ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 3, с. 316–329

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.5

ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОЩНОСТИ СПЕКТРА ТОЧНОГО И АБСОЛЮТНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ БЛУЖДАЕМОСТИ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ ДВУМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ К СИСТЕМЕ ЕЁ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

© 2025 г. А. Х. Сташ[1], Н. А. Лобода[2]

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

e-mail: [1] aidamir.stash@gmail.com, [2] n-loboda@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.01.2025 г., после доработки 21.02.2025 г.; принята к публикации 27.02.2025 г.

Изучены множества значений (спектры) показателей блуждаемости решений дифференциальных систем. Построены двумерные системы с нелинейностью произвольно заданного высокого порядка малости в окрестности начала координат, все решения которых бесконечно продолжимы вправо, и любой из спектров их показателей блуждаемости может совпадать как с отрезком $[0,1]$, так и с любым наперёд заданным непустым подмножеством рациональных чисел этого отрезка, в то время как спектры линейных систем их первого приближения состоят только из одного элемента. Более того, спектры показателей исходной системы совпадают с соответствующими спектрами показателей блуждаемости сужения построенных нелинейных двумерных систем на прямое произведение любой открытой окрестности нуля фазовой плоскости и временно́й полуоси.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, линейная система, нелинейная система, колеблемость, число нулей, показатель Ляпунова, показатели колеблемости, показатели блуждаемости

DOI: 10.31857/S0374064125030034, EDN: HMVHEM

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] были исследованы свойства колеблемости, блуждаемости и вращаемости двумерной нелинейной системы по первому приближению. В частности, в [2] было показано, что одноэлементные спектры линейных показателей блуждаемости этой системы и системы её первого приближения могут быть совершенно произвольными: модуль разности этих чисел может меняться от нуля до бесконечности.

Эффект смены знака характеристических показателей Ляпунова при переходе от нелинейной системы к системе её линейного приближения продемонстрирован в статьях [3, 4], а в [5, 6] построены нелинейные системы, обладающие дополнительно бесконечными спектрами показателей Ляпунова.

В [7, 8] было доказано существование нелинейных систем со счётными спектрами линейных показателей колеблемости и блуждаемости, в то время как спектры соответствующих линейных систем их первых приближений состоят ровно из одного неотрицательного числа.

В работе [9] построен неожиданный пример линейной двумерной системы с точечным спектром каждого из показателей колеблемости — такой, что у специальной возмущённой нелинейной двумерной системы сразу все перечисленные показатели имеют произвольный наперёд заданный конечный или счётный спектр, состоящий из рациональных чисел единичного отрезка, или даже континуальный спектр, содержащий весь этот отрезок.

В связи с этим возникает вопрос о возможности перенесения изученных свойств на показатели блуждаемости.

1. ПОКАЗАТЕЛИ БЛУЖДАЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Для заданной открытой окрестности G точки 0 в евклидовой (векторной) фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим дифференциальную, вообще говоря, *нелинейную*, систему

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x \in G, \ t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \ f(t,0)=0, \ f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \tag{1}$$

обеспечивающую наличие нулевого решения, а также существование и единственность решений задачи Коши

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(0)=x_0, \quad x_0 \in G. \tag{2}$$

С системой (1) свяжем линейную систему её *первого приближения*

$$\dot{x} = A(t)x \equiv f_\prime(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \ t \in \mathbb{R}_+, \ A(t) = f'_x(t,0), \tag{3}$$

при условии

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t,x) - f_\prime(t,x)| = o(x), \quad x \to 0.$$

Через $\mathcal{S}_*(f)$ будем обозначать множество всех *непродолжаемых* (т.е. максимально продолженных) ненулевых решений системы (1), а через $x_f(\,\cdot\,, x_0)$ — решение задачи (2), и для любых $\gamma > 0$, $\gamma_2 > \gamma_1 \geqslant 0$ зададим следующие множества:

$$G_\gamma \equiv \{x_0 \in G \colon |x_0| = \gamma\}, \quad G_{\gamma_1,\gamma_2} \equiv \{x_0 \in G \colon \gamma_1 < |x_0| < \gamma_2\}.$$

Определение 1 [10]. Пусть $\mathbb{R}^2_* \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Для функции $u \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2_*)$ и числа $t > 0$ введём *вариацию следа*

$$\mathrm{P}(u,t) \equiv \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial \tau} e(u,\tau) \right| d\tau, \quad e(u,\tau) \equiv \frac{u(\tau)}{|u(\tau)|},$$

функции u за время от 0 до t, причём ситуацию, когда функция u имеет на отрезке $[0,t]$ хотя бы один нуль, считаем *вырожденной* и полагаем $\mathrm{P}(u,t) = +\infty$.

Замечание 1. Геометрический смысл вариации следа функции u — это полная *длина пути* на единичной окружности конца единичного вектора $e(u,\tau)$ при $\tau \in [0,t]$. Отсутствие у функции u нулей гарантирует, что вариация её следа принимает только конечные значения (как интеграл $\mathrm{P}(u,t)$ от непрерывной функции на отрезке).

К определению 1 добавим обозначение

$$\mathrm{P}(u,t_1,t_2) \equiv \mathrm{P}(u,t_2) - \mathrm{P}(u,t_1), \quad u \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2_*), \ 0 \leqslant t_1 < t_2.$$

Определение 2 [2, 10]. *Линейные нижние слабый* $\check{\rho}_\circ(x)$ *и сильный* $\check{\rho}_\bullet(x)$ *показатели блуждаемости* решения $x \in \mathcal{S}_*(f)$, заданного на всей полуоси $\mathbb{R}_+$, определим формулами

$$\check{\rho}_\circ(x) \equiv \varliminf_{t \to +\infty} \inf_{L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^2} \frac{1}{t} \mathrm{P}(Lx,t), \quad \check{\rho}_\bullet(x) \equiv \inf_{L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^2} \varliminf_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \mathrm{P}(Lx,t),$$

где $\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2$ — множество всех невырожденных линейных операторов $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. *Линейные верхние слабый* $\hat{\rho}_\circ(x)$ и *сильный* $\hat{\rho}_\bullet(x)$ показатели блуждаемости зададим теми же формулами, но с заменой в них нижних пределов при $t \to +\infty$ верхними.

Определение 3 [11]. Для функции $x\in\mathcal{S}_*(f)$ условимся о следующем:

1) если значение верхнего показателя блуждаемости совпадает со значением нижнего показателя: $\hat\rho_\circ(x)=\check\rho_\circ(x)$ $(\hat\rho_\bullet(x)=\check\rho_\bullet(x))$, то будем это значение называть *точным* и обозначать $\rho_\circ(x)$ $(\rho_\bullet(x))$;

2) если значение слабого показателя блуждаемости совпадает со значением сильного показателя: $\check\rho_\circ(x)=\check\rho_\bullet(x)$ $(\hat\rho_\circ(x)=\hat\rho_\bullet(x))$, то будем это значение называть *абсолютным* и обозначать $\check\rho(x)$ $(\hat\rho(x))$.

