ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 3, с. 305–315

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.25+517.984.52

О СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРА ДИРАКА С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

А. С. Макин

Институт прикладной математики и механики, г. Донецк

e-mail: alexmakin@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.11.2024 г., после доработки 29.11.2024 г.; принята к публикации 21.01.2025 г.

Изучены базисные свойства корневых функций 2×2 оператора Дирака с суммируемым комплекснозначным потенциалом и нерегулярными краевыми условиями. При выполнении определённых условий на спектр рассматриваемого оператора доказано, что система корневых функций неполна в пространстве $L_2(0,\pi)\oplus L_2(0,\pi)$, но образует безусловный базис в замыкании своей линейной оболочки.

Ключевые слова: оператор Дирака, система корневых функций, базисные свойства

DOI: 10.31857/S0374064125030025, EDN: HMWEWO

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе изучается система Дирака

$$B\mathbf{y}' + V\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \tag{1}$$

где $\mathbf{y} = \mathrm{col}(y_1(x), y_2(x))$,

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & P(x) \\ Q(x) & 0 \end{pmatrix},$$

функции $P, Q \in L_1(0,\pi)$, с двухточечными краевыми условиями

$$\begin{aligned} U_1(\mathbf{y}) &= a_{11}y_1(0) + a_{12}y_2(0) + a_{13}y_1(\pi) + a_{14}y_2(\pi) = 0, \\ U_2(\mathbf{y}) &= a_{21}y_1(0) + a_{22}y_2(0) + a_{23}y_1(\pi) + a_{24}y_2(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где коэффициенты a_{jk} — произвольные комплексные числа, а строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Обозначим через A_{jk} $(1 \leqslant j < k \leqslant 4)$ определитель, составленный из j-го и k-го столбцов матрицы A.

Оператор $\mathbb{L}\mathbf{y} = B\mathbf{y}' + V\mathbf{y}$ является линейным в пространстве $\mathbb{H} = L_2(0,\pi)\oplus L_2(0,\pi)$ с областью определения $D(\mathbb{L}) = \{\mathbf{y} \in W_1^1[0,\pi]\oplus W_1^1[0,\pi] \colon \mathbb{L}\mathbf{y} \in \mathbb{H},\ U_j(\mathbf{y}) = 0,\ j = 1,2\}$. В пространстве $\mathbb{H}$ вводится скалярное произведение

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int\limits_0^\pi \big(f_1(x)\overline{g_1(x)} + f_2(x)\overline{g_2(x)}\big)\,dx,$$

где $\mathbf{f} = \mathrm{col}(f_1(x), f_2(x))$, $\mathbf{g} = \mathrm{col}(g_1(x), g_2(x))$. Всюду в дальнейшем норму $\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{H}}$ будем обозначать как $\|\mathbf{f}\|$.

Задачи вида (1), (2) изучались многими авторами. В частности, В.А. Марченко [1] установил свойство полноты для систем корневых функций оператора $\mathbb{L}$ с регулярными краевыми условиями и непрерывным матричным потенциалом V. Это ограничение связано с тем, что операторы преобразования, использованные в [1] при доказательстве, были построены только для непрерывных потенциалов. Позднее М.М. Маламуд и Л.Л. Оридорога [2] установили полноту для регулярных краевых задач для произвольных $n\times n$ систем первого порядка обыкновенных дифференциальных уравнения (ОДУ) с интегрируемым матричным потенциалом $V\in L^1([0,\pi];\mathbb{C}^{n\times n})$ (этот результат был анонсирован в работе [3]).

Наиболее полные результаты о базисности Рисса краевых задач для 2×2 систем Дирака с потенциалом $V\in L^1([0,1];\mathbb{C}^{2\times 2})$ и усиленно регулярными краевыми условиями были получены независимо и одновременно (но разными методами) А.М. Савчуком и А.А. Шкаликовым [4] с одной стороны и А.А. Лунёвым и М.М. Маламудом [5, 6] с другой. Блок-базисность Рисса в случае L_1-потенциальной матрицы и регулярных краевых условий впервые была доказана в статье [4].

Заметим, что если условия (2) не являются регулярными, то спектр рассматриваемого оператора может значительно отличаться от спектра соответствующего невозмущённого оператора. Например, в [7] были построены примеры потенциалов $V(x)$, обеспечивающих неограниченный рост кратностей собственных значений. Свойство полноты также существенно зависит от потенциала $V(x)$, в частности, в этом случае система корневых функций невозмущённого оператора $(P(x)=Q(x)=0)$ неполна в пространстве $\mathbb{H}$ (см. [1]).

