{3}$$

$A_v(\alpha, \beta)$ — первая строка матрицы $A(\alpha, \beta)$, а $\hat{A}(\alpha, \beta)$ — матрица $A(\alpha, \beta)$ без первой строки, т.е.

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} A_v(\alpha, \beta) \\ \hat{A}(\alpha, \beta) \end{pmatrix}.$$

При этом уравнение (2) на v отделяется, что даёт возможность рассматривать восемь оставшихся уравнений в качестве системы (3) на восьмимерном фазовом многообразии $N^8\{Z; \alpha, \beta\}$.

В дальнейшем ограничимся следующим важным частным случаем системы (2), (3) девятого порядка:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha)f_4(\alpha), \quad \tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \tag{4}$$

$$\alpha' = f_4(\alpha)Z_4 + b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\delta(\alpha),$$

$$Z_4' = -f_4(\alpha)[\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha)]Z_4^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta)Z_3^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta)Z_2^2 -$$

$$- \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_4\Psi(\alpha, Z) = \zeta_4(Z; \alpha, \beta),$$

$$Z_3' = -f_4(\alpha)[2\Gamma_{\alpha 1}^{1}(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)]Z_3Z_4 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^{1}(\alpha, \beta)Z_2^2 -$$

$$- \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^{1}(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z) = \zeta_3(Z; \alpha, \beta),$$

$$Z_2' = -f_4(\alpha)[2\Gamma_{\alpha 2}^{2}(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)]Z_2Z_4 - f_1(\alpha)[2\Gamma_{12}^{2}(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)]Z_2Z_3 -$$

$$- \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^{2}(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z) = \zeta_2(Z; \alpha, \beta),$$

$$Z_1' = -f_4(\alpha)[2\Gamma_{\alpha 3}^{3}(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha)]Z_1Z_4 - f_1(\alpha)[2\Gamma_{13}^{3}(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1)]Z_1Z_3 -$$

$$- f_2(\alpha)g_1(\alpha)[2\Gamma_{23}^{3}(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2)]Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z) = \zeta_1(Z; \alpha, \beta),$$

$$\beta_1' = Z_3f_1(\alpha), \quad \beta_2' = Z_2f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \quad \beta_3' = Z_1f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2), \tag{5}$$

$DQ(\xi) = d\ln|Q(\xi)|/d\xi,\ b \geqslant 0,\ \delta(\alpha),\ f_1(\alpha),\ \ldots,\ f_4(\alpha),\ g_1(\beta_1),\ g_2(\beta_1),\ h(\beta_2),\ \Gamma_{jk}^{i}(\alpha, \beta),\ i, j, k = \alpha, \beta,$ — некоторые гладкие функции. Будем рассматривать систему (4), (5) как *систему при отсутствии внешнего поля сил*.

Уравнение (4) отделяется, что даёт возможность рассматривать уравнения (5) в качестве независимой системы (с четырьмя степенями свободы) на восьмимерном многообразии $N^8\{Z; \alpha, \beta\} = TM^4\{Z; \alpha, \beta\}$ (касательном расслоении $M^4\{\alpha, \beta\}$, см. также [9, 10]).

Система (4), (5) имеет более общий вид, чем соответствующая система в [11, 12], рассматриваемая в динамике пятимерного твёрдого тела. Эти системы совпадают при

$$b=\sigma n_1,\quad \delta(\alpha)=\sin\alpha,$$

$$f_1(\alpha)\equiv f_2(\alpha)\equiv f_3(\alpha)=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad f_4(\alpha)\equiv -1,\quad g_1(\beta_1)\equiv g_2(\beta_1)=-\frac{1}{\sin\beta_1},\quad h(\beta_2)=-\frac{1}{\sin\beta_2},$$

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\equiv 0,\quad \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin^2\beta_1,\quad \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2,$$

$$\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^3_{\alpha3}(\alpha,\beta)=\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin(2\alpha)},$$

$$\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)=-\sin\beta_1\cos\beta_1,\quad \Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)=\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},$$

$$\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)=-\sin\beta_1\cos\beta_1\sin^2\beta_2,\quad \Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)=\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},\quad \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)=-\sin\beta_2\cos\beta_2.$$

Рассмотрим структуру системы (5). Она соответствует следующим уравнениям геодезических линий с 13 ненулевыми коэффициентами связности на касательном расслоении $TM^4\{\dot\alpha,\dot\beta_1,\dot\beta_2,\dot\beta_3;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ многообразия $M^4\{\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ (в частности, на расслоении четырёхмерной поверхности вращения, в пространстве Лобачевского):

$$\begin{gathered}\ddot\alpha+\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2+\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2+\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2+\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2=0,\\ \ddot\beta_1+2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2+\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2=0,\\ \ddot\beta_2+2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2+2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2+\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2=0,\\ \ddot\beta_3+2\Gamma^3_{\alpha3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3+2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3+2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3=0.\end{gathered}\tag{6}$$

Действительно, выбрав новые координаты $z_1,\ \ldots,\ z_4$ в касательном пространстве в виде

$$\dot\alpha=z_4f_4(\alpha),\quad \dot\beta_1=z_3f_1(\alpha),\quad \dot\beta_2=z_2f_2(\alpha)g_1(\beta_1),\quad \dot\beta_3=z_1f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2),\tag{7}$$

получим следующие соотношения (ср. с (5)):

$$Z'_k=\zeta_k(Z;\alpha,\beta),\quad k=\overline{1,4},\tag{8}$$

при этом уравнения (6) почти всюду эквивалентны совокупности (7), (8), которая, прежде всего, присутствует в системе (5). Здесь для полной ясности лучше изменить независимую переменную и вместо (7) выбрать равенства

$$\alpha'=Z_4f_4(\alpha),\quad \beta'_1=Z_3f_1(\alpha),\quad \beta'_2=Z_2f_2(\alpha)g_1(\beta_1),\quad \beta'_3=Z_1f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2).$$

Отметим задачи, приводящие к уравнениям (6).

I. Системы на касательном расслоении к четырёхмерной сфере. Здесь необходимо выделить два вида метрик на сфере: 1) метрика, индуцированная евклидовой метрикой объёмлющего пятимерного пространства (естественна для изучения задачи о движении точки по сфере); 2) приведённая метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для пространственного движения динамически симметричного пятимерного твёрдого тела (см. [13]).

II. Системы на касательном расслоении более общей четырёхмерной поверхности вращения.

III. Системы на касательном расслоении четырёхмерного пространства Лобачевского в модели Клейна.

В системе (4), (5) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geqslant 0$, но они не нарушают консервативности, поскольку эта система обладает полным набором (шестью) гладких первых интегралов.

1.1. КОЛИЧЕСТВО “НЕИЗВЕСТНЫХ” ФУНКЦИЙ И НАКЛАДЫВАЕМЫЕ НА НИХ УСЛОВИЯ

Различных ненулевых коэффициентов связности в общих уравнениях геодезических на касательном расслоении четырёхмерного гладкого многообразия, вообще говоря, будет $n^2(n+1)/2$, т.е. 40 коэффициентов (при $n=4$). Как видно, общая задача интегрирования уравнений геодезических достаточно сложна. К данному количеству коэффициентов связности добавляются еще функции (в нашем случае $f_1(\alpha)$, ..., $f_4(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ из (7)), определяющие координаты на касательном расслоении.

Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся лишь 13 ($n(n-1)+1$ функцией при $n=4$) ненулевыми коэффициентами связности, формирующими уравнения геодезических (6). При этом по такому количеству выбирается и количество функций, определяющих координаты на касательном расслоении — их будет 7 ($n(n-1)/2+1$ функция при $n=4$). Итак, мы имеем 20 функций, характеризующих геометрию фазового многообразия и координаты на нём.

Каково же количество $B(4)$ накладываемых условий на имеющиеся $A(4)=20$ функций ($A(n)=3n(n-1)/2+2$ функции при $n=4$)? Данные условия являются достаточными для полного интегрирования уравнений геодезических. Понятно, что таких функциональных условий должно быть меньше 20, иначе задача не имеет смысла. Вопрос — на сколько меньше, потому что чем меньше число $B(4)$, тем больше разность $A(4)-B(4)$ и тем больше систем уравнений геодезических допускают полный набор инвариантов для их интегрирования.

В данной работе будем накладывать $B(4)=16$ условий на имеющиеся $A(4)=20$ функций. Число $B(4)$ состоит из трёх слагаемых: $B(4)=B_1(4)+B_2(4)+B_3(4)$.