Замечание 2. В работе [12] были определены скорость блуждания и показатели блуждаемости (верхние и нижние, сильные и слабые) ненулевого решения x линейной системы. Скорость блуждания решения — это средняя по времени скорость, с которой движется центральная проекция решения на единичную сферу. Сильные и слабые показатели блуждаемости — это скорость блуждания решения, минимизированная по всем системам координат, причём в случае слабого показателя блуждаемости минимизация проводится в каждый момент времени. Следовательно, для сильных и слабых показателей блуждаемости рассматривается только та информация о решении, которая не гасится линейными преобразованиями: учитываются обороты вектора x вокруг нуля, но не учитывается его локальное вращение вокруг какого-либо другого вектора.

Для произвольной вектор-функции $z\in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^2_*)$ однозначно определим функцию $\phi_z\in C^1(\mathbb{R}_+)$ соотношениями

$$\phi_z(0)\in[0,2\pi),\quad |z(t)|(\cos\phi_z(t),\sin\phi_z(t))^{\mathrm{T}}=z(t),\quad t\in\mathbb{R}_+.$$

Замечание 3. Вариацию следа функции z за время от 0 до t можно вычислить по формуле

$$\mathrm{P}(z,t)=\int\limits_0^t|\dot\phi_z(\tau)|\,d\tau,$$

так как

$$\left|\frac{\partial}{\partial\tau}e(z,\tau)\right|=\left|\frac{d}{d\tau}(\cos\phi_z(t),\sin\phi_z(t))^{\mathrm{T}}\right|=|(-\sin\phi_z(t),\cos\phi_z(t))^{\mathrm{T}}\dot\phi_z(\tau)|=|\dot\phi_z(\tau)|.$$

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для любого угла $\varphi_0\in[0,2\pi)$ обозначим через $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ множества, состоящие из вектор-функций $u\in C^1([0,2\pi],\mathbb{R}^2_*)$, удовлетворяющих условиям:

1) $\phi(0)=\varphi_0$, где $\phi=\phi_u$;

2) функция ϕ *не убывает* на отрезке $[0,\pi]$ (при увеличении значений $t\in[0,\pi]$ вектор $u(t)$ движется против часовой стрелки относительно начала координат);

3) при каждом $t\in(0,\pi]$ верно равенство $\phi(\pi+t)=\phi(\pi-t)$;

4) для $u\in\mathcal{A}_0$ при некотором $\delta\in(0,\pi/4)$ выполнено равенство $\phi(\pi)-\varphi_0=\pi-\delta$;

5) для $u\in\mathcal{A}_1$ имеют место неравенства $\pi<\phi(\pi)-\varphi_0<3\pi/2$.

Для любой функции $z\in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^2_*)$ и любого номера $i\in\mathbb{N}$ определим функцию

$$z^i(t)\equiv z(2\pi(i-1)+t),\quad t\in[0,2\pi],\quad z^i\in C^1([0,2\pi],\mathbb{R}^2_*).$$

Лемма. *Для некоторой линейной системы вида* (3) *со спектром точного и абсолютного показателя блуждаемости* $\rho(\mathcal{S}_*(f_\prime))=\{1\}$ *при любых* $m>1$, $q\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$ *и* $0<\alpha<\beta\leqslant3$ *найдётся возмущённая система*

$$\dot x=A(t)x+B(t,x)\equiv f(t,x),\quad x\in\mathbb{R}^2,\ t\in\mathbb{R}_+,\ |B(t,x)|\leqslant|x|^m,$$

обладающая свойствами

$$\{\rho(x_f(\,\cdot\,,x_0))\colon x_0\in G_\alpha\sqcup G_\beta\}=\{1\},\quad \{\rho(x_f(\,\cdot\,,x_0))\colon x_0\in G_{\alpha,\beta}\}=\{q\}.$$

Доказательство. 1. Рассмотрим линейную периодическую систему

$$\dot x=\zeta(t)Ix\equiv f_\prime(t,x),\quad x\in\mathbb{R}^2,\ t\in\mathbb{R}_+,\ \zeta(t)\equiv\frac{\pi}{2}\sin t,\ I\equiv\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Она задаёт вращение фазовой плоскости вокруг точки $x=0$ с мгновенной угловой скоростью $\zeta(t)$ в каждый момент $t\in\mathbb{R}_+$, в результате чего ориентированный угол поворота любого начального вектора $x_0\in\mathbb{R}^2_*$ за время t равен

$$\Theta(x_{f_\prime}(\,\cdot\,,x_0),t)=\frac{\pi}{2}(1-\cos t)\in[0,\pi],$$

а значит, справедливы равенства

$$x_{f_\prime}(t_k,x_0)=(-1)^{k-1}x_{f_\prime}(t_1,x_0),\quad t_k\equiv\pi(k-1),\ k\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

На каждом промежутке $(t_k,t_{k+1}]$, $k\in\mathbb{N}$, решение $x_{f_\prime}=x_{f_\prime}(t,x_0)$ совершает поворот на угол π и это свойство не меняется под действием любого преобразования $L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2$, поэтому

$$\frac{\mathrm{P}(Lx_{f_\prime},t_{k+1})-\mathrm{P}(Lx_{f_\prime},t_k)}{t_{k+1}-t_k}=\frac{\mathrm{P}(x_{f_\prime},t_{k+1})-\mathrm{P}(x_{f_\prime},t_k)}{t_{k+1}-t_k}=1,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Отсюда получим

$$\rho_\circ(x_{f_\prime})=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2}\mathrm{P}(Lx_{f_\prime},t)=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{t_{k+1}}\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2}\mathrm{P}(Lx_{f_\prime},t_{k+1})=$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{t_{k+1}}\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2}\sum_{i=1}^{k}(\mathrm{P}(Lx_{f_\prime},t_{i+1})-\mathrm{P}(Lx_{f_\prime},t_i))=$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{t_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}(\mathrm{P}(x_{f_\prime},t_{i+1})-\mathrm{P}(x_{f_\prime},t_i))=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{t_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}(t_{i+1}-t_i)=\lim_{k\to+\infty}\frac{t_{k+1}-t_1}{t_{k+1}}=1,$$

$$\rho_\bullet(x_{f_\prime})=\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2}\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{t_{k+1}}\mathrm{P}(Lx_{f_\prime},t_{k+1})=\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2}\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{t_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}(\mathrm{P}(Lx_{f_\prime},t_{i+1})-\mathrm{P}(Lx_{f_\prime},t_i))=$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{t_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}(\mathrm{P}(x_{f_\prime},t_{i+1})-\mathrm{P}(x_{f_\prime},t_i))=1.$$

Следовательно, все показатели блуждаемости совпадают, а их спектр состоит из одного элемента $\rho(\mathcal{S}_*(f_\prime))=\{1\}$.