Первый результат о полноте для 2×2 оператора Дирака $\mathbb{L}$ с краевыми условиями, не являющимися регулярными, был установлен в статье [2]: получены необходимые условия полноты и доказана следующая

Теорема 1. *Если* $A_{14}=A_{32}=0$, *но* $A_{13}A_{42}\neq 0$ *и* $0\notin \operatorname{supp}(R_1(x)\cup R_2(x))$, *где* $R_1(x)=A_{13}P(x)-A_{42}Q(x-\pi)$, $R_2(x)=A_{13}P(\pi-x)-A_{42}Q(x)$, *то система корневых функций неполна в пространстве* $\mathbb{H}$.

В работе [8] А.П. Косарев и А.А. Шкаликов доказали полноту системы корневых функций задачи вида (1), (2), если коэффициенты абсолютно непрерывны и удовлетворяют некоторым дополнительным условиям на концах основного интервала. В [9] автором получены достаточные условия полноты системы корневых функций задачи (1), (2), если $V\in L_1$.

Заметим, что в исследованиях [10, 11] А.А. Лунёв и М.М. Маламуд установили ряд результатов о полноте (неполноте) системы корневых векторов для общих $n\times n$-систем ОДУ первого порядка в форме

$$\frac{1}{i}B\frac{d\mathbf{y}}{dx}+Q(x)\mathbf{y}=\lambda\mathbf{y},\quad \mathbf{y}=\operatorname{col}(y_1,\ldots,y_n),$$

где B — невырожденная диагональная $n\times n$-матрица:

$$B=\operatorname{diag}\big(b_1^{-1}I_{n_1},\ldots,b_r^{-1}I_{n_r}\big)\in\mathbb{C}^{n\times n},\quad n=n_1+\ldots+n_r,$$

с комплексными элементами $b_j\neq b_k$; $Q(x)$ — потенциальная матрица. При этом авторы накладывали определённые условия на гладкость коэффициентов рассматриваемого оператора.

Основной целью настоящей работы является исследование базисных свойств систем корневых функций задачи (1), (2) с нерегулярными краевыми условиями.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Обозначим через

$$E(x,\lambda)=\begin{pmatrix} e_{11}(x,\lambda) & e_{12}(x,\lambda)\\ e_{21}(x,\lambda) & e_{22}(x,\lambda)\end{pmatrix}\tag{3}$$

матрицу фундаментальных решений уравнения (1) с краевым условием $E(0,\lambda)=I$, где I — единичная матрица, и через

$$E_0(x,\lambda)=\begin{pmatrix} e_{11}^0(x,\lambda) & e_{12}^0(x,\lambda) \\ e_{21}^0(x,\lambda) & e_{22}^0(x,\lambda)\end{pmatrix}$$

систему фундаментальных решений уравнения $\mathbb{L}_0\mathbf{y}=\lambda\mathbf{y}$ с краевым условием $E_0(0,\lambda)=I$, где $\mathbb{L}_0\mathbf{y}=B\mathbf{y}'$. Очевидно, $e_{11}^0(x,\lambda)=e^{i\lambda x}$, $e_{22}^0(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}$, $e_{12}^0(x,\lambda)=e_{21}^0(x,\lambda)=0$.

Собственные значения задачи (1), (2) являются корнями характеристического уравнения

$$\Delta(\lambda)=0,$$

где

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(E^{[1]}(\cdot,\lambda)) & U_1(E^{[2]}(\cdot,\lambda)) \\ U_2(E^{[1]}(\cdot,\lambda)) & U_2(E^{[2]}(\cdot,\lambda))\end{vmatrix},$$

$E^{[k]}(x,\lambda)$ — k-й столбец матрицы (3). В [6] с помощью треугольного оператора преобразования было показано, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (1), (2) может быть приведён к виду

$$\Delta(\lambda)=A_{12}+A_{34}+A_{32}e_{11}(\pi,\lambda)+A_{14}e_{22}(\pi,\lambda)+A_{13}e_{12}(\pi,\lambda)+A_{42}e_{21}(\pi,\lambda)=$$
$$=\Delta_0(\lambda)+\int\limits_0^\pi r_1(t)e^{-i\lambda t}\,dt+\int\limits_0^\pi r_2(t)e^{i\lambda t}\,dt,$$

где функция

$$\Delta_0(\lambda)=A_{12}+A_{34}-A_{23}e^{i\pi\lambda}+A_{14}e^{-i\pi\lambda}$$

является характеристическим определителем задачи

$$B\mathbf{y}'=\lambda\mathbf{y},\quad U(\mathbf{y})=0, \tag{4}$$

а функции $r_j\in L_1(0,\pi)$, $j=1,2$.