Число $B_1(4)$ равно количеству условий, накладываемых на функции $f_1(\alpha)$, ..., $f_4(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$, а именно,

$$f_1(\alpha) \equiv f_2(\alpha) \equiv f_3(\alpha) =: f(\alpha), \quad g_1(\beta_1) \equiv g_2(\beta_1) =: g(\beta_1), \tag{9}$$

т.е. $B_1(4)=3$ (в общем случае $B_1(n)=(n-1)(n-2)/2$). Число $B_2(4)$ равно количеству условий, накладываемых на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{gathered}\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma_1(\alpha),\\ \Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma_2(\beta_1), \quad \Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma_3(\beta_2),\end{gathered} \tag{10}$$

т.е. $B_2(4)=6$ (в общем случае $B_2(n)=n(n-1)/2$). Число $B_3(4)$ равно количеству алгебраических и дифференциальных условий, накладываемых и на функции $f_1(\alpha)$, ..., $f_4(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$, и на коэффициенты связности, а именно,

$$f_4^2(\alpha)[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+Df_1(\alpha)]+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) \equiv 0,$$

$$f_4^2(\alpha)[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)+Df_2(\alpha)]+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0,$$

$$f_4^2(\alpha)[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)+Df_3(\alpha)]+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) \equiv 0,$$

$$f_1^2(\alpha)[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+Dg_1(\beta_1)]+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0,$$

$$f_1^2(\alpha)[2\Gamma_{13}^3(\alpha,\beta)+Dg_2(\beta_1)]+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha,\beta)\equiv 0,$$

$$f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma_{23}^3(\alpha,\beta)+Dh(\beta_2)\right]+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha,\beta)\equiv 0,$$

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha,\beta)+Df_4(\alpha)\equiv 0, \tag{11}$$

т.е. $B_3(4)=7$ (в общем случае $B_3(n)=n(n-1)/2+1$).

Видно, что в общем случае $B(n)=B_1(n)+B_2(n)+B_3(n)=(n-1)^2+n(n-1)/2+1$, при этом $A(n)-B(n)=3n(n-1)/2+2-(n-1)^2-n(n-1)/2-1=n$, что говорит об увеличении количества “произвольных” функций по сравнению с условиями, накладываемыми на них, ровно на n (n — размерность рассматриваемого многообразия). В нашем случае $A(4)-B(4)=4$.

Замечание 1. Пусть выполнены условия (9), (10), при этом реализуется система равенств (11). Тогда справедливы следующие 7 ($n(n-1)/2+1$ при $n=4$) тождеств:

$$\Gamma_{11}^\alpha(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_{11}^\alpha(\alpha),\quad \Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta_1),\quad \Gamma_{33}^\alpha(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_{33}^\alpha(\alpha,\beta_1,\beta_2),$$

$$\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_{22}^1(\beta_1),\quad \Gamma_{33}^1(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_{33}^1(\beta_1,\beta_2),\quad \Gamma_{33}^2(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_{33}^2(\beta_2),\quad \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha), \tag{12}$$

а также 3 ($(n-1)(n-2)/2$ при $n=4$) тождества

$$\Gamma_{11}^\alpha(\alpha)\equiv g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta_1)\equiv g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha,\beta_1,\beta_2)=:\Gamma_4(\alpha),$$

$$\Gamma_{22}^1(\beta_1)\equiv h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\beta_1,\beta_2). \tag{13}$$

Следующее замечание является в некотором смысле обратным к замечанию 1.

Замечание 2. Пусть выполнены условия (9), (10), при этом реализуются 10 тождеств (12) и (13). Тогда систему дифференциальных равенств (11) можно записать в следующем виде:

$$\Gamma_{11}^\alpha(\alpha)\equiv\Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta_1)g^2(\beta_1)\equiv\Gamma_{33}^\alpha(\alpha,\beta_1,\beta_2)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)=:\Gamma_4(\alpha),$$

$$\Gamma_{22}^1(\beta_1)\equiv\Gamma_{33}^1(\beta_1,\beta_2)h^2(\beta_2),\quad \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha)+\frac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\equiv 0,$$

$$f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\equiv 0,$$

$$2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}+g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1)\equiv 0,$$

$$2\Gamma_3(\beta_2)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}+h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\beta_2)\equiv 0. \tag{14}$$

Таким образом, при выполнении 9 условий (9), (10) 7 условий (11) и 7 условий (14) в упомянутом смысле эквивалентны.

1.2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Для полного интегрирования системы девятого порядка достаточно знать, вообще говоря, 8 независимых инвариантов.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (4), (5) достаточно знать 6 независимых тензорных инвариантов: или 6 первых интегралов, или 6 независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию из интегралов и форм с общим количеством, равным 6. При этом, конечно, инварианты (в частности, для случая отсутствия внешнего поля сил) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее (ср. с [14, 15]).

Тот факт, что полный набор состоит из 6, а не из 8 тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет обоснован ниже.

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических линий (6), записанных в виде

$$\ddot{x}^i+\sum_{j,k=1}^{4}\Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k=0,\quad i=\overline{1,4},$$

является гладкая функция

$$\Phi(\dot{x};x)=\sum_{j,k=1}^{h}g_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k,$$

но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым "выпрямив" квадратичную форму на фазовом многообразии.

Кроме того, в следующей теореме 1 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 16 алгебраических и дифференциальных соотношений (9), (10), (14) на 20 функций: на 7 функций $f_1(\alpha)$, ..., $f_4(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ из (7) и на 13, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ из (6).

Теорема 1. *Если выполнены условия* (9), (10), (14), *то система* (4), (5), *рассмотренная на произведении* $\mathbb{R}^1_+\{v\}\times TM^4\{Z_4,\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$, *обладает полным набором, состоящим из* 6 *гладких первых интегралов вида*

$$\Phi_0(v;Z_4;\alpha)=v^2(1+2bZ_4\Delta(\alpha))=C_0;\tag{15}$$

$$\Phi_1(v;Z_4,\ldots,Z_1)=v^2(Z_1^2+\ldots+Z_4^2)=C_1^2;\tag{16}$$

$$\Phi_2(v;Z_3,Z_2,Z_1;\alpha)=v^2\sqrt{Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2}\,\Delta(\alpha)=C_2,$$

$$\Delta(\alpha)=A_1f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)\,db\right\};\tag{17}$$

$$\Phi_3(v;Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1)=v^2\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}\,\Delta(\alpha)\Psi_1(\beta_1)=C_3,$$

$$\Psi_1(\beta_1)=g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)\,db\right\};\tag{18}$$

$$\Phi_4(v;Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2)=v^2Z_1\Delta(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2)=C_4,$$

$$\Psi_2(\beta_2)=h(\beta_2)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2}\Gamma_3(b)\,db\right\};\tag{19}$$

$$\Phi_5(\beta_2,\beta_3)=\beta_3\pm\int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2}\frac{C_4h(b)}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(b)-C_4^2}}\,db=C_5,\tag{20}$$

где C_i, $i=\overline{0,5}$, A_1 — *постоянные.*

Более того, после некоторого её приведения с помощью замен независимой

$$d/dt=f_4(\alpha)d/d\tau\tag{21}$$

и фазовых

$$w_4 = Z_4, \quad w_3^* = \ln|w_3|, \quad w_3 = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2},$$

$$w_s^* = \ln\Big|w_s + \sqrt{1 + w_s^2}\Big|, \quad s = 1, 2, \quad w_2 = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad w_1 = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}} \tag{22}$$

переменных, фазовый поток системы (4), (5) *сохраняет фазовый объём с плотностью* $\rho(v;\alpha) = v^3/f_4(\alpha)$ *на произведении* $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times TM^4\{w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, *т.е. не меняется соответствующая внешняя дифференциальная форма*

$$\frac{v^3}{f_4(\alpha)}\, dv \wedge dw_4 \wedge dw_3^* \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3.$$

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы, а именно, сделаем замены независимой (21) и фазовых (22) переменных. Тогда система (4), (5) при выполнении условий (9), (10), (14) распадается следующим образом:

$$v' = v\Psi_1(\alpha, w), \quad \Psi_1(\alpha, w) = -b(e^{2w_3^*} + w_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha), \tag{23}$$

$$\alpha' = w_4 + b(e^{2w_3^*} + w_4^2)\Delta(\alpha),$$

$$w_4' = -\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}\Gamma_4(\alpha)e^{2w_3^*} - w_4\Psi_1(\alpha, w),$$

$$w_3'^* = \frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}\Gamma_4(\alpha)w_4 - \Psi_1(\alpha, w), \tag{24}$$

$$\dot{w}_2^* = \pm e^{w_3^*}\frac{1}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right],$$

$$\dot{\beta}_2 = \pm\frac{W_2(w_2^*)e^{w_3^*}}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*))(1 + W_2^2(w_2^*))}}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}g(\beta_1), \tag{25}$$

$$\dot{w}_1^* = \pm e^{w_3^*}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right],$$

$$\dot{\beta}_1 = \pm\frac{W_1(w_1^*)e^{w_3^*}}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \tag{26}$$

$$\dot{\beta}_3 = \pm\frac{e^{w_3^*}}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*))(1 + W_2^2(w_2^*))}}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}g(\beta_1)h(\beta_2), \tag{27}$$

где в силу замены (22)

$$w_s = W_s(w_s^*), \quad s = 1, 2.$$

В составной системе (23)–(27) штрихом обозначена производная по новой независимой переменной τ.