2. На отрезке $r\in[0,3]$ при любых значениях параметров $m>1$, $0\leqslant\gamma_1<\gamma_2\leqslant 3$ зададим функции

$$\delta(r,\gamma_1,\gamma_2)=\frac{r^m(r-\gamma_1)^2(r-\gamma_2)^2}{(r+\gamma_1)^2(r^2+10000)^m},\quad \psi_\pm(r,\gamma_1,\gamma_2)\equiv 1\pm\frac{\delta(r,\gamma_1,\gamma_2)}{\pi}\in(0,5/4).$$

Для нелинейной периодической системы $\dot x=\psi_-(|x|,\gamma_1,\gamma_2)f_\prime(t,x)\equiv g(t,x)$ при любом $t\in\mathbb{R}_+$ имеем

$$\Theta(x_g(\,\cdot\,,x_0),t)=\psi_-(|x_0|,\gamma_1,\gamma_2)\frac{\pi}{2}(1-\cos t)\in[0,\pi-\delta(|x_0|,\gamma_1,\gamma_2)]\subset[0,\pi),\quad \gamma_1<|x_0|<\gamma_2.$$

В силу последнего включения для любого x_0, удовлетворяющего условию $\gamma_1 < |x_0| < \gamma_2$, решение $x_g(\,\cdot\,,x_0)$ не покидает сектор, центральный угол которого меньше π, причём зазор между этим сектором и целым полукругом равен $\delta = \pi - \psi_-(|x_0|,\gamma_1,\gamma_2)\pi$.

Убедимся в возможности указать такой поворот $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^2$, чтобы вектор $Lx_g(\,\cdot\,,x_0)$ лежал на фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$ строго в одной полуплоскости относительно заданной прямой $l \subset \mathbb{R}^2$. Более того, если оператор L задавать как композицию указанного поворота и неограниченного удлинения вектора $e \perp l$, то при любом $t > 1$ можно делать сколь угодно малой величину $t^{-1}\mathrm{P}(Lx_g(\,\cdot\,,x_0),t)$. Положим

$$L_n = S_n R, \quad u_g^i(\,\cdot\,) \equiv (\overline{x}_g^i(\,\cdot\,), \overline{y}_g^i(\,\cdot\,))^{\mathrm{T}} = Rx_g^i(\,\cdot\,,x_0), \quad v_g^i(\,\cdot\,) \equiv (\tilde{x}_g^i(\,\cdot\,), \tilde{y}_g^i(\,\cdot\,))^{\mathrm{T}} = L_n x_g^i(\,\cdot\,,x_0),$$

где

$$S_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}, \quad \psi = \phi_{x_g^i}(0) - \delta/2, \ \ i,n \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что при достаточно больши́х n композиция L_n поворота R по часовой стрелке на угол ψ и растяжения S_n вдоль вертикальной оси является искомым оператором. В самом деле, имеем

$$\phi_{u_g^i}(0) = \phi_{x_g^i}(0) - \psi = \delta/2 \in (0,\pi/8),$$

$$\phi_{u_g^i}(\pi) = \phi_{x_g^i}(\pi) - \phi_{x_g^i}(0) + \delta/2 = \psi_-(|x_0|,\gamma_1,\gamma_2)\pi + \delta/2 = \pi - \delta/2,$$

$$\phi_{v_g^i}(0) \in (0,\pi/2), \quad \phi_{v_g^i}(\pi) \in (\pi/2,\pi),$$

$$\phi_{v_g^i}(0) = \operatorname{arctg}\frac{\tilde{y}_g^i(0)}{\tilde{x}_g^i(0)} = \operatorname{arctg}\frac{n\overline{y}_g^i(0)}{\overline{x}_g^i(0)} = \operatorname{arctg}(n\operatorname{tg}(\delta/2)),$$

$$\phi_{v_g^i}(\pi) = \operatorname{arctg}\frac{\tilde{y}_g^i(\pi)}{\tilde{x}_g^i(\pi)} + \pi = \operatorname{arctg}\frac{n\overline{y}_g^i(\pi)}{\overline{x}_g^i(\pi)} + \pi = \pi - \operatorname{arctg}(n\operatorname{tg}(\delta/2)).$$

Из неубывания функции $\phi_{x_g^i}$ на отрезке $[0,\pi]$ и геометрических свойств операторов R и S_n следуют соотношения

$$\dot{\phi}_{v_g^i}(t) \geqslant 0, \quad \phi_{v_g^i}(\pi + t) = \phi_{v_g^i}(\pi - t), \quad t \in [0,\pi],$$

на основании которых при любом $i \in \mathbb{N}$ получим

$$\mathrm{P}(L_n x_g^i(\,\cdot\,,x_0),2\pi) = \int\limits_0^{2\pi} \big|\dot{\phi}_{v_g^i}(\tau)\big|\,d\tau = 2(\phi_{v_g^i}(\pi) - \phi_{v_g^i}(0)) = 2\pi - 4\operatorname{arctg}(n\operatorname{tg}(\delta/2)) \equiv a_n.$$

Для любого достаточно малого $\gamma > 0$ в силу условия $a_n \to 0$ при $n \to +\infty$ найдётся такой номер n_0, что при любом $i \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $\mathrm{P}(L_{n_0} x_g^i(\,\cdot\,,x_0),2\pi) \leqslant \gamma$, а значит, выполняются соотношения

$$\hat{\rho}_\bullet(x_g(\,\cdot\,,x_0)) = \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{P}(Lx_g(\,\cdot\,,x_0),t) \leqslant \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{P}(L_{n_0}x_g(\,\cdot\,,x_0),t) =$$

$$= \varlimsup_{p\to+\infty} \frac{1}{2\pi p}\mathrm{P}(L_{n_0}x_g(\,\cdot\,,x_0),2\pi p) = \varlimsup_{p\to+\infty} \frac{1}{2\pi p}\sum_{i=1}^{p}\mathrm{P}(L_{n_0}x_g^i(\,\cdot\,,x_0),2\pi) \leqslant \frac{\gamma}{2\pi}.$$

Следовательно, учитывая произвольность $\gamma > 0$ и неравенства

$$\check{\rho}_\circ(x) \leqslant \check{\rho}_\bullet(x) \leqslant \hat{\rho}_\bullet(x), \quad \check{\rho}_\circ(x) \leqslant \hat{\rho}_\circ(x) \leqslant \hat{\rho}_\bullet(x), \quad x \in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^2_*), \tag{6}$$

вытекаемые из определения 2, для значения $q=0$ выберем нелинейную систему

$$f(t,x)\equiv\begin{cases} f_\prime(t,x), & 0<|x|\leqslant\gamma_1 \text{ или } |x|\geqslant\gamma_2,\\ \psi_-(|x|,\gamma_1,\gamma_2)f_\prime(t,x), & \gamma_1<|x|<\gamma_2,\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}_+.$$

3. Для нелинейной периодической системы $\dot x=\psi_+(|x|,\gamma_1,\gamma_2)f_\prime(t,x)\equiv h(t,x)$ будем иметь

$$\{\Theta(x_h(\,\cdot\,,x_0),t)\colon t\in\mathbb{R}_+\}\supset[0,\pi+\delta(|x_0|,\gamma_1,\gamma_2)]\supset[0,\pi],\quad \gamma_1<|x_0|<\gamma_2.$$

В силу последнего включения каждое решение $x_h(\,\cdot\,,x_0)$, $\gamma_1<|x_0|<\gamma_2$, не покидает сектор, центральный угол которого больше π, причём зазор между этим сектором и целым полукругом равен $\delta=\psi_+(|x_0|,\gamma_1,\gamma_2)\pi-\pi$.