Отсюда следует, что $\Delta(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа, следовательно, для оператора задачи (1), (2) существуют только следующие возможности: 1) спектр отсутствует; 2) спектр является конечным непустым множеством; 3) спектр представляет собой счётное множество, не имеющее конечной предельной точки; 4) спектр заполняет всю комплексную плоскость.

В работе [7] было установлено, что случай 2) не реализуется.

Определение 1. Краевые условия (2) называются *регулярными*, если

$$A_{14}A_{23}\neq 0, \tag{5}$$

и *усиленно регулярными*, если кроме (5) они удовлетворяют условию

$$(A_{12}+A_{34})^2+4A_{14}A_{23}\neq 0.$$

Регулярные краевые условия называются *регулярными, но не усиленно регулярными*, если они удовлетворяют условию

$$(A_{12}+A_{34})^2+4A_{14}A_{23}=0.$$

Известно, что для регулярных краевых условий имеют место формулы

$$\lambda_{n,1}=2n+\frac{\ln z_1}{i\pi}+\varepsilon_{n,1},\quad \lambda_{n,2}=2n+\frac{\ln z_2}{i\pi}+\varepsilon_{n,2},$$

где z_j являются корнями уравнения $A_{23}z^2-(A_{12}+A_{34})z-A_{14}=0$, $\varepsilon_{n,j}=o(1)$, $j=1,2$.

Определение 2. Краевые условия (2) называются *нерегулярными*, если

$$A_{14}A_{23}=0, \quad (A_{12}+A_{34})(|A_{23}|+|A_{14}|)\neq 0, \tag{6}$$

и *вырожденными*, если

$$A_{14}A_{23}=0, \quad (A_{12}+A_{34})(|A_{23}|+|A_{14}|)=0.$$

Очевидно, что характеристическое уравнение $\Delta_0(\lambda)=0$ для вырожденных краевых условий либо не имеет корней, либо $\Delta_0(\lambda)\equiv 0$.

Обозначим $(j=1,2)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{j1}(a,x,\lambda)&=e_{j1}(x,\lambda)e_{22}(a,\lambda)-e_{j2}(x,\lambda)e_{21}(a,\lambda),\\
\mathcal{E}_{j2}(a,x,\lambda)&=e_{j2}(x,\lambda)e_{11}(a,\lambda)-e_{j1}(x,\lambda)e_{12}(a,\lambda),\\
\mathcal{E}^0_{j1}(a,x,\lambda)&=e^0_{j1}(x,\lambda)e^0_{22}(a,\lambda)-e^0_{j2}(x,\lambda)e^0_{21}(a,\lambda),\\
\mathcal{E}^0_{j2}(a,x,\lambda)&=e^0_{j2}(x,\lambda)e^0_{11}(a,\lambda)-e^0_{j1}(x,\lambda)e^0_{12}(a,\lambda).
\end{aligned}$$

Для функции Грина задачи (1), (2) справедливо [12] представление

$$\begin{gathered}
G(t,x,\lambda)=\frac{i}{\Delta(\lambda)}\left(A_{12}\begin{pmatrix}\mathcal{E}_{11}(t,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{12}(t,x,\lambda)\\ \mathcal{E}_{21}(t,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{22}(t,x,\lambda)\end{pmatrix}+\right.\\
+\begin{pmatrix}\mathcal{E}_{11}(\pi,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{12}(\pi,x,\lambda)\\ \mathcal{E}_{21}(\pi,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{22}(\pi,x,\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{14} & A_{24}\\ A_{13} & A_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_{22}(t,\lambda) & e_{12}(t,\lambda)\\ -e_{21}(t,\lambda) & -e_{11}(t,\lambda)\end{pmatrix}-\\
\left.-\Delta(\lambda)\chi_{t>x}(t,x)\begin{pmatrix}\mathcal{E}_{11}(t,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{12}(t,x,\lambda)\\ \mathcal{E}_{21}(t,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{22}(t,x,\lambda)\end{pmatrix}\right),
\end{gathered}\tag{7}$$

где $\chi_{t>x}$ является характеристической функцией в треугольнике $t>x$.