Видно, что для полной интегрируемости системы (23)–(27) достаточно указать 2 независимых тензорных инварианта системы (24) — по одному для систем (25), (26) (после соответствующих замен независимых переменных в них), и 2 дополнительных тензорных инварианта, “привязывающих” уравнения (23) и (27) (т.е. всего 6).

Нахождение с множителем $\rho(v;\alpha,\beta;w)$ дивергенции векторного поля $W_0(v;\alpha,\beta;w)$ системы (23)–(27) есть не что иное как вычисление дивергенции поля $\rho(v;\alpha,\beta,w)W_0(v;\alpha,\beta;w)$

преобразованной системы (т.е. системы (23)–(27), умноженной на $\rho(v;\alpha,\beta;w)$) после замены $\rho(v;\alpha,\beta;w)d/dt_1=d/dt_2$ “старой” независимой переменной t_1 на новую независимую переменную t_2 в системе (23)–(27).

Используем для вычисления дивергенции векторного поля $W_0(v;\alpha,\beta;w)$ системы (23)–(27) функцию $\rho(v)=v^3$. Имеем

$$\operatorname{div}[v^3W_0(v;\alpha,\beta;w)]=-4v^3b(e^{2w_3^*}+w_4^2)\tilde\Delta(\alpha)+v^3b(e^{2w_3^*}+w_4^2)\tilde\Delta(\alpha)+$$
$$+v^3b(e^{2w_3^*}+3w_4^2)\tilde\Delta(\alpha)+2v^3be^{2w_3^*}\tilde\Delta(\alpha)+0+0+0+0+0\equiv 0,$$

что и доказывает вторую часть теоремы.

Докажем первую часть теоремы о существовании первых интегралов. Дифференцирование функции (15) в силу системы (4), (5) при выполнении условий (9), (10), (14) даёт

$$2bv^2f_4(\alpha)(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\left(\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Delta(\alpha)-\frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}\right)\equiv 0,$$

поскольку тождество

$$\frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Delta(\alpha) \tag{28}$$

выполнено тогда и только тогда, когда выполнено второе уравнение из (17).

Дифференцирование функции (16) в силу системы (4), (5) в условиях теоремы даёт

$$-\frac{2v^2}{f_4(\alpha)}Z_1^2Z_4\left(f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\right)-$$
$$-2v^2f(\alpha)Z_1^2Z_3\left(2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\alpha)|}{d\beta_1}+g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1)\right)-$$
$$-2v^2f(\alpha)g(\beta_1)Z_1^2Z_2\left(2\Gamma_3(\beta_2)+\frac{d\ln|h(\alpha)|}{d\beta_2}+h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\beta_2)\right)-$$
$$-\frac{2v^2}{f_4(\alpha)}Z_2^2Z_4\left(f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\right)-$$
$$-2v^2f(\alpha)Z_2^2Z_3\left(2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\alpha)|}{d\beta_1}+g^2(\beta_2)\Gamma_{22}^1(\beta_1)\right)-$$
$$-\frac{2v^2}{f_4(\alpha)}Z_3^2Z_4\left(f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\right)\equiv 0.$$

Продифференцировав функцию Φ_2 из (17) в силу системы (4), (5), с учётом условий теоремы получим

$$-v^2f_4(\alpha)\sqrt{Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2}\,Z_4\left(\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Delta(\alpha)-\frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}\right).$$

Но, благодаря второму уравнению из (17), функция $\Delta(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (28), что и доказывает наличие первого интеграла (17).

Дифференцирование функции (18) в силу системы (4), (5) в условиях теоремы даёт

$$-v^2f_4(\alpha)\left(\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Delta(\alpha)-\frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}\right)\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}\,Z_4\Psi_1(\beta_1)-$$
$$-v^2f(\alpha)\left(\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)-\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right)\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}\,Z_3\Delta(\alpha).$$

Но функции $\Delta(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям (28) и

$$\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1), \tag{29}$$

что и доказывает наличие первого интеграла (18).

Дифференцирование функции (19) в силу системы (4), (5) в условиях теоремы даёт

$$-v^2f_4(\alpha)\left(\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Delta(\alpha)-\frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}\right)Z_1Z_4\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2)-$$

$$-v^2f(\alpha)\left(\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)-\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right)Z_1Z_3\Delta(\alpha)\Psi_2(\beta_2)-$$

$$-v^2f(\alpha)g(\beta_1)\left(\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]\Psi_2(\beta_2)-\frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2}\right)Z_1Z_2\Delta(\alpha)\Psi_1(\beta_1).$$

Но функции $\Delta(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$ и $\Psi_2(\beta_2)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям (28), (29) и

$$\frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2}=\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]\Psi_2(\beta_2), \tag{30}$$

что и доказывает наличие первого интеграла (19).

Далее, рассмотрим два уровня C_3 и C_4 первых интегралов (18) и (19) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\mp\frac{C_4}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(\beta_2)-C_4^2}}. \tag{31}$$

Угол β_3 будем искать из следующего уравнения, полученного из двух последних уравнений системы (5): $d\beta_3/d\beta_2=Z_1h(\beta_2)/Z_2$. Используя в нём равенство (31), получаем требуемое утверждение о наличии первого интеграла (20). Теорема доказана.

Заметим, что равенства (11) могут трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (16). Описания истории и текущего состояния данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [16, 17]). Ну а первые интегралы можно искать, основываясь на наличии в системе дополнительных групп симметрий.

Пример 1. В случае обобщённых сферических координат $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, когда метрика на четырёхмерной сфере $\mathbf{S}^4$ индуцирована евклидовой метрикой объемлющего пятимерного пространства (задача класса I), система девятого порядка, при получении которой использованы уравнения геодезических

$$\ddot\alpha-[\dot\beta_1^2+\dot\beta_2^2\sin^2\beta_1+\dot\beta_3^2\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2]\sin\alpha\cos\alpha=0,$$

$$\ddot\beta_1+2\dot\alpha\dot\beta_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-(\dot\beta_2^2+\dot\beta_3^2\sin^2\beta_2)\sin\beta_1\cos\beta_1=0,$$

$$\ddot\beta_2+2\dot\alpha\dot\beta_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+2\dot\beta_1\dot\beta_2\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}-\dot\beta_3^2\sin\beta_2\cos\beta_2=0,$$

$$\ddot\beta_3+2\dot\alpha\dot\beta_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+2\dot\beta_1\dot\beta_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+2\dot\beta_2\dot\beta_3\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}=0, \tag{32}$$

имеющая первые интегралы (15)–(20), примет следующий вид:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\cos\alpha,$$

$$\alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\sin\alpha,$$

$$Z_4' = -(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_4\Psi(\alpha, Z),$$

$$Z_3' = Z_3 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2)\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_3\Psi(\alpha, Z),$$

$$Z_2' = Z_2 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2 Z_3 \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2 \frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - Z_2\Psi(\alpha, Z),$$

$$Z_1' = Z_1 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1 Z_3 \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1 Z_2 \frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - Z_1\Psi(\alpha, Z),$$

$$\beta_1' = Z_3 \frac{1}{\sin\alpha}, \quad \beta_2' = -Z_2 \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \quad \beta_3' = Z_1 \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}.$$

Пример 2. В случае обобщённых сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, когда метрика на четырёхмерной сфере $\mathbf{S}^4$ индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (задача класса I, см. также [8, 18]), система девятого порядка, при получении которой использованы уравнения геодезических

$$\ddot\alpha - [\dot\beta_1^2 + \dot\beta_2^2\sin^2\beta_1 + \dot\beta_3^2\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2]\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0,$$

$$\ddot\beta_1 + \dot\alpha\dot\beta_1\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} - (\dot\beta_2^2 + \dot\beta_3^2\sin^2\beta_2)\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0,$$

$$\ddot\beta_2 + \dot\alpha\dot\beta_2\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_2\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \dot\beta_3^2\sin\beta_2\cos\beta_2 = 0,$$

$$\ddot\beta_3 + \dot\alpha\dot\beta_3\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + 2\dot\beta_2\dot\beta_3\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} = 0,$$

имеющая первые интегралы (15)–(20), примет следующий вид:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\cos\alpha,$$

$$\alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\sin\alpha,$$

$$Z_4' = -(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_4\Psi(\alpha, Z),$$

$$Z_3' = Z_3 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_3\Psi(\alpha, Z),$$

$$Z_2' = Z_2 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - Z_2\Psi(\alpha, Z),$$

$$Z_1' = Z_1 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1 Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - Z_1\Psi(\alpha, Z),$$

$$\beta_1' = Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \beta_2' = -Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \quad \beta_3' = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}.$$

Пример 3. В случае четырёхмерного пространства Лобачевского (с координатами $x=\beta_1$, $y=\beta_2$, $z=\beta_3$, $w=\alpha$, задача класса III) система девятого порядка, при получении которой использованы уравнения геодезических

$$\ddot{\alpha}-\frac{1}{\alpha}(\dot{\alpha}^2-\dot{\beta}_1^2-\dot{\beta}_2^2-\dot{\beta}_3^2)=0,\quad \ddot{\beta}_1-\frac{2}{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta}_1=0,\quad \ddot{\beta}_2-\frac{2}{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta}_2=0,\quad \ddot{\beta}_3-\frac{2}{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta}_3=0,$$