3.1. Для произвольного, но фиксированного решения $x_h(\cdot\,,x_0)$ положим

$$L_n=S_nR,\quad u_h^i(\,\cdot\,)\equiv(\overline{x}_h^i(\,\cdot\,),\overline{y}_h^i(\,\cdot\,))^{\mathrm{T}}=Rx_h^i(\,\cdot\,,x_0),\quad v_h^i(\,\cdot\,)\equiv(\tilde{x}_h^i(\,\cdot\,),\tilde{y}_h^i(\,\cdot\,))^{\mathrm{T}}=L_nx_h^i(\,\cdot\,,x_0),$$

где

$$S_n=\begin{pmatrix}1&0\\0&n\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}\cos\psi&\sin\psi\\-\sin\psi&\cos\psi\end{pmatrix},\quad \psi=\phi_{x_h^i}(0)-\delta/2,\ \ i,n\in\mathbb{N}.$$

Сначала для выбранного решения $x_h(\cdot\,,x_0)$ и достаточно малого $\gamma>0$ найдём такой номер n_0, при котором справедливы оценки

$$\mathrm{P}(L_{n_0}x_h^i(\,\cdot\,,x_0),2\pi)\leqslant2\pi+\gamma,\quad i\in\mathbb{N}. \tag{7}$$

Для этого вычислим значения

$$\phi_{u_h^i}(0)=\phi_{x_h^i}(0)-\psi=\delta/2,$$

$$\phi_{u_h^i}(\pi)=\phi_{x_h^i}(\pi)-\phi_{x_h^i}(0)+\delta/2=\psi_+(|x_0|,\gamma_1,\gamma_2)\pi+\delta/2=\pi+3\delta/2,$$

$$\phi_{v_h^i}(0)\in(0,\pi/2),\quad \phi_{v_h^i}(\pi)\in(\pi,3\pi/2),$$

$$\phi_{v_h^i}(\pi)=\pi+\operatorname{arctg}\frac{\tilde{y}_h^i(\pi)}{\tilde{x}_h^i(\pi)}=\pi+\operatorname{arctg}\frac{n\overline{y}_h^i(\pi)}{\overline{x}_h^i(\pi)}=\pi+\operatorname{arctg}(n\operatorname{tg}(3\delta/2))$$

и найдём

$$\mathrm{P}(L_nx_h^i(\,\cdot\,,x_0),2\pi)=\int\limits_0^{2\pi}|\dot\phi_{v_h^i}(\tau)|\,d\tau=2(\phi_{v_h^i}(\pi)-\phi_{v_h^i}(0))=$$

$$=2(\pi+\operatorname{arctg}(n\operatorname{tg}(3\delta/2))-\operatorname{arctg}(n\operatorname{tg}(\delta/2)))\equiv b_n.$$

Справедливость очевидного свойства $b_n\to2\pi$ при $n\to+\infty$ последовательности (b_n) завершает доказательство оценки (7).

3.2. Теперь покажем, что для решения $x_h(\cdot\,,x_0)$ и любого оператора $L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2$ выполнена оценка $\mathrm{P}(Lx_h^i(\cdot\,,x_0),2\pi)\geqslant2\pi$, $i\in\mathbb{N}$. Действительно, из условия $x_h^i(0,x_0)=-x_h^i(\pi,x_0)$ (см. (5)) вытекает равенство $\phi_{x_h^i}(0)=\pi+\phi_{x_h^i}(\pi)$. Поэтому для функции $z_h^i=Lx_h^i(\cdot\,,x_0)$ имеем

$$z_h^i(0)=Lx_h^i(0,x_0)=L(-x_h^i(\pi,x_0))=-L(x_h^i(\pi,x_0))=-z_h^i(\pi),\quad i\in\mathbb{N},$$

а значит, при некотором $m\in\mathbb{Z}$ верно равенство

$$\phi_{z_h^i}(0)=\phi_{z_h^i}(\pi)+\pi+2m\pi,$$

с учётом которого и условия

$$\phi_{z_h^i}(\pi+t)=\phi_{z_h^i}(\pi-t), \quad t\in[0,\pi],$$

выводим требуемое утверждение

$$\mathrm{P}(Lx_h^i(\,\cdot\,,x_0),2\pi)=\int\limits_0^{2\pi}|\dot\phi_{z_h^i}(\tau)|\,d\tau=2\int\limits_0^{\pi}|\dot\phi_{z_h^i}(\tau)|\,d\tau\geqslant$$

$$\geqslant 2\left|\int\limits_0^{\pi}\dot\phi_{z_h^i}(\tau)\,d\tau\right|=2|\pi+2m\pi|\geqslant 2\pi, \quad i\in\mathbb{N}.$$

3.3. Для верхнего сильного показателя блуждаемости решения $x_h(\,\cdot\,,x_0)$ ввиду оценки (7) будем иметь

$$\hat\rho_\bullet(x_h(\,\cdot\,,x_0))=\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2}\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\mathrm{P}(Lx_h(\,\cdot\,,x_0),t)\leqslant\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\mathrm{P}(L_{n_0}x_h(\,\cdot\,,x_0),t)=$$

$$=\varlimsup_{p\to+\infty}\frac{1}{2\pi p}\mathrm{P}(L_{n_0}x_h(\,\cdot\,,x_0),2\pi p)=\varlimsup_{p\to+\infty}\frac{1}{2\pi p}\sum_{i=1}^{p}\mathrm{P}(L_{n_0}x_h^i(\,\cdot\,,x_0),2\pi)\leqslant\frac{2\pi+\gamma}{2\pi}.$$

Для нижнего слабого показателя блуждаемости решения $x_h(\,\cdot\,,x_0)$ на основании оценки, установленной в п. 3.2, получим

$$\check\rho_\circ(x_h(\,\cdot\,,x_0))=\varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2}\mathrm{P}(Lx_h(\,\cdot\,,x_0),t)=\varliminf_{p\to+\infty}\frac{1}{2\pi p}\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2}\mathrm{P}(Lx_h(\,\cdot\,,x_0),2\pi p)=$$

$$=\varliminf_{p\to+\infty}\frac{1}{2\pi p}\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2}\sum_{i=1}^{p}\mathrm{P}(Lx_h^i(\,\cdot\,,x_0),2\pi)\geqslant\varliminf_{p\to+\infty}\frac{2\pi p}{2\pi p}=1.$$