Перемножая матрицы в правой части (7), получаем

$$G(t,x,\lambda)=\frac{iH(t,x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}-i\chi_{t>x}(t,x)\begin{pmatrix}\mathcal{E}_{11}(t,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{12}(t,x,\lambda)\\ \mathcal{E}_{21}(t,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{22}(t,x,\lambda)\end{pmatrix}, \tag{8}$$

где матрица $H(t,x,\lambda)=\|h_{jk}(t,x,\lambda)\|$ имеет элементы $(j=1,2)$

$$\begin{gathered}
h_{j1}(t,x,\lambda)=A_{12}\mathcal{E}_{j1}(t,x,\lambda)+[A_{14}\mathcal{E}_{j1}(\pi,x,\lambda)-A_{13}\mathcal{E}_{j2}(\pi,x,\lambda)]e_{22}(t,\lambda)-\\
-[A_{24}\mathcal{E}_{j1}(\pi,x,\lambda)-A_{23}\mathcal{E}_{j2}(\pi,x,\lambda)]e_{21}(t,\lambda),\\
h_{j2}(t,x,\lambda)=-A_{12}\mathcal{E}_{j2}(t,x,\lambda)+[A_{14}\mathcal{E}_{j1}(\pi,x,\lambda)-A_{13}\mathcal{E}_{j2}(\pi,x,\lambda)]e_{12}(t,\lambda)-\\
-[A_{24}\mathcal{E}_{j1}(\pi,x,\lambda)-A_{23}\mathcal{E}_{j2}(\pi,x,\lambda)]e_{11}(t,\lambda).
\end{gathered}$$

В полосе $\Pi\colon |\operatorname{Im}\lambda|<C$ справедливы [12] оценки

$$e_{jk}(x,\lambda)=e^0_{jk}(x,\lambda)+o(1), \quad \mathcal{E}_{jk}(t,x,\lambda)=\mathcal{E}^0_{jk}(t,x,\lambda)+o(1), \tag{9}$$

выполняющиеся равномерно по t, x $(j,k=1,2)$.

Из результатов в [12] следует, что функция Грина $G_0(t,x,\lambda)$ невозмущённой задачи (4) может быть представлена в виде

$$G_0(t,x,\lambda)=\frac{iH_0(t,x,\lambda)}{\Delta_0(\lambda)}-i\chi_{t>x}(t,x)\begin{pmatrix} e^{i\lambda(x-t)} & 0 \\ 0 & -e^{i\lambda(t-x)} \end{pmatrix},$$

где

$$H_0(t,x,\lambda)=\|h^0_{jk}(t,x,\lambda)\|=\begin{pmatrix} A_{12}e^{i\lambda(x-t)}+A_{14}e^{i\lambda(x-\pi-t)} & -A_{24}e^{i\lambda(x-\pi+t)} \\ -A_{13}e^{i\lambda(\pi-x-t)} & -A_{12}e^{i\lambda(t-x)}+A_{23}e^{i\lambda(\pi-x+t)} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} e^{i\lambda(x-t)}(A_{12}+A_{14}e^{-i\pi\lambda}) & -A_{24}e^{i\lambda(x-\pi+t)} \\ -A_{13}e^{i\lambda(\pi-x-t)} & e^{i\lambda(t-x)}(-A_{12}+A_{23}e^{i\pi\lambda}) \end{pmatrix}.$$

Из (9) вытекает, что в полосе Π имеют место равенства

$$h_{jk}(t,x,\lambda)=h^0_{jk}(t,x,\lambda)+o(1),\quad j,k=1,2. \tag{10}$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Далее считаем, что краевые условия (2) нерегулярны, т.е. имеют место соотношения (6). Тогда характеристический определитель может быть приведён к одному из следующих видов:

$$\Delta(\lambda)=d-e^{i\pi\lambda}+\int\limits_0^\pi r_1(t)e^{-i\lambda t}\,dt+\int\limits_0^\pi r_2(t)e^{i\lambda t}\,dt \tag{11}$$

или

$$\Delta(\lambda)=d-e^{-i\pi\lambda}+\int\limits_0^\pi r_1(t)e^{-i\lambda t}\,dt+\int\limits_0^\pi r_2(t)e^{i\lambda t}\,dt,$$

где $d\neq 0$. Будем полагать, что выполняется равенство (11) (второй случай рассматривается аналогично).