имеющая первые интегралы (15)–(20), примет следующий вид:

$$v'=v\Psi(\alpha,Z),\quad \Psi(\alpha,Z)=b(Z_1^2+\ldots+Z_4^2)\frac{1}{\alpha^2},$$
$$\alpha'=Z_4\alpha+b(Z_1^2+\ldots+Z_4^2)\frac{1}{\alpha},\quad Z_4'=-Z_3^2-Z_2^2-Z_1^2-Z_4\Psi(\alpha,Z),$$
$$Z_3'=Z_3Z_4-Z_3\Psi(\alpha,Z),\quad Z_2'=Z_2Z_4-Z_2\Psi(\alpha,Z),\quad Z_1'=Z_1Z_4-Z_1\Psi(\alpha,Z),$$
$$\beta_1'=Z_3\alpha,\quad \beta_2'=Z_2\alpha,\quad \beta_3'=Z_1\alpha.$$

Может показаться излишним поиск инвариантных дифференциальных форм после нахождения полного набора, а именно, 6 первых интегралов рассматриваемой системы, поскольку она уже интегрируема в квадратурах (интегрируема точно). Но, как известно [1, 19], не всегда можно найти полный набор первых интегралов, а полный набор инвариантных дифференциальных форм фазового объёма может быть найден независимо от первых интегралов, что также будет свидетельствовать о точной интегрируемости системы. Другое дело, что из полного набора функционально независимых дифференциальных форм фазового объёма можно будет получить некоторые первые интегралы.

2. ДОБАВЛЕНИЕ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ И ГЛАДКОСТЬ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Теперь перейдём к некоторому усложнению, добавив следующим образом в систему (4), (5) при условиях (9), (10), (14) (лишь в уравнение на Z_4') внешнее гладкое силовое поле $-F(\alpha)f_4(\alpha)$, $F(0)=0$, $dF(0)/d\alpha>0$, при наличии внутреннего ($b>0$), при этом пусть, в частности, $f_4(\alpha)\equiv -1$.

Исследуем вопрос устойчивости по Ляпунову тривиального решения рассматриваемой системы (для этого некоторые коэффициенты необходимо доопределить по непрерывности) по части переменных α, Z_4, …, Z_1. Соответствующие уравнения на α', Z_4', …, Z_1' примут вид

$$\alpha'=-Z_4+b(Z_1^2+\ldots+Z_4^2)\delta(\alpha),$$
$$Z_4'=F(\alpha)+f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)(Z_3^2+Z_2^2+Z_1^2)+bZ_4(Z_1^2+\ldots+Z_4^2)\tilde{\delta}(\alpha),$$
$$Z_3'=-f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)Z_3Z_4-f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1)(Z_2^2+Z_1^2)+bZ_3(Z_1^2+\ldots+Z_4^2)\tilde{\delta}(\alpha),$$
$$Z_2'=-f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)Z_2Z_4+f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1)Z_2Z_3-$$
$$-f(\alpha)g(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\beta_2)Z_1^2+bZ_2(Z_1^2+\ldots+Z_4^2)\tilde{\delta}(\alpha),$$
$$Z_1'=-f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)Z_1Z_4+f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1)Z_1Z_3+$$
$$+f(\alpha)g(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\beta_2)Z_1Z_2+bZ_1(Z_1^2+\ldots+Z_4^2)\tilde{\delta}(\alpha). \qquad (33)$$

Может создаться впечатление, что система осталась консервативной (что, действительно, имеет место при $b=0$, т.е. при отсутствии внутреннего поля). Консервативность “подтвердилась” бы наличием в системе 6 гладких (автономных) первых интегралов.

Рассмотрим следующую функцию (Ляпунова) для уравнений (33):

$$W(Z_4,\ldots,Z_1;\alpha)=Z_1^2+\ldots+Z_4^2+2\int\limits_0^\alpha F(\xi)\,d\xi,\quad F(0)=0,\quad \frac{dF(0)}{d\alpha}>0, \tag{34}$$

которая в проколотой окрестности начала координат положительна.

Утверждение. *Если функции $\tilde\delta(\alpha)$ и $F(\alpha)\delta(\alpha)$ строго одного знака в проколотой окрестности начала координат, то начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (33), является либо притягивающей, либо отталкивающей точкой.*

Доказательство. Полная производная функции (34) в силу уравнений (33) равна

$$b(Z_1^2+\ldots+Z_4^2)^2\tilde\delta(\alpha)+b(Z_1^2+\ldots+Z_4^2)F(\alpha)\delta(\alpha). \tag{35}$$

Если функции $\tilde\delta(\alpha)$ и $F(\alpha)\delta(\alpha)$ одновременно отрицательны в проколотой окрестности начала координат, то начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (33), — притягивающая точка.

Если функции $\tilde\delta(\alpha)$ и $F(\alpha)\delta(\alpha)$ одновременно положительны в проколотой окрестности начала координат, то начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (33), — отталкивающая точка.

Следствие 1. *В условиях утверждения рассматриваемая система, содержащая уравнения (33), не может обладать полным набором гладких первых интегралов.*

Следствие 2. *В динамике пятимерного твёрдого тела [20] в системах, где присутствуют уравнения вида (33), функции $\delta(\alpha)$ и $F(\alpha)$ имеют следующий вид: $\delta(\alpha)=\sin\alpha$, $F(\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha$. Тогда правую часть равенства (35) можно записать как*

$$b(Z_1^2+\ldots+Z_4^2)\cos\alpha[Z_1^2+\ldots+Z_4^2+\sin^2\alpha].$$

Видно, что в данном случае начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (33), — отталкивающая точка.

Итак, при добавлении в систему (4), (5) при условиях (9), (10), (14) (лишь в уравнение на Z_4') внешнего гладкого силового поля $-F(\alpha)f_4(\alpha)$, $F(0)=0$, $dF(0)/d\alpha>0$, при наличии внутреннего поля ($b>0$) рассматриваемая система, вообще говоря, уже не будет консервативной.

3. ВВЕДЕНИЕ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ С ДИССИПАЦИЕЙ ЧЕРЕЗ УНИМОДУЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Модифицируем систему (4), (5) при наличии двух ключевых параметров $b\geqslant 0$, $b_1\neq 0$, введя внешнее гладкое силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)f_4(\alpha)$ в уравнение на Z_4' системы (36), (37) и даже положив при этом $b_1=0$, то полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет иметь место (как показано в п. 2) при дополнительном условии $b=0$.

Мы расширим введение силового поля, положив $b>0$, $b_1\neq 0$. При этом (как и выше) сделаем вспомогательную замену независимой переменной t на τ по формуле $d/dt=f_4(\alpha)d/d\tau$ и будем по-прежнему штрихом обозначать производную по τ. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $TM^4\{Z_4,\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ примет вид

$$v'=v\Psi(\alpha,Z),\quad \Psi(\alpha,Z)=-b(Z_1^2+\ldots+Z_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha)+b_1F(\alpha)\Delta(\alpha), \tag{36}$$

$$\alpha'=Z_4+b(Z_1^2+\ldots+Z_4^2)\Delta(\alpha)+b_1F(\alpha)\overline{f}(\alpha),\quad \overline{f}(\alpha)=\frac{\mu-\Delta^2(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)},$$

$$Z_4'=F(\alpha)-[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+Df_4(\alpha)]Z_4^2-\frac{f_1^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)Z_3^2-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)Z_2^2-$$

$$-\frac{f_3^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)Z_1^2-Z_4\Psi(\alpha,Z),$$

$$Z_3'=-[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)+Df_1(\alpha)]Z_3Z_4-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)f_4(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)Z_2^2-$$

$$-\frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)f_4(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)Z_1^2-Z_3\Psi(\alpha,Z),$$

$$Z_2'=-[2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)+Df_2(\alpha)]Z_2Z_4-\frac{f_1(\alpha)}{f_4(\alpha)}[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+Dg_1(\beta_1)]Z_2Z_3-$$

$$-\frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)f_4(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)Z_1^2-Z_2\Psi(\alpha,Z),$$

$$Z_1'=-[2\Gamma^3_{\alpha3}(\alpha,\beta)+Df_3(\alpha)]Z_1Z_4-\frac{f_1(\alpha)}{f_4(\alpha)}[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)+Dg_2(\beta_1)]Z_1Z_3-$$

$$-\frac{f_2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1(\alpha)[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)+Dh(\beta_2)]Z_1Z_2-Z_1\Psi(\alpha,Z),$$

$$\beta_1'=Z_3\frac{f_1(\alpha)}{f_4(\alpha)},\quad \beta_2'=Z_2\frac{f_2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1(\beta_1),\quad \beta_3'=Z_1\frac{f_3(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_2(\beta_1)h(\beta_2), \tag{37}$$

здесь $\mu>0$ — параметр. При этом коэффициенты консервативной составляющей внутреннего силового поля содержат параметр b, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Таким образом, введено составное силовое поле со знакопеременной диссипацией (или с диссипацией переменного знака) с помощью некоторого *унимодулярного преобразования.*

Силовое поле в уравнениях на v', Z' определяется функцией $\Psi(\alpha,Z)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из уравнения на α', а во второй — коэффициенты из функции $\Psi(\alpha,Z)$. Тогда совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра $b\geqslant0$, $b_1\neq0$, $\mu>0$) будет иметь вид

$$U\begin{pmatrix} b(Z_1^2+\ldots+Z_4^2)\\ b_1F(\alpha)\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}\Delta(\alpha) & \overline{f}(\alpha)\\ -\tilde{\Delta}(\alpha) & \Delta(\alpha)\end{pmatrix},$$

где U — преобразование с определителем, равным μ, являющееся унимодулярным преобразованием при $\mu=1$. В частности, если $\mu=1$, а $\Delta(\alpha)=\cos\alpha$ или $\Delta(\alpha)=\sin\alpha$, то данное преобразование задаёт поворот на угол α. Более того, такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого, см. [8]).