Далее с учётом свойства (6) показателей блуждаемости придём к равенствам

$$\check\rho_\circ(x_h(\,\cdot\,,x_0))=\check\rho_\bullet(x_h(\,\cdot\,,x_0))=\hat\rho_\circ(x_h(\,\cdot\,,x_0))=\hat\rho_\bullet(x_h(\,\cdot\,,x_0))=1.$$

Для значения $q=1$ выберем систему

$$f(t,x)\equiv\begin{cases}f_\prime(t,x), & 0<|x|\leqslant\gamma_1 \text{ или } |x|\geqslant\gamma_2,\\ \psi_+(|x|,\gamma_1,\gamma_2)f_\prime(t,x), & \gamma_1<|x|<\gamma_2,\end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}_+.$$

4. Теперь убедимся в том, что значению $q=l_1/(l_1+l_2)$, $l_1,l_2\in\mathbb{N}$, соответствует система

$$f(t,x)\equiv\begin{cases}f_\prime(t,x), & 0<|x|\leqslant\gamma_1 \text{ или } |x|\geqslant\gamma_2,\ t\in\mathbb{R}_+,\\ \psi_+(|x|,\gamma_1,\gamma_2)f_\prime(t,x), & \gamma_1<|x|<\gamma_2,\ t\in[0,2\pi l_1],\\ \psi_-(|x|,\gamma_1,\gamma_2)f_\prime(t,x), & \gamma_1<|x|<\gamma_2,\ t\in[2\pi l_1,2\pi(l_1+l_2)],\end{cases}$$

где в кольце $\gamma_1<|x|<\gamma_2$ функция $f(t,x)$ периодически (с периодом $T=2\pi(l_1+l_2)$) продолжается на всю полуось $\mathbb{R}_+$. Действительно, для любого решения $x_f(\,\cdot\,,x_0)$, $x_0\in G_{\gamma_1,\gamma_2}$ (см. п. 3 настоящего доказательства), с одной стороны, выполняется равенство

$$\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2}\mathrm{P}(Lx_f(\,\cdot\,,x_0),(k-1)T,kT)=2\pi l_1, \quad k\in\mathbb{N},$$

а с другой — для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое преобразование $L_{n_\varepsilon} \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^2$, что выполняется оценка
$$\mathrm{P}(L_{n_\varepsilon} x_f(\,\cdot\,, x_0), (k-1)T, kT) \leqslant 2\pi l_1 + \varepsilon, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, для показателей блуждаемости будем иметь
$$\rho_\circ(x_f(\,\cdot\,, x_0)) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2} \mathrm{P}(Lx_f(\,\cdot\,, x_0), t) = \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{Tp} \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2} \mathrm{P}(Lx_f(\,\cdot\,, x_0), Tp) =$$
$$= \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{Tp} \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{p} \mathrm{P}(Lx_f(\,\cdot\,, x_0), (i-1)T, iT) = \lim_{p\to+\infty} \frac{2\pi l_1 p}{2p\pi(l_1+l_2)} = \frac{l_1}{l_1+l_2},$$
$$\rho_\circ(x_f(\,\cdot\,, x_0)) \leqslant \rho_\bullet(x_f(\,\cdot\,, x_0)) = \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \mathrm{P}(Lx_f(\,\cdot\,, x_0), t) \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \mathrm{P}(L_{n_\varepsilon} x_f(\,\cdot\,, x_0), t) = \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{pT} \mathrm{P}(L_{n_\varepsilon} x_f(\,\cdot\,, x_0), pT) =$$
$$= \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{Tp} \sum_{i=1}^{p} \mathrm{P}(L_{n_\varepsilon} x_f(\,\cdot\,, x_0), (i-1)T, iT) = \lim_{p\to+\infty} \frac{(2\pi l_1+\varepsilon)p}{2p\pi(l_1+l_2)} = \frac{2\pi l_1+\varepsilon}{2\pi(l_1+l_2)}.$$

Последние два соотношения в силу произвольности $\varepsilon > 0$ завершают доказательство леммы.

Определение 4 [13]. Последовательность дробных долей (θ_i) называется *равномерно распределённой по модулю* 1, если для каждого полуотрезка $[a, b) \subset [0, 1)$ имеет место равенство
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi_{[a,b)}(\theta_i) = b - a,$$
где $\chi_{[a,b)}$ — характеристическая функция промежутка $[a, b)$.

Замечание 4. Последовательность $\theta_i = \{i\pi\}$, $i \in \mathbb{N}$, где $\{\cdot\}$ — дробная часть числа, является равномерно распределённой по модулю 1 (см. [13]), причём вместо π можно выбрать любое иррациональное число.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Отсутствие непосредственной взаимосвязи между мощностями спектров всех показателей блуждаемости двумерной нелинейной системы, все нетривиальные решения которой бесконечно продолжимы вправо, и системы её первого приближения демонстрируют следующие две теоремы.

Теорема 1. *Для любых $m > 1$ и непустого подмножества $S \subset [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ существуют системы (1) и (3) с устойчивым по Ляпунову нулевым решением, удовлетворяющие условиям*
$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t, x) - f_\prime(t, x)| \leqslant |x|^m, \quad x \in G \equiv \mathbb{R}^2, \tag{8}$$
$$\rho(\mathcal{S}_*(f_\prime)) = \{1\}, \quad \rho(\mathcal{S}_*(f)) = S \cup \{1\}, \tag{9}$$
причём при любом $\varepsilon > 0$ выполнено равенство
$$\{\rho(x_f(\,\cdot\,, x_0)) \colon x_0 \in G_{0,\varepsilon}\} = \rho(\mathcal{S}_*(f)). \tag{10}$$

Доказательство. Сначала фиксируем призвольное $m>1$.

1. Пусть задано бесконечное подмножество $X\subset[0,1]\cap\mathbb{Q}$. Занумеровав все рациональные числа из отрезка $[0,1]$ натуральными числами, определим последовательность $(s_p)_{p\in\mathbb{N}}$. По этой последовательности образуем последовательность

$$s_1; s_1, s_2; s_1, s_2, s_3; \ldots; s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k; \ldots,$$

которую обозначим через $(q_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

Множество $0<|x|<1$ разобьём на счётное число колец вида

$$\gamma_{k+1}<|x|<\gamma_k, \quad \gamma_k=2^{1-k}, \ k\in\mathbb{N}. \tag{11}$$

Далее, выберем линейную систему (4) и в соответствии с леммой модифицируем её в каждом кольце (11) так, чтобы при любом $k\in\mathbb{N}$ выполнялись равенства

$$\{\rho(x_f(\,\cdot\,,x_0))\colon x_0\in G_{\gamma_{k+1},\gamma_k}\}=\{q_k\}.$$

В кольце $1\leqslant|x|<+\infty$ и на каждой окружности $|x|=\gamma_k$, $k\in\mathbb{N}$, линейную систему (4) оставляем без изменения, поэтому

$$\{\rho(x_f(\,\cdot\,,x_0))\colon x_0\in G_{\gamma_k}\sqcup G_{1,+\infty}\}=\{1\}.$$

Значит, установили справедливость $\rho(\mathcal{S}_*(f))=S\cup\{1\}$, и из условия $\gamma_k\to 0$ при $k\to+\infty$ следует равенство (10) при любом $\varepsilon>0$.