Теорема 2. *Пусть собственные значения задачи* (1), (2), (6) *лежат внутри полосы* Π:

$$|\operatorname{Im}\lambda|\leqslant M. \tag{12}$$

Тогда система корневых функций задачи (1), (2), (6) *образует безусловный базис в замыкании своей линейной оболочки. Если* $P,Q\in L_2(0,\pi)$, *то система корневых функций задачи* (1), (2), (6) *неполна в пространстве* $\mathbb{H}$.

Доказательство. Характеристическое уравнение невозмущённой задачи (4), (6) имеет вид

$$\Delta_0(\lambda)=d-e^{i\pi\lambda}=0, \tag{13}$$

где $d\neq 0$. Пусть $d=e^{i\pi d_0}$, $0\leqslant\operatorname{Re}d_0<2$. Из тривиального равенства

$$1-e^{i\pi\lambda}=-2ie^{i\pi\lambda/2}\sin\frac{\pi\lambda}{2}$$

и хорошо известного разложения функции $\sin z$ в бесконечное произведение следует, что

$$\Delta_0(\lambda)=e^{i\pi d_0}-e^{i\pi\lambda}=e^{i\pi d_0}(1-e^{i\pi(\lambda-d_0)})=i\pi e^{i\pi(d_0+\lambda)/2}(\lambda-d_0)\prod_{n=-\infty,\,n\neq 0}^{+\infty}\frac{2n+d_0-\lambda}{2n},$$

стало быть, уравнение (13) имеет корни

$$\lambda_n^0 = 2n + d_0, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{14}$$

Обозначим $\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda) = f(\lambda)$. Из (11) вытекает, что в полосе Π

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} f(\lambda) = 0.$$

Обозначим через $\Gamma(z,r)$ окружность с центром в точке z и радиуса r. Легко видеть, что для любого числа $0<\delta<1$ существуют $\sigma(\delta)>0$ и $C(\delta)>0$ такие, что вне множества $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{Z}}\Gamma(2n+d_0,\delta)$ в полосе Π при $|\operatorname{Re}\lambda| > C(\delta)$ справедливы неравенства

$$|\Delta_0(\lambda)| > \sigma(\delta), \quad |f(\lambda)| < \sigma(\delta)/2, \tag{15}$$

откуда по теореме Руше следует, что при всех n таких, что

$$|2n + \operatorname{Re} d_0| \geqslant C(\delta) + 1, \tag{16}$$

внутри каждой окружности $\Gamma(2n+d_0,\delta)$ функция $\Delta(\lambda)$ имеет ровно один корень $\lambda_n = 2n + {}+d_0 + \varepsilon_n$, где $|\varepsilon_n| < \delta$. Отсюда, в частности, имеем $\varepsilon_n \to 0$ при $|n| \to \infty$. Обозначим множество номеров n, удовлетворяющих неравенству (16) при некотором фиксированном δ_0 $(0<\delta_0<1)$ через $\mathbb{Z}'$, а множество соответствующих чисел λ_n — через Λ'. Очевидно, что множество $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}'$ конечно или пусто, обозначим число входящих в него элементов через $\hat{N}$. Из неравенств (15) также следует, что вне Ω в полосе Π при $|\operatorname{Re}\lambda| > C$ функция $\Delta(\lambda)$ не имеет корней. В прямоугольнике $\Pi \cap \{|\operatorname{Re}\lambda| \leqslant C + \operatorname{Re} d_0 + 1\}$ функция $\Delta(\lambda)$ может иметь не более конечного числа корней (или не иметь совсем). Обозначим те из них, которые не входят в Λ', через $\tilde{\lambda}_k$, $k = \overline{1, N_0}$. Отсюда заключаем, что спектром задачи (1), (2), (6) является множество $\Lambda = \tilde{\Lambda} \cup \Lambda'$, где $\tilde{\Lambda} = \{\tilde{\lambda}_k\}$.