4. СИСТЕМЫ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Перейдём теперь к интегрированию системы девятого порядка (36), (37) при выполнении свойств (9), (10), (14), которые обеспечивают отделение независимой подсистемы седьмого порядка. Как будет показано, для полного интегрирования системы (36), (37) достаточно знать 6 независимых тензорных инвариантов: или 6 первых интегралов, или 6 независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию из интегралов и форм с общим количеством, равным 6. При этом, конечно, инварианты можно искать и в более общем виде, чем предложено далее.

Кроме того, ниже в теореме 2 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 16 алгебраических и дифференциальных соотношений (9), (10), (14) на 20 функций: на 7 функций $f_1(\alpha)$, ..., $f_4(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ и на 13, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$.

После замены фазовых переменных (22) система (36), (37) при условиях (9), (10), (14) распадается следующим образом:

$$v' = v\Psi_0(\alpha,w), \quad \Psi_0(\alpha,w) = -b(w_3^2+w_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha)+b_1F(\alpha)\Delta(\alpha), \tag{38}$$

$$\begin{gathered} \alpha' = w_4 + b(w_3^2+w_4^2)\Delta(\alpha)+b_1F(\alpha)\overline{f}(\alpha), \\ w_4' = F(\alpha)-\Gamma_4(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}w_3^2 - w_4\Psi_0(\alpha,w), \\ w_3' = \Gamma_4(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}w_3w_4 - w_3\Psi_0(\alpha,w), \end{gathered} \tag{39}$$

$$\begin{gathered} w_2' = \pm w_3\sqrt{\frac{1+w_2^2}{1+w_1^2}}f(\alpha)g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right], \\ \beta_2' = \pm\frac{w_2w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}}f(\alpha)g(\beta_1), \end{gathered} \tag{40}$$

$$\begin{gathered} w_1' = \pm w_3\sqrt{1+w_1^2}f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \beta_1' = \pm\frac{w_1w_3}{\sqrt{1+w_1^2}}f(\alpha), \end{gathered} \tag{41}$$

$$\beta_3' = \pm\frac{w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2). \tag{42}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (38)–(42) достаточно указать 2 независимых тензорных инварианта системы (39) — по одному для систем (40), (41) (после соответствующих замен независимых переменных в них), и 2 дополнительных тензорных инварианта, “привязывающих” уравнения (38) и (42) (т.е. всего 6).

Внесём ограничения на силовое поле. Пусть для некоторого $\kappa\in\mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}\Gamma_4(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\Delta(\alpha)| = \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \tag{43}$$

а для некоторого $\lambda\in\mathbb{R}$ — равенство

$$F(\alpha) = \lambda\frac{d}{d\alpha}\frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda\tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha). \tag{44}$$

Условие (43) назовём “геометрическим”, а условие (44) — “энергетическим”. Первое названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_4(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$ при участии функций $f_1(\alpha), \ldots, f_4(\alpha)$, входящих в кинематические соотношения. Второе названо энергетическим в том числе потому, что (внешние) силы становятся в некотором смысле “потенциальными” по отношению к “силовой” функции $\Delta^2(\alpha)/2$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом сама функция $\Delta(\alpha)$ и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую (знако)переменную диссипацию (см. также [11, 12]).

Теорема 2. *Пусть для некоторых чисел $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ выполняются условия (43) и (44). Тогда система (38)–(42) обладает полным набором — 6 независимыми первыми интегралами (1 гладким и 5, вообще говоря, имеющими существенно особые точки). Кроме того, она также обладает 6 инвариантными дифференциальными формами, между собой независимыми, но зависимыми с первыми интегралами.*

Доказательство. Сначала сопоставим системе третьего порядка (39) неавтономную систему второго порядка

$$\frac{dw_4}{d\alpha}=\frac{F(\alpha)-f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)w_3^2/f_4^2(\alpha)+bw_4(w_3^2+w_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha)-b_1w_4F(\alpha)\Delta(\alpha)}{w_4+b(w_3^2+w_4^2)\Delta(\alpha)+b_1F(\alpha)\overline{f}(\alpha)},$$

$$\frac{dw_3}{d\alpha}=\frac{f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)w_3w_4/f_4^2(\alpha)+bw_3(w_3^2+w_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha)-b_1w_3F(\alpha)\Delta(\alpha)}{w_4+b(w_3^2+w_4^2)\Delta(\alpha)+b_1F(\alpha)\overline{f}(\alpha)}. \tag{45}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_4=u_2\Delta(\alpha), \quad w_3=u_1\Delta(\alpha), \quad \Delta(\alpha)=\frac{\delta(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \tag{46}$$

приведём систему (45) к следующему виду:

$$\Delta(\alpha)\frac{du_2}{d\alpha}=\frac{F(\alpha)-f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_4^2(\alpha)-\tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha)u_2^2-b_1\mu u_2F(\alpha)}{u_2\Delta(\alpha)+b(u_1^2+u_2^2)\Delta^3(\alpha)+b_1F(\alpha)\overline{f}(\alpha)},$$

$$\Delta(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha}=\frac{[f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)/f_4^2(\alpha)-\tilde{\Delta}(\alpha)/\Delta(\alpha)]\Delta^2(\alpha)u_1u_2-b_1\mu u_1F(\alpha)}{u_2\Delta(\alpha)+b(u_1^2+u_2^2)\Delta^3(\alpha)+b_1F(\alpha)\overline{f}(\alpha)}, \tag{47}$$

здесь и далее $\tilde{\Delta}(\alpha)=d\Delta(\alpha)/d\alpha$.

Теперь для интегрирования системы (47) нам потребуется выполнение геометрического (43) и энергетического (44) условий.

Действительно, после их выполнения из системы (47) вытекают следующие дифференциальные соотношения:

$$\Delta\frac{du_2}{d\Delta}=\frac{\lambda-\kappa u_1^2-u_2^2-b_1\lambda\mu u_2}{u_2+b(u_1^2+u_2^2)\Delta^2+b_1\lambda(\mu-\Delta^2)}, \quad \Delta\frac{du_1}{d\Delta}=\frac{(\kappa-1)u_1u_2-b_1\lambda\mu u_1}{u_2+b(u_1^2+u_2^2)\Delta^2+b_1\lambda(\mu-\Delta^2)}, \tag{48}$$

из которых легко следует уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1}=\frac{\lambda-\kappa u_1^2-u_2^2-b_1\lambda\mu u_2}{(\kappa-1)u_1u_2-b_1\lambda\mu u_1}. \tag{49}$$

Уравнение (49) есть уравнение Абеля и его общее решение имеет достаточно громоздкий вид. В частности, при $\kappa=-1$ данное уравнение имеет первый интеграл

$$\frac{u_2^2+u_1^2+b_1\lambda\mu u_2-\lambda}{u_1}=C_1=\mathrm{const}, \tag{50}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_4,w_3;\alpha)=G_1\left(\frac{w_4}{\Delta(\alpha)},\frac{w_3}{\Delta(\alpha)}\right)=\frac{w_4^2+w_3^2+b_1\lambda\mu w_4\Delta(\alpha)-\lambda\Delta^2(\alpha)}{w_3\Delta(\alpha)}=C_1. \tag{51}$$

Система (38)–(42) является динамической системой с переменной диссипацией. При $F(\alpha)\equiv 0$ она превращается в консервативную систему (или в систему (4), (5), в которой необходимо перейти к новой независимой переменной по формуле (21), или в систему (23)–(27), в которой уже введены фазовые переменные (22)). Так, система (4), (5), в частности, при некоторых естественных условиях обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (16), (17) $(Z\to w)$. Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1=0$, то система (38)–(42) при условии (44) обладает первым интегралом вида

$$\Theta|_{B=0}(B;v;w_4,w_3;\alpha)=v^2(w_3^2+w_4^2-\lambda\Delta^2(\alpha))=\mathrm{const}, \tag{52}$$

где $\Theta(B;v;w_4,w_3;\alpha)=v^2(w_3^2+w_4^2+B\lambda\mu w_4\Delta(\alpha)-\lambda\Delta^2(\alpha))$ — семейство функций, зависящих от параметра $B\geqslant 0$. Очевидно, что отношение двух первых интегралов (52), (17) $(Z\to w)$ также является первым интегралом системы (38)–(42) при $F(\alpha)\not\equiv 0$, но $b_1=0$. При $b_1>0$ каждая из функций

$$\Theta|_{B=b_1}(B;v;w_4,w_3;\alpha)=v^2(w_3^2+w_4^2+b_1\lambda\mu w_4\Delta(\alpha)-\lambda\Delta^2(\alpha))=\mathrm{const} \tag{53}$$

и (17) $(Z\to w)$ по отдельности не является первым интегралом системы (38)–(42). Однако отношение функций (53), (17) $(Z\to w)$ является первым интегралом (51) системы (38)–(42) (для упрощения при $\kappa=-1$) при любом $b_1>0$.