2. Пусть задано непустое конечное подмножество $X=\{s_1,s_2,\ldots,s_N\}\subset[0,1]\cap\mathbb{Q}$. Тогда определим первые $T=(N^2+N)/2$ членов последовательности $(q_p)_{p\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{gathered} q_1=s_1, \quad q_2=s_1, \quad q_3=s_2, \quad q_4=s_1, \quad q_5=s_2, \quad q_6=s_3, \quad \ldots \\ \ldots, \quad q_{T-N+1}=s_1, \quad q_{T-N+2}=s_2, \quad q_{T-N+3}=s_3, \quad \ldots, \quad q_T=s_N, \end{gathered}$$

а последующие члены найдём с помощью условия периодичности $q_{i+T}=q_i$, $i\in\mathbb{N}$. Далее повторяются рассуждения из п. 1 настоящего доказательства. Теорема доказана.

Теорема 2. *Для любого интервала $(a,b)\subset[0,1]$ или отрезка $[0,1]$ существуют две системы вида (1) и (3) с устойчивым по Ляпунову нулевым решением, спектры показателей блуждаемости которых обладают, соответственно, свойствами (8) и (9), причём для $[0,1]$ при любом $\varepsilon>0$ множество $\{\rho(x_f(\,\cdot\,,x_0))\colon x_0\in G_{0,\varepsilon}\}$ имеет мощность континуума.*

Доказательство. Фиксируем призвольное $m>1$.

1. Сначала рассмотрим случай $X=[0,1]$.

1.1. Определим вектор-функцию

$$f(t,x)\equiv\begin{cases} \psi_-(|x|,0,\theta_i)f_\prime(t,x), & 0\leqslant|x|\leqslant\theta_i, \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_+(|x|,\theta_i,1)f_\prime(t,x), & \theta_i<|x|\leqslant 1, \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_-(|x|,1,2)f_\prime(t,x), & 1<|x|\leqslant 2, \ t\in\mathbb{R}_+,\\ \psi_+(|x|,2,3)f_\prime(t,x), & 2<|x|<3, \ t\in\mathbb{R}_+,\\ f_\prime(t,x), & |x|\geqslant 3, \ t\in\mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{12}$$

где $\theta_i=\{ie\}$, $\tau_i=2\pi(i-1)$, $i\in\mathbb{N}$.

Каждому начальному значению $x_0 \in \mathbb{R}^2_*$ поставим в соответствие единственное число $\theta > 0$ по правилу $|x_0| = \theta$. Тогда из (12) при $0 < |x_0| < 1$ следует, что для каждого $\theta \in (0,1)$ выполнено включение

$$x_f^i(\,\cdot\,, x_0) \in \begin{cases} \mathcal{A}_1, & \theta_i \in (0,\theta), \\ \mathcal{A}_0, & \theta_i \in (\theta, 1), \end{cases} \qquad i \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

1.2. Для каждого значения $x_0 \in \mathbb{R}^2_*$, лежащего в кольце $2 < |x_0| < 3$, выполнено (см. (12)) включение $x_f^i(\cdot, x_0) \in \mathcal{A}_1$, $i \in \mathbb{N}$, а значит справедлива (см. п. 3 доказательства леммы) цепочка равенств

$$\check{\rho}_\bullet(x_f(\,\cdot\,, x_0)) = \hat{\rho}_\bullet(x_f(\,\cdot\,, x_0)) = \check{\rho}_\circ(x_f(\,\cdot\,, x_0)) = \hat{\rho}_\circ(x_f(\,\cdot\,, x_0)) = 1.$$

Для каждого значения $x_0 \in \mathbb{R}^2_*$, лежащего в кольце $1 < |x_0| < 2$, выполнено (см. (12)) включение $x_f^i(\,\cdot\,, x_0) \in \mathcal{A}_0$, $i \in \mathbb{N}$, а значит имеют место (см. п. 2 доказательства леммы) равенства

$$\check{\rho}_\bullet(x_f(\,\cdot\,, x_0)) = \hat{\rho}_\bullet(x_f(\,\cdot\,, x_0)) = \check{\rho}_\circ(x_f(\,\cdot\,, x_0)) = \hat{\rho}_\circ(x_f(\,\cdot\,, x_0)) = 0.$$

1.3. Покажем, что при любом $\theta \in (0,1)$ для всех соответствующих решений $x_f(\,\cdot\,, x_0)$

$$\check{\rho}_\bullet(x_f(\,\cdot\,, x_0)) = \hat{\rho}_\bullet(x_f(\,\cdot\,, x_0)) = \check{\rho}_\circ(x_f(\,\cdot\,, x_0)) = \hat{\rho}_\circ(x_f(\,\cdot\,, x_0)) = \theta. \tag{14}$$

1.3.1. Для всех $u \in \mathcal{A}_1$ и любого преобразования $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^2$ верна (см. п. 3.2 доказательства леммы) оценка $\mathrm{P}(Lu, 2\pi) \geqslant 2\pi$, поэтому для любого момента времени $t > 0$ на основании соотношений (13) будем иметь

$$\mathrm{P}(Lx_f(\,\cdot\,, x_0), t) \geqslant \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \mathrm{P}(Lx_f^i(\,\cdot\,, x_0), 2\pi) \geqslant 2\pi \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(0,\theta)}(\theta_i),$$

откуда с учётом замечания 4 выведем оценку снизу

$$\check{\rho}_\circ(x_f(\,\cdot\,, x_0)) = \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^2} \frac{1}{t}\mathrm{P}(Lx_f(\,\cdot\,, x_0), t) \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^2} \frac{2\pi}{t} \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(0,\theta)}(\theta_i) = \varliminf_{t\to+\infty} \frac{2\pi}{t} \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(0,\theta)}(\theta_i) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{2\pi[t/2\pi]}{t} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{[t/2\pi]} \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(0,\theta)}(\theta_i) = \theta.$$

1.3.2. Для любой функции $x_f^i(\cdot, x_0)$, $i \in \mathbb{N}$, и $\gamma > 0$ найдётся (см. пп. 2 и 3.1 доказательства леммы) такое преобразование $L' \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^2$, что верны соответствующие оценки

$$\mathrm{P}(L'x_f^i(\,\cdot\,, x_0), 2\pi) \leqslant \begin{cases} \gamma, & x_f^i(\,\cdot\,, x_0) \in \mathcal{A}_0, \\ 2\pi + \gamma, & x_f^i(\,\cdot\,, x_0) \in \mathcal{A}_1. \end{cases}$$

Опираясь на соотношения (13), для любого $t>0$ получим представление

$$\mathrm{P}(L'x_f(\,\cdot\,,x_0),t)\leqslant(2\pi+\gamma)\sum_{i=1}^{[t/2\pi]}\chi_{(0,\theta)}(\theta_i)+\gamma\sum_{i=1}^{[t/2\pi]}\chi_{(\theta,1)}(\theta_i)+3\pi,$$