Пусть $Y = \{\tilde{\mathbf{y}}_k\} \cup \{\mathbf{y}_n\}$ — система собственных и присоединённых функций задачи (1), (2), (6), где $\tilde{\mathbf{y}}_k$ — корневая функция, отвечающая собственному значению $\tilde{\lambda}_k$, а $\mathbf{y}_n = \operatorname{col}(y_n^{[1]}, y_n^{[2]})$ — собственная функция, отвечающая собственному значению λ_n. Биортогонально сопряжённой к ней является система собственных и присоединённых функций $Z = \{\tilde{\mathbf{z}}_k\} \cup \{\mathbf{z}_n\}$ сопряжённой задачи, где $\tilde{\mathbf{z}}_k$ — корневая функция, отвечающая собственному значению $\overline{\tilde{\lambda}_k}$, а $\mathbf{z}_n$ — собственная функция, отвечающая собственному значению $\bar{\lambda}_n$. Докажем, что система функций Y образует безусловный базис в замыкании своей линейной оболочки $\mathbb{H}'$.

Так как λ_n является простым собственным значением задачи (1), (2), (6), то [13] главная часть функции Грина $G(t,x,\lambda)$ в окрестности λ_n имеет вид

$$\frac{\mathbf{y}_n(x)\overline{\mathbf{z}_n(t)}^{\mathrm{T}}}{\lambda - \lambda_n}.$$

Отсюда и из (8) следует, что

$$\mathbf{y}_n(x)\overline{\mathbf{z}_n(t)}^{\mathrm{T}} = \frac{iH(t,x,\lambda_n)}{\Delta'(\lambda_n)}. \tag{17}$$

Дифференцируя равенство (11), находим

$$\Delta'(\lambda) = -i\pi e^{i\pi\lambda} - i\int_0^\pi tr_1(t)e^{-i\lambda t}\,dt + i\int_0^\pi tr_2(t)e^{i\lambda t}\,dt.$$

Отсюда и из леммы Римана вытекает, что при всех достаточно больши́х n

$$0 < c_1 < |\Delta'(\lambda_n)| < c_2. \tag{18}$$

Из (8), (10), (17), (18) имеем

$$\|\mathbf{y}_n\|^2\|\mathbf{z}_n\|^2 = \sum_{j,l=1}^{2} \big\|y_n^{[j]} z_n^{[l]}\big\|^2_{L_2((0,\pi)\times(0,\pi))} < c_3 \tag{19}$$

для любого n. Перенумеруем функции системы Y в произвольном порядке и получим систему собственных и присоединённых функций задачи (1), (2), (6) $\{\psi_m\}$, $m\in\mathbb{N}$. Занумеруем функции системы Z так, чтобы в полученной биортогональной системе собственных и присоединённых функций φ_m функция ψ_m стояла в паре с φ_m. Из результатов статьи [14] следует, что системы функций $\{\psi_m/\|\psi_m\|\}$ и $\{\varphi_m/\|\varphi_m\|\}$ бесселевы в $\mathbb{H}$.

Обозначим

$$P_n\mathbf{f} = \sum_{m=1}^{n} \langle \mathbf{f}, \varphi_m\rangle \psi_m(x), \quad \mathbf{f}\in\mathbb{H}, \ \ n\in\mathbb{N}.$$

Используя (19) и повторяя рассуждения [14, с. 591], находим, что для любой функции $\mathbf{f}\in\mathbb{H}$

$$\|P_n\mathbf{f}\| \leqslant C\|\mathbf{f}\|,$$

где константа C не зависит от n. Так как система $\{\psi_m\}$ полна и минимальна в $\mathbb{H}'$, то из последнего неравенства вытекает [15, с. 11], что $\{\psi_m\}$ образует базис в $\mathbb{H}'$. В силу произвольной нумерации функций ψ_m отсюда следует, что система Y является безусловным базисом в $\mathbb{H}'$.

Докажем вторую часть теоремы. Из (14) следует, что собственные функции невозмущённой задачи (4), (6) имеют вид

$$\mathring{\mathbf{y}}_n = \operatorname{col}\big(\alpha_n e^{i(2n+d_0)x}, \beta_n e^{-i(2n+d_0)x}\big),$$

где $|\alpha_n| + |\beta_n| > 0$, $n\in\mathbb{Z}$. Обозначим

$$\mathring{Y} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathring{\mathbf{y}}_n = \Bigg(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}'} \mathring{\mathbf{y}}_n\Bigg) \cup \Bigg(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}'} \mathring{\mathbf{y}}_n\Bigg).$$