Далее найдём явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (39) при $\kappa=-1$. Для этого преобразуем сначала инвариантное соотношение (50) при $u_1\neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2+\frac{b_1\lambda\mu}{2}\right)^2+\left(u_1-\frac{C_1}{2}\right)^2=\frac{b_1^2\lambda^2\mu^2+C_1^2}{4}+\lambda. \tag{54}$$

Видно, что параметры данного соотношения должны удовлетворять условию

$$b_1^2\lambda^2\mu^2+C_1^2+4\lambda\geqslant 0 \tag{55}$$

и фазовое пространство системы (39) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (54). Таким образом, в силу соотношения (50) первое уравнение системы (47) при условиях (43) и (44) можно записать как

$$\Delta\frac{du_2}{d\Delta}=\frac{\lambda-\kappa u_1^2-u_2^2-b_1\lambda\mu u_2}{u_2+b(u_1^2+u_2^2)\Delta^2+b_1\lambda(\mu-\Delta^2)}.$$

Тогда дополнительный первый интеграл системы третьего порядка (39) при $\kappa=-1$ найдётся из уравнения Бернулли

$$\frac{d\Delta}{du_2}=\frac{(b_1\lambda\mu+u_2)\Delta+\{b[U^2(C_1,u_2)+u_2^2]-b_1\lambda\}\Delta^3}{u(u_2)+U^2(C_1,u_2)}, \tag{56}$$

$$U(C_1,u_2)=\frac{1}{2}\left(C_1\pm\sqrt{C_1^2+4u(u_2)}\right),\quad u(u_2)=\lambda-b_1\lambda\mu u_2-u_2^2,$$

при этом постоянная C_1 выбирается из условия (55).

Полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = G_2\left(\Delta(\alpha), \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \quad (57)$$

Выражение первого интеграла (57) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$ (а она, в принципе, может не быть элементарной функцией).

Таким образом, для интегрирования системы девятого порядка (38)–(42) при некоторых условиях уже найдены 2 независимых первых интеграла системы (39). Для полной же её интегрируемости достаточно найти 2 первых интеграла — по одному для систем (40), (41) (меняя в них независимые переменные), становящихся независимыми подсистемами после соответствующих замен независимых переменных, а также еще 2 (дополнительных) первых интеграла, "привязывающих" уравнения (38) и (42).

Первые интегралы для систем (40), (41) следующие:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \mathrm{const}, \quad s = 1, 2 \quad (58)$$

(о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2$, см. (18), (19)). Действительно, системам (40), (41) можно сопоставить, соответственно, уравнения первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + Dj(\beta_s)], \quad s = 1, 2, \ \ j = g, h,$$

интегрирование которых и даёт искомые первые интегралы (58).

Для получения искомого первого интеграла, "привязывающего" уравнение (42), рассмотрим уровень C_4 первого интеграла (58). На этом уровне справедливо равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \mp\frac{1}{\sqrt{C_4^2\Psi_2^2(\beta_2) - 1}}. \quad (59)$$

Угол β_3 будем искать из уравнения, полученного из двух последних уравнений системы (37): $d\beta_3/d\beta_2 = Z_1/(Z_2 h(\beta_2))$. Используя в нём равенство (59), получаем требуемое утверждение о наличии следующего первого интеграла, "привязывающего" уравнение (42):

$$\Theta_5(\beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \frac{h(b)}{\sqrt{C_4^2\Psi_2^2(b) - 1}}\, db = C_5 = \mathrm{const}. \quad (60)$$

Нетрудно проверить, что у системы (38)–(42) существует гладкий первый интеграл, который, например, при $b = -b_1$ имеет вид

$$\Theta_0(v; w_4, w_3; \alpha) = v^2(1 + 2bw_4\Delta(\alpha) - b^2\mu(w_3^2 + w_4^2)) = C_0 = \mathrm{const} \quad (61)$$

и "привязывает" уравнение (38).

Продолжим доказательство теоремы 2.

I. Составная рассматриваемая система (38)–(42) при выполнении свойств (43), (44) имеет следующий вид ($w_3^* = \ln|w_3|$, $w_s^* = \ln|w_s + \sqrt{1+w_s^2}|$, $s = 1, 2$):

$$v' = X_v(v; w_4, w_3^*; \alpha) = v\Psi_1(\alpha, w), \quad \Psi_1(\alpha, w) = -b(e^{2w_3^*} + w_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1\lambda\Delta^2(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha), \quad (62)$$

$$\alpha' = X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha) = w_4 + b(e^{2w_3^*} + w_4^2)\Delta(\alpha) + b_1\lambda\Delta(\alpha)(\mu - \Delta^2(\alpha)),$$

$$w_4' = X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha) = \lambda\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}\, e^{2w_3^*} - w_4\Psi_1(\alpha, w),$$

$$w_3'^* = X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha) = \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}\, w_4 - \Psi_1(\alpha, w), \tag{63}$$

$$w_2'^* = X_{w_2^*}(w_3^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \pm\frac{e^{w_3^*}}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right],$$

$$\beta_2' = X_{\beta_2}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1) = \pm\frac{W_2(w_2^*)e^{w_3^*}}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*))(1 + W_2^2(w_2^*))}}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}g(\beta_1), \tag{64}$$

$$w_1'^* = X_{w_1^*}(w_3^*; \alpha, \beta_1) = \pm e^{w_3^*}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right],$$

$$\beta_1' = X_{\beta_1}(w_3^*, w_1^*; \alpha) = \pm\frac{W_1(w_1^*)e^{w_3^*}}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \tag{65}$$

$$\beta_3' = X_{\beta_3}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \pm\frac{e^{w_3^*}}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*))(1 + W_2^2(w_2^*))}}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}g(\beta_1)h(\beta_2), \tag{66}$$

при этом в составной системе (62)–(66) величины $w_s = W_s(w_s^*)$, $s = 1, 2$, — функции в силу замен выше (или см. также (22)).

В принципе, замены $w_s \to w_s^*$, $s = 1, 2, 3$, носят технический характер, и при этом можно использовать как переменные w_s^*, так и переменные w_s.

Для составной системы (62)–(66) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, соответствующие дифференциальным формам объёма

$$\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)dv \wedge dw_4 \wedge dw_3^* \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3,$$

из следующего линейного дифференциального уравнения с частными производными:

$$\operatorname{div}\bigl[\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)X(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\bigr] = 0, \tag{67}$$

$$X(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \{X_v(v; w_4, w_3^*; \alpha), X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha), X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha),$$
$$X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha), X_{w_2^*}(w_3^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2), X_{\beta_2}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1),$$
$$X_{w_1^*}(w_3^*; \alpha, \beta_1), X_{\beta_1}(w_3^*, w_1^*; \alpha), X_{\beta_3}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)\}$$

— векторное поле рассматриваемой составной системы (62)–(66) в координатах $(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Уравнение (67) запишется в виде

$$X_v(v; w_4, w_3^*; \alpha)\rho_v + X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha)\rho_\alpha + X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha)\rho_{w_4} + X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha)\rho_{w_3^*} +$$
$$+ X_{w_2^*}(w_3^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)\rho_{w_2^*} + X_{\beta_2}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1)\rho_{\beta_2} +$$
$$+ X_{w_1^*}(w_3^*; \alpha, \beta_1)\rho_{w_1^*} + X_{\beta_1}(w_3^*, w_1^*; \alpha)\rho_{\beta_1} + X_{\beta_3}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)\rho_{\beta_3} =$$
$$= -\rho\operatorname{div} X(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3). \tag{68}$$

Как было указано для систем меньшего порядка, вычисление с некоторым множителем $\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ дивергенции векторного поля $X(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ системы (62)–(66) есть не что иное, как вычисление дивергенции векторного поля

$$\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) X(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

преобразованной системы (т.е. (62)–(66), умноженной на $\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$) после замены $\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) d/dt_1 = d/dt_2$ “старой” независимой переменной t_1 на “новую” независимую переменную t_2 в системе (62)–(66).