а затем, ввиду замечания 4, вычислим предел

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\mathrm{P}(L'x_f(\,\cdot\,,x_0),t)\leqslant\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{2\pi+\gamma}{t}\sum_{i=1}^{[t/2\pi]}\chi_{(0,\theta)}(\theta_i)+\frac{\gamma}{t}\sum_{i=1}^{[t/2\pi]}\chi_{(\theta,1)}(\theta_i)+\frac{3\pi}{t}\right)=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{(2\pi+\gamma)[t/2\pi]}{t}\frac{1}{[t/2\pi]}\sum_{i=1}^{[t/2\pi]}\chi_{(0,\theta)}(\theta_i)+\frac{\gamma[t/2\pi]}{t}\frac{1}{[t/2\pi]}\sum_{i=1}^{[t/2\pi]}\chi_{(\theta,1)}(\theta_i)\right)=$$

$$=\frac{(2\pi+\gamma)}{2\pi}\theta+\frac{(1-\theta)\gamma}{2\pi}=\theta+\frac{\gamma\theta}{2\pi}+\frac{\gamma}{2\pi}-\frac{\gamma\theta}{2\pi}=\theta+\frac{\gamma}{2\pi}.$$

Из оценки снизу для нижних показателей блуждаемости и последнего равенства получим цепочку соотношений

$$\theta\leqslant\check{\rho}_\circ(x_f(\,\cdot\,,x_0))\leqslant\hat{\rho}_\bullet(x_f(\,\cdot\,,x_0))\leqslant\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\mathrm{P}(L'x_f(\,\cdot\,,x_0),t)=\theta+\frac{\gamma}{2\pi},$$

из которой в силу произвольности $\gamma>0$ с учётом (6) следует справедливость равенств (14), и при любом $\varepsilon>0$ множество $\{\rho(x_f(\,\cdot\,,x_0))\colon x_0\in G_{0,\varepsilon}\}$ имеет мощность континуума.

2. Теперь фиксируем произвольный интервал $(a,b)\subset[0,1]$.

2.1. Если $0=a<b<1$, то выбираем систему $\dot x=f(t,x)$ с правой частью

$$f(t,x)\equiv\begin{cases}\psi_-(|x|,0,\theta_i)f_\prime(t,x), & 0\leqslant|x|\leqslant\theta_i<b,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_+(|x|,\theta_i,b)f_\prime(t,x), & \theta_i<|x|\leqslant b,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_-(|x|,0,b)f_\prime(t,x), & 0\leqslant|x|<b\leqslant\theta_i,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_-(|x|,b,\theta_i)f_\prime(t,x), & b<|x|\leqslant\theta_i,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_-(|x|,\theta_i,1)f_\prime(t,x), & b<\theta_i<|x|<1,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_+(|x|,b,1)f_\prime(t,x), & \theta_i<b<|x|<1,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ f_\prime(t,x), & |x|\geqslant1,\ \ t\in\mathbb{R}_+,\end{cases}\qquad i\in\mathbb{N}.$$

Для решений $x_f(\,\cdot\,,x_0)$ этой системы при каждом $\theta\in(0,b)$ выполнено включение

$$x_f^i(\,\cdot\,,x_0)\in\begin{cases}\mathcal{A}_1, & \theta_i\in(0,\theta),\\ \mathcal{A}_0, & \theta_i\in(\theta,b)\cup(b,1),\end{cases}\qquad i\in\mathbb{N}.$$

2.2. Если $0<a<b=1$, то выбираем систему $\dot x=f(t,x)$ с правой частью

$$f(t,x)\equiv\begin{cases}\psi_+(|x|,0,\theta_i)f_\prime(t,x), & 0\leqslant|x|\leqslant\theta_i<a,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_+(|x|,\theta_i,a)f_\prime(t,x), & \theta_i<|x|\leqslant a,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_-(|x|,0,a)f_\prime(t,x), & 0\leqslant|x|<a\leqslant\theta_i,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_-(|x|,a,\theta_i)f_\prime(t,x), & a<|x|\leqslant\theta_i,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_+(|x|,\theta_i,1)f_\prime(t,x), & a<\theta_i<|x|<1,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_+(|x|,a,1)f_\prime(t,x), & \theta_i<a<|x|<1,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ f_\prime(t,x), & |x|\geqslant1,\ \ t\in\mathbb{R}_+,\end{cases}\qquad i\in\mathbb{N}.$$

Для решений $x_f(\cdot, x_0)$ этой системы при каждом $\theta \in (a,1)$ выполнено включение

$$x_f^i(\cdot, x_0) \in \begin{cases} \mathcal{A}_1, & \theta_i \in (0,a) \cup (a,\theta), \\ \mathcal{A}_0, & \theta_i \in (\theta,1), \end{cases} \quad i \in \mathbb{N}.$$

2.3. Если $0 < a < b < 1$, то выбираем систему $\dot{x} = f(t,x)$ с правой частью

$$f(t,x) \equiv \begin{cases} \psi_+(|x|,0,\theta_i) f_\prime(t,x), & 0 \leqslant |x| \leqslant \theta_i < a, \ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|,\theta_i,a) f_\prime(t,x), & \theta_i < |x| \leqslant a, \ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|,0,a) f_\prime(t,x), & 0 \leqslant |x| < a \leqslant \theta_i, \ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|,a,\theta_i) f_\prime(t,x), & a < |x| \leqslant \theta_i, \ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|,\theta_i,b) f_\prime(t,x), & a < \theta_i < |x| \leqslant b, \ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|,a,b) f_\prime(t,x), & \theta_i < a < |x| < b, \ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|,a,b) f_\prime(t,x), & a < |x| < b < \theta_i, \ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|,b,\theta_i) f_\prime(t,x), & b < |x| \leqslant \theta_i, \ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_-(|x|,\theta_i,1) f_\prime(t,x), & b < \theta_i < |x| < 1, \ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|,b,1) f_\prime(t,x), & \theta_i < b < |x| < 1, \ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ f_\prime(t,x), & |x| \geqslant 1, \ t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Для решений $x_f(\cdot, x_0)$ этой системы при каждом $\theta \in (a,b)$ выполнено включение

$$x_f^i(\cdot, x_0) \in \begin{cases} \mathcal{A}_1, & \theta_i \in (0,a) \cup (a,\theta), \\ \mathcal{A}_0, & \theta_i \in (\theta,b) \cup (b,1), \end{cases} \quad i \in \mathbb{N}.$$

2.4. Если $a = 0$, $b = 1$, то выбираем систему $\dot{x} = f(t,x)$ с правой частью

$$f(t,x) \equiv \begin{cases} \psi_-(|x|,0,\theta_i) f_\prime(t,x), & 0 < |x| \leqslant \theta_i, \ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ \psi_+(|x|,\theta_i,1) f_\prime(t,x), & \theta_i < |x| < 1, \ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \\ f_\prime(t,x), & |x| \geqslant 1, \ t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Для решений $x_f(\cdot, x_0)$ этой системы при каждом $\theta \in (0,1)$ выполнено включение (13).