Рассмотрим задачу (4), где краевые условия определяются матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -d & 0 \\ 0 & -d & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Краевые условия (20) являются регулярными, но не усиленно регулярными. Известно [16], что задача (4), (20) имеет двукратные собственные значения $\lambda_{n,j} = 2n + d_0$, где $n\in\mathbb{Z}$, $j = 1, 2$, причём все корневые подпространства состоят из двух собственных функций. В качестве одной из них выберем $\mathring{\mathbf{y}}_n$, вторую обозначим $\mathring{\mathbf{w}}_n$ $(n\in\mathbb{Z})$. Обозначим также $\mathring{W} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathring{\mathbf{w}}_n$. Система $\mathring{Y}\cup\mathring{W}$ полна и минимальна в $\mathbb{H}$.

Докажем, что

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}'} \|\mathbf{y}_n - \mathring{\mathbf{y}}_n\|^2 < C_1. \tag{21}$$

Из (10), (11) и (14) находим

$$d(e^{i\pi\varepsilon_n}-1)=\int\limits_{-\pi}^{\pi} r(t)e^{i(2n+d_0+\varepsilon_n)t}\,dt, \quad r\in L_2(0,\pi).$$

Отсюда и из бесселевости системы функций $\{e^{i(2n+\varepsilon_n)t}\}$ $(n\in\mathbb{Z}')$ вытекает, что

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}'}|\varepsilon_n|^2\leqslant c_4\sum_{n\in\mathbb{Z}'}|e^{i\pi\varepsilon_n}-1|^2\leqslant c_5\sum_{n\in\mathbb{Z}'}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{id_0t}r(t)e^{i(2n+\varepsilon_n)t}\,dt\right|^2<c_6. \tag{22}$$

Так как $e^{i(2n+d_0)\pi}=e^{id_0\pi}$, $e^{-i(2n+d_0)\pi}=e^{-id_0\pi}$ для любого n, то

$$U_j\big(E_0^{[k]}(\cdot,2n+d_0)\big)=\gamma_{jk},$$

причём γ_{jk} не зависят от n. Поскольку $\lambda_n^0=2n+d_0$ — простые собственные значения, то хотя бы одно из чисел γ_{jk} не равно нулю. Пусть, например, $\gamma_{22}\neq 0$. Тогда [17, с. 84] функция

$$\mathring{\mathbf{y}}_n=U_2\big(E_0^{[2]}(\cdot,\lambda_n^0)\big)E_0^{[1]}(x,\lambda_n^0)-U_2\big(E_0^{[1]}(\cdot,\lambda_n^0)\big)E_0^{[2]}(x,\lambda_n^0)=$$
$$=\gamma_{22}\operatorname{col}(e^{i(2n+d_0)\pi x},0)-\gamma_{21}\operatorname{col}(0,e^{-i(2n+d_0)\pi x}). \tag{23}$$

Легко видеть, что

$$0<c_7<\|\mathring{\mathbf{y}}_n\|<c_8,$$

т.е. что система функций $\mathring{Y}$ почти нормирована.

Из (10) вытекает, что

$$U_j\big(E^{[k]}(\cdot,\lambda_n)\big)-U_j\big(E_0^{[k]}(\cdot,\lambda_n)\big)=o(1), \quad j,k=1,2.$$

Очевидно,

$$U_j\big(E_0^{[k]}(\cdot,\lambda_n)\big)-U_j\big(E_0^{[k]}(\cdot,\lambda_n^0)\big)<c_9|\varepsilon_n|.$$

Из двух последних неравенств имеем

$$U_j\big(E^{[k]}(\cdot,\lambda_n)\big)-U_j\big(E_0^{[k]}(\cdot,\lambda_n^0)\big)=o(1). \tag{24}$$

Из (23) и (24) вытекает, что при всех достаточно бо́льших n

$$\big|U_2\big(E^{[2]}(\cdot,\lambda_n)\big)\big|\geqslant\delta>0,$$

следовательно [17, с. 84], функция

$$\mathbf{y}_n=U_2\big(E^{[2]}(\cdot,\lambda_n)\big)E^{[1]}(x,\lambda_n)-U_2\big(E^{[1]}(\cdot,\lambda_n)\big)E^{[2]}(x,\lambda_n)$$

является собственной функцией задачи (1), (2), (6), отвечающей собственному значению λ_n.