Используем для нахождения дивергенции векторного поля $X(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ системы (62)–(66) функцию $\rho(v) = v^3$. Имеем

$$\operatorname{div}[v^3 X(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)] = -4v^3 b(e^{2w_3^*} + w_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + v^3 b(e^{2w_3^*} + w_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha) +$$

$$+ v^3 b(e^{2w_3^*} + 3w_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + 2v^3 b e^{2w_3^*}\tilde{\Delta}(\alpha) + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 4v^3 b_1 \lambda \Delta^2(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha) +$$

$$+ v^3 b_1 \lambda \tilde{\Delta}(\alpha)(\mu - 3\Delta^2(\alpha)) - v^3 b_1 \lambda \Delta^2(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha) - 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \equiv v^3 b_1 \lambda \mu \tilde{\Delta}(\alpha).$$

Тогда преобразованная система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (68) с частными производными примет следующий вид:

$$\begin{gathered}
v' = v^3 X_v(v; w_4, w_3^*; \alpha), \\
\alpha' = v^3 X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha), \quad w_4' = v^3 X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha), \quad w_3'^* = v^3 X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha), \\
w_2'^* = v^3 X_{w_2^*}(w_3^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2), \quad \beta_2' = v^3 X_{\beta_2}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1), \\
w_1'^* = v^3 X_{w_1^*}(w_3^*; \alpha, \beta_1), \quad \beta_1' = v^3 X_{\beta_1}(w_3^*, w_1^*; \alpha), \\
\beta_3' = v^3 X_{\beta_3}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2), \quad \rho' = -v^3 b_1 \lambda \mu \tilde{\Delta}(\alpha)\rho
\end{gathered} \tag{69}$$

(здесь штрихом обозначено дифференцирование по новой независимой переменной).

У системы, состоящей из первых 9 уравнений системы (69), уже найдены 6 первых интегралов (61), (51), (57), (58) и (60) (полный набор). Найдём и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (последнее уравнение системы (69)) на функцию ρ.

Действительно, из системы уравнений (69) можно получить соотношение

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = \frac{-\rho[b_1\lambda\mu]\tilde{\Delta}(\alpha)}{w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\Delta(\alpha) + b_1\lambda\Delta(\alpha)(\mu - \Delta^2(\alpha))}.$$

Тогда, вводя в рассмотрение однородные координаты (46), будем иметь

$$\Delta \frac{d\rho}{d\Delta} = \frac{-\rho[b_1\lambda\mu]}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}. \tag{70}$$

Теперь из соотношения (70) и первого соотношения (48) вытекает дифференциальное равенство (при $\kappa = -1$)

$$\frac{d\rho}{du_2} = \frac{-\rho[b_1\lambda\mu]}{\lambda - b_1\lambda\mu u_2 - u_2^2 + u_1^2},$$

а из него — квадратура

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{-[b_1\lambda\mu]du_2}{U_2(C_1, u_2)}, \quad U_2(C_1, u_2) = 2u(u_2) + C_1 U(C_1, u_2)$$

(о функциях $u(u_2)$ и $U(C_1, u_2)$ см. (56)).

Становится справедливым инвариантное соотношение

$$\rho \exp\left\{b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\} = C_\rho = \text{const}\,.$$

Отсюда, в частности, следует, что одним из возможных вариантов инвариантной дифференциальной формы объёма является форма

$$v^3 \exp\left\{-b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\} dv\wedge dw_4\wedge dw_3^*\wedge dw_2^*\wedge dw_1^*\wedge d\alpha\wedge d\beta_1\wedge d\beta_2\wedge d\beta_3, \quad u_2 = \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}.$$

Общее же решение линейного дифференциального уравнения (68) примет вид

$$\rho = v^3 \exp\left\{-b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\} \mathcal{F}[\Theta_0,\Theta_1,\ldots,\Theta_5],$$

где $\mathcal{F}[\Theta_0,\Theta_1,\ldots,\Theta_5]$ — произвольная гладкая функция 6 аргументов, при этом Θ_0, Θ_1, … …, Θ_5 — независимые первые интегралы (61), (51), (57), (58) и (60) соответственно.

В частности, за 6 функционально независимых решений линейного уравнения (68) с частными производными можно взять следующие функции ($u_2 = w_4/\Delta(\alpha)$, $u_1 = w_3/\Delta(\alpha)$, $w_3^* = \ln|w_3|$, $w_s^* = \ln\bigl|w_s + \sqrt{1+w_s^2}\bigr|$, $s = 1,2$):

$$\rho_0(v;w_4,w_3^*;\alpha) = v^3 \exp\left\{-b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\} \Theta_0(v;w_4,w_3^*;\alpha),$$

$$\rho_1(v;w_4,w_3^*;\alpha) = v^3 \exp\left\{-b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\} \Theta_1(w_4,w_3^*;\alpha),$$

$$\rho_2(v;w_4,w_3^*;\alpha) = v^3 \exp\left\{-b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\} \Theta_2(w_4,w_3^*;\alpha),$$

$$\rho_3(v;w_4,w_2^*;\alpha,\beta_2) = v^3 \exp\left\{-b_1\lambda\,\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\} \Theta_3(w_2^*;\beta_2),$$

$$\rho_3(v;w_4,w_1^*;\alpha,\beta_1) = v^3 \exp\left\{-b_1\lambda\,\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\} \Theta_4(w_1^*;\beta_1),$$

$$\rho_4(v;w_4;\alpha,\beta_2,\beta_3) = v^3 \exp\left\{-b_1\lambda\,\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\} \Theta_5(\beta_2,\beta_3).$$

II. Рассмотрим далее системы (40) и (41). Поскольку они могут быть приведены к независимым подсистемам, проведём рассуждения об "автономном" поиске инвариантных дифференциальных форм, хотя общий подход для поиска таких форм уже описан выше.

После некоторого их приведения — замен независимых переменных по формулам

$$\frac{d}{dt} = \pm \frac{w_3}{\sqrt{1+w_1^2}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1) \frac{d}{d\tau}, \quad \frac{d}{dt} = \pm w_3 \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} \frac{d}{d\tau}$$

— системы (40) и (41) можно объединить следующим образом:

$$\dot{w}_s = X_{w_s}(w_s;\beta_s) = \sqrt{1+w_s^2}\left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d\ln|j(\beta_s)|}{d\beta_s}\right],$$
$$\dot{\beta}_s = X_{\beta_s}(w_s;\beta_s) = \frac{w_s}{\sqrt{1+w_s^2}}, \quad s = 1,2, \ \ j = h,g, \tag{71}$$

при этом в системе (71) штрихом обозначена также производная по новой независимой переменной τ.

При каждом $s=1,2$ для системы (71) будем искать интегральный инвариант с плотностью $\rho(w_s;\beta_s)$, соответствующей дифференциальной форме площади $\rho(w_s;\beta_s)dw_s\wedge d\beta_s$, из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div}[\rho(w_s;\beta_s)X(w_s;\beta_s)]=0, \tag{72}$$

где $X(w_s;\beta_s)=\{X_{w_s}(w_s;\beta_s),X_{\beta_s}(w_s;\beta_s)\}$ — векторное поле рассматриваемой системы (71) в координатах $(w_s;\beta_s)$. Уравнение (72) запишем как

$$X_{w_s}(w_s;\beta_s)\rho_{w_s}+X_{\beta_s}(w_s;\beta_s)\rho_{\beta_s}=-\rho\operatorname{div}X(w_s;\beta_s), \tag{73}$$

$$\operatorname{div}X(w_s;\beta_s)=\frac{w_s}{\sqrt{1+w_s^2}}\left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s)+\frac{d\ln|j(\beta_s)|}{d\beta_s}\right]. \tag{74}$$

Тогда система уравнений характеристик (для каждого $s=1,2$) линейного дифференциального уравнения (73) с частными производными примет вид

$$\dot w_s=X_{w_s}(w_s;\beta_s),\quad \dot\beta_s=X_{\beta_s}(w_s;\beta_s),\quad \dot\rho=-\rho\frac{w_s}{\sqrt{1+w_s^2}}\left[2\Gamma_{s+2}(\beta_s)+\frac{d\ln|j(\beta_s)|}{d\beta_s}\right]. \tag{75}$$

У системы, состоящей из первых двух уравнений системы (75), уже найден первый интеграл (58) (для любого $s=1,2$). Найдём ещё дополнительный независимый первый интеграл.

Сопоставим двум последним уравнениям системы (75) неавтономное уравнение

$$\frac{d\rho}{d\beta_s}=-\rho\left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s)+\frac{d\ln|j(\beta_s)|}{d\beta_s}\right],\quad s=1,2,$$

которое даёт следующее инвариантное соотношение:

$$\Theta_{\rho_{s+2}}(\beta_s;\rho)=\rho\cdot\Psi_s(\beta_s)=C_{\rho_{s+2}}=\mathrm{const},$$

являющееся вторым (недостающим) первым интегралом системы уравнений характеристик (75) (для каждого $s=1,2$). О функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s=1,2$, см. (18), (19).