Таким образом, каждый из рассмотренных четырёх случаев на основании рассуждений, проведённых в п. 1 настоящего доказательства, приводит к равенствам (9). Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в настоящей статье результаты показали, что непосредственная связь между мощностями спектров показателей блуждаемости нелинейной системы и системы её первого приближения отсутствует. В работе [14] доказано существование такой двумерной нелинейной дифференциальной системы с линейным приближением, имеющим произвольно заданные отрицательные характеристические показатели Ляпунова, и нелинейностью произвольно заданного высокого порядка малости в окрестности начала координат, что все её нетривиальные решения бесконечно продолжимы вправо и множество их показателей Ляпунова совпадает с заданным ограниченным суслинским множеством положительной полуоси. Остаётся открытым вопрос о возможности перенесения аналогичного свойства на показатели блуждаемости.

Авторы благодарны И.Н. Сергееву за ценные замечания, а также В.В. Быкову за обсуждение результатов статьи.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 075-03-2024-074/5 по проекту "Исследование асимптотических характеристик колеблемости дифференциальных уравнений и систем, а также оптимизационных методов".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергеев, И.Н. Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2021. — № 3. — С. 41–46.
2. Сергеев, И.Н. Исследование показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости по первому приближению / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 726–734.
3. Perron, O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen / O. Perron // Math. Zeitschr. — 2023. — Bd. 32, Hf. 1. — S. 703–728.
4. Леонов, Г.А. Об одной модификации контрпримера Перрона / Г.А. Леонов // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 11. — С. 1566–1567.
5. Ильин, А.В. Бесконечный вариант эффекта Перрона смены значений характеристических показателей дифференциальных систем / А.В. Ильин, Н.А. Изобов // Докл. РАН. — 2014. — Т. 457, № 2. — С. 147–151.
6. Изобов, Н.А. Континуальный вариант эффекта Перрона смены значений характеристических показателей / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 11. — С. 1427–1439.
7. Сташ, А.Х. Сравнение спектров показателей колеблемости нелинейной системы и системы первого приближения / А.Х. Сташ // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 8. — С. 1139–1142.
8. Лобода, Н.А. Сравнение спектров показателей блуждаемости нелинейной двумерной системы и системы первого приближения / Н.А. Лобода // Вестн. рос. ун-тов. Математика. — 2024. — Т. 29, № 146. — С. 176–187.
9. Сташ, А.Х. О спектрах показателей колеблемости двумерной нелинейной системы и системы её первого приближения / А.Х. Сташ // Дифференц. уравнения. — 2025. — Т. 61, № 2. — С. 207–220.
10. Сергеев, И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Изв. РАН. Сер. матем. — 2012. — Т. 76, № 1. — С. 149–172.
11. Сергеев, И.Н. Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. — 2015. — № 2 (46). — С. 171–183.
12. Сергеев, И.Н. Определение характеристик блуждаемости решений линейной системы / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 6. — С. 902.
13. Козлов, В.В. Весовые средние, равномерное распределение и строгая эргодичность / В.В. Козлов // Успехи мат. наук. — 2005. — Т. 60, № 6. — С. 115–138.
14. Изобов, Н.А. Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 4. — С. 464–472.

ON THE CHANGE IN THE POWER OF THE SPECTRUM OF THE EXACT AND ABSOLUTE WANDERING EXPONENT DURING THE TRANSITION FROM A TWO-DIMENSIONAL NONLINEAR SYSTEM TO A SYSTEM OF ITS FIRST APPROXIMATION

A. Kh. Stash[1], N. A. Loboda[2]

Adyghe State University, Maykop, Russia
e-mail: [1] aidamir.stash@gmail.com, [2] n-loboda@yandex.ru

The sets of values (spectra) of the wandering exponents of solutions of differential systems are studied. Two-dimensional systems with nonlinearity of an arbitrarily specified higher order of smallness in the neighborhood of the origin are constructed, for which all solutions are infinitely extendable to the right and any of the spectra of their wandering exponents can coincide with both the segment $[0, 1]$ and with any pre-specified non-empty subset of rational numbers of this segment, while the spectra of linear systems of their first approximation consist of only one element. Moreover, the spectra of the exponents of the original system coincide with the corresponding spectra of the wandering exponents of the narrowing of the constructed nonlinear two-dimensional systems to the direct product of any open neighborhood of the zero of the phase plane and the time semi-axis.

Keywords: differential equation, linear system, nonlinear system, oscillation, number of zeros, Lyapunov exponent, oscillation exponents, exponents of wandering

FUNDING

This work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of state task no. 075-03-2024-074/5 according to the project "Study of asymptotic characteristics of oscillation of differential equations and systems, as well as optimization methods".

REFERENCES

1. Sergeev, I.N., The definition of the indices of oscillation, rotation, and wandering of nonlinear differential systems, *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2021, vol. 76, no. 3, pp. 129–134.
2. Sergeev, I.N., Studying the oscillation, rotation, and wandering indicators by the first approximation, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 6, pp. 741–750.
3. Perron, O., Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen, *Math. Zeitschr.*, 2023, Bd. 32, Hf. 1, S. 703–728.
4. Leonov, G.A., A modification of Perron's counterexample, *Differ. Equat.*, 2003, vol. 39, no. 11, pp. 1651–1652.
5. Il'in, A.V. and Izobov, N.A., Infinite version of the Perron value change effect for characteristic exponents of differential systems, *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, no. 1, pp. 435–439.
6. Izobov, N.A. and Il'in, A.V., Continual version of the perron effect of change of values of the characteristic exponents, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 11, pp. 1393–1405.
7. Stash, A.Kh., Comparing the spectra of oscillation exponents of a nonlinear system and the first approximation system, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 8, pp. 1147–1150.
8. Loboda, N.A., Comparing the spectra of wandering exponents of a nonlinear two-dimensional system and a first approximation system, *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2024, vol. 29, no. 146, pp. 176–187.
9. Stash, A.Kh., On the spectra of oscillation exponents of a two-dimensional nonlinear system and its first approximation system, *Differ. Equat.*, 2025, vol. 61, no. 2, pp. 207–220.
10. Sergeev, I.N., Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential systems, *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 139–162.
11. Sergeev, I.N., The complete set of relations between the oscillation, rotation and wandering indicators of solutions of differential systems, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2015, iss. 2 (46), pp. 171–183.
12. Sergeev, I.N., Determining the wandering characteristics of solutions of a linear system, *Differ. Equat.*, 2010, vol. 46, no. 6, p. 1639.
13. Kozlov, V.V., Weighted averages, uniform distribution, and strict ergodicity, *Russ. Math. Surv.*, 2005, vol. 60, no. 6, pp. 1121–1146.
14. Izobov, N.A. and Il'in, A.V., Construction of an arbitrary suslin set of positive characteristic exponents in the Perron effect, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 4, pp. 449–457.