Таким образом, общее решение линейного уравнения (73) (для каждого $s=1,2$) примет следующий вид: $\rho=\mathcal{G}[\Theta_{s+2}]/\Psi_s(\beta_s)$, где $\mathcal{G}[\Theta_{s+2}]$ — произвольная гладкая функция одного аргумента, при этом Θ_{s+2} — первый интеграл (58).

В частности, если в качестве функции $\mathcal{G}[\Theta_{s+2}]$ выбрать $\mathcal{G}[\Theta_{s+2}]=1/\Theta_{s+2}=\Psi_s(\beta_s)/\sqrt{1+w_s^2}$, то за решение линейного уравнения (73) (для каждого $s=1,2$) можно взять функцию $\rho_{s+2}(w_s;\beta_s)=1/\sqrt{1+w_s^2}$. Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как известно, понятие интегрируемости достаточно многообразное. В работе предложены полные наборы не только первых интегралов, но и инвариантных дифференциальных форм для однородных систем девятого порядка. Эти наборы содержат в себе почти всюду гладкие функции, имеющие существенно особые точки. Если в случае консервативных систем инварианты определяются гладкими функциями своих фазовых переменных, то при внесении в систему достаточно общего диссипативного силового поля обязаны появиться инварианты, гладкость которых разрушается из-за наличия в системе существенно особых точек. Такие точки в случае, когда они притягивающие, характеризуют рассеяние энергии возле себя, а если они отталкивающие — подкачку энергии. Результат интересен тем, что всё это происходит в разных частях фазового пространства, но для одной и той же динамической системы.

Примеры 1–3, приведённые в п. 1, также являются новыми нетривиальными случаями интегрируемости систем геодезических и систем с диссипацией в явном виде.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов, В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений / В.В. Козлов // Успехи мат. наук. — 2019. — Т. 74, № 1 (445). — С. 117–148.
2. Колмогоров, А.Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе / А.Н. Колмогоров // Докл. АН СССР. — 1953. — Т. 93, № 5. — С. 763–766.
3. Poincaré, H. Calcul des probabilités / H. Poincaré. — Paris : Gauthier–Villars, 1912. — 352 p.
4. Бурбаки, Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер / Н. Бурбаки ; пер. с фр. Е.И. Стечкиной ; ред. С.Б. Стечкин. — М. : Наука, 1967. — 396 с.
5. Шамолин, М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырёхмерного многообразия / М.В. Шамолин // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2021. — Т. 497, № 1. — С. 23–30.
6. Шамолин, М.В. Инвариантные формы объема геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении четырёхмерного многообразия / М.В. Шамолин // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2023. — Т. 509, № 1. — С. 69–76.
7. Иванова, Т.А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики / Т.А. Иванова // Мат. заметки. — 1992. — Т. 52, № 2. — С. 43–51.
8. Трофимов, В.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем / В.В. Трофимов, М.В. Шамолин // Фунд. и прикл. математика. — 2010. — Т. 16, № 4. — С. 3–229.
9. Георгиевский, Д.В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ / Д.В. Георгиевский, М.В. Шамолин // Докл. РАН. — 2002. — Т. 383, № 5. — С. 635–637.
10. Дубровин, Б.А. Современная геометрия. Методы и приложения / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. — М. : Наука, 1979. — 760 с.
11. Шамолин, М.В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле / М.В. Шамолин // Докл. РАН. — 2015. — Т. 461, № 5. — С. 533–536.
12. Шамолин, М.В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования / М.В. Шамолин // Докл. РАН. — 2015. — Т. 464, № 6. — С. 688–692.
13. Шамолин, М.В. Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле при наличии линейного демпфирования / М.В. Шамолин // Докл. РАН. — 2016. — Т. 470, № 3. — С. 288–292.
14. Георгиевский, Д.В. Первые интегралы уравнений движения обобщённого гироскопа в $\mathbb{R}^n$ / Д.В. Георгиевский, М.В. Шамолин // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2003. — № 5. — С. 37–41.
15. Козлов, В.В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем / В.В. Козлов // Прикл. математика и механика. — 2015. — Т. 79, № 3. — С. 307–316.
16. Вейль, Г. Симметрия / Г. Вейль ; пер. с англ. Б.В. Бирюкова и Ю.А. Данилова ; под ред. Б.А. Розенфельда ; 3-е изд. — М. : URSS, 2007. — 192 с.
17. Клейн, Ф. Неевклидова геометрия / Ф. Клейн ; пер. с нем. Н.К. Брушлинского. — М. : Ленанд, 2017. — 351 с.
18. Шамолин, М.В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования / М.В. Шамолин // Докл. РАН. — 2014. — Т. 457, № 5. — С. 542–545.
19. Шамолин, М.В. Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере / М.В. Шамолин // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 6. — С. 743–759.
20. Шамолин, М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере / М.В. Шамолин // Докл. РАН. — 2017. — Т. 474, № 2. — С. 177–181.

INTEGRABLE DYNAMICAL SYSTEMS OF 9$^{\text{th}}$ ORDER WITH DISSIPATION

© 2025 / **M. V. Shamolin**

Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@rambler.ru

New cases of integrable dynamical systems of the ninth order, homogeneous in terms of variables, are presented in which a system on a cotangent bundle to a four-dimensional manifold can be distinguished. In this case, the force field is divided into an internal (conservative) and an external one, which has a dissipation of different signs. The external field is introduced using some unimodular transformation and generalizes the previously considered fields. Complete sets of both the first integrals and invariant differential forms are given.

Keywords: integrability, homogeneous system, variable dissipation, tensor invariant

REFERENCES

1. Kozlov, V.V., Tensor invariants and integration of differential equations, *Russ. Math. Surv.*, 2019, vol. 74, no. 1, pp. 111–140.
2. Kolmogorov, A.N., On dynamical systems with an integral invariant on the torus, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1953, vol. 93, no. 5, pp. 763–766.
3. Poincaré, H., *Calcul des probabilités*, Paris: Gauthier–Villars, 1912.
4. Bourbaki, N., *Eléments de mathématique. Premiere partie. Les Structures Fondamentales de L'Analyse. Livre VI. Integration*, Paris: Hermann & Cie, 1959.
5. Shamolin, M.V., New cases of homogeneous integrable systems with dissipation on tangent bundles of four-dimensional manifolds, *Dokl. Math.*, 2021, vol. 103, no. 2, pp. 85–91.
6. Shamolin, M.V., Invariant volume forms of geodesic, potential, and dissipative systems on a tangent bundle of a four-dimensional manifold, *Dokl. Math.*, 2023, vol. 107, no. 1, pp. 57–63.
7. Ivanova, T.A., Euler equations in models of theoretical physics, *Math. Notes*, 1992, vol. 52, pp. 784–790.
8. Trofimov, V.V. and Shamolin, M.V., Geometric and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems, *J. Math. Sci.*, 2012, vol. 180, no. 4, pp. 365–530.
9. Georgievskii, D.V. and Shamolin, M.V., Generalized Euler's equations describing the motion of a rigid body with a fixed point in $\mathbb{R}^n$, *Dokl. Phys.*, 2002, vol. 47, no. 4, pp. 316–318.
10. Dubrovin, B.A., Novikov, S.P., and Fomenko A.T., *Sovremennaya geometriya. Metody i prilozheniya* (Modern Geometry. Methods and Applications), Moscow: Nauka, 1979.
11. Shamolin, M.V., Complete list of first integrals of dynamic equations for a multidimensional solid in a nonconservative field, *Dokl. Phys.*, 2015, vol. 60, no. 4, pp. 183–187.
12. Shamolin, M.V., Complete list of the first integrals of dynamic equations of a multidimensional solid in a nonconservative field under the assumption of linear damping, *Dokl. Phys.*, 2015, vol. 60, no. 10, pp. 471–475.
13. Shamolin, M.V., A multidimensional pendulum in a nonconservative force field under the presence of linear damping, *Dokl. Phys.*, 2016, vol. 61, no. 9, pp. 476–480.
14. Georgievskii, D.V. and Shamolin, M.V., First integrals of motion equations of a generalized gyroscope in $\mathbb{R}^n$, *Moscow Univ. Math. Bulletin*, 2003, vol. 58, no. 5, pp. 25–29.
15. Kozlov, V.V., Rational integrals of quasi-homogeneous dynamical systems, *J. Appl. Math. Mech.*, 2015, vol. 79, no. 3, pp. 209–216.
16. Weyl, H., *Symmetry*, Princeton: Princeton University Press, 1952.
17. Klein, F., *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Saarbrucken: VDM Verlag Dr. Müller, 2006.
18. Shamolin, M.V., A new case of integrability in the dynamics of a multidimensional solid in a nonconservative field under the assumption of linear damping, *Dokl. Phys.*, 2014, vol. 59, no. 8, pp. 375–378.
19. Shamolin, M.V., Integrable nonconservative dynamical systems on the tangent bundle of the multidimensional sphere, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 6, pp. 722–738.
20. Shamolin, M.V., New cases of integrable systems with dissipation on a tangent bundle of a multidimensional sphere, *Dokl. Phys.*, 2017, vol. 62, no. 5, pp. 262–265.