Тогда для любых $i,j,k=1,2$ и любого $x\in[0,\pi]$

$$\big|U_j\big(E^{[k]}(\cdot,\lambda_n)\big)E^{[i]}(x,\lambda_n)-U_j\big(E_0^{[k]}(\cdot,\lambda_n)\big)E_0^{[i]}(x,\lambda_n)\big|\leqslant$$
$$\leqslant\big|U_j\big(E^{[k]}(\cdot,\lambda_n)\big)\big|\big|E^{[i]}(x,\lambda_n)-E_0^{[i]}(x,\lambda_n)\big|+\big|U_j\big(E^{[k]}(\cdot,\lambda_n)\big)-U_j\big(E_0^{[k]}(\cdot,\lambda_n)\big)\big|\big|E_0^{[i]}(x,\lambda_n)\big|\leqslant$$
$$\leqslant c_{10}\Big(\big|E^{[i]}(x,\lambda_n)-E_0^{[i]}(x,\lambda_n)\big|+\big|U_j\big(E^{[k]}(\cdot,\lambda_n)\big)-U_j\big(E_0^{[k]}(\cdot,\lambda_n)\big)\big|\Big).$$

Из последнего неравенства с учётом результатов [18, с. 716] следует, что

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}'}\left|U_j\big(E^{[k]}(\cdot,\lambda_n)\big)E^{[i]}(x,\lambda_n)-U_j\big(E_0^{[k]}(\cdot,\lambda_n)\big)E_0^{[i]}(x,\lambda_n)\right|^2\leqslant c_{11}. \tag{25}$$

Из явного вида функций $E_0^{[k]}$ получаем

$$\left|U_j\big(E_0^{[k]}(\cdot,\lambda_n)\big)E_0^{[i]}(x,\lambda_n)-U_j\big(E_0^{[k]}(\cdot,\lambda_n^0)\big)E_0^{[i]}(x,\lambda_n^0)\right|^2<c_{12}|\varepsilon_n|.$$

Отсюда и из (22) вытекает, что

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}'}\left|U_j\big(E_0^{[k]}(\cdot,\lambda_n)\big)E_0^{[i]}(x,\lambda_n)-U_j\big(E_0^{[k]}(\cdot,\lambda_n^0)\big)E_0^{[i]}(x,\lambda_n^0)\right|^2<c_{13}. \tag{26}$$

Из (25) и (26) выводим

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}'}\left|U_j\big(E^{[k]}(\cdot,\lambda_n)\big)E^{[i]}(x,\lambda_n)-U_j\big(E_0^{[k]}(\cdot,\lambda_n^0)\big)E_0^{[i]}(x,\lambda_n^0)\right|^2<c_{14}. \tag{27}$$

Обозначим

$$\check{\mathbf{y}}_n=U_2\big(E^{[2]}(\cdot,\lambda_n)\big)E^{[1]}(x,\lambda_n)-U_2\big(E_0^{[1]}(\cdot,\lambda_n)\big)E_0^{[2]}(x,\lambda_n).$$

Из (25) и (27), соответственно, имеем

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}'}\|\mathbf{y}_n-\check{\mathbf{y}}_n\|^2<c_{15},\quad \sum_{n\in\mathbb{Z}'}\|\check{\mathbf{y}}_n-\mathring{\mathbf{y}}_n\|^2<c_{16}.$$

Из двух последних неравенств вытекает справедливость оценки (21), следовательно, система Y почти нормирована.

Далее рассмотрим три случая.

1. $\hat N=N_0$. Тогда можно установить взаимно однозначное соответствие между функциями $\tilde{\mathbf{y}}_k$, $k=\overline{1,N_0}$, и $\mathring{\mathbf{y}}_n$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}'$. Пусть функции $\tilde{\mathbf{y}}_k$ соответствует функция $\mathring{\mathbf{y}}_k$. Очевидно,

$$\sum_{k=1}^{N_0}\|\tilde{\mathbf{y}}_k-\mathring{\mathbf{y}}_k\|^2<c_{17}. \tag{28}$$

Из (21) и (28) следует, что системы Y и $\mathring{Y}$ квадратично близки в пространстве $\mathbb{H}$. Предположим, что Y полна в $\mathbb{H}$, тогда, согласно доказанному ранее, Y образует базис Рисса в $\mathbb{H}$. Система $\mathring{Y}$ минимальна и квадратично близка к Y [19, теорема 2.3], следовательно, $\mathring{Y}$ является базисом Рисса в $\mathbb{H}$, что является противоречием, так как она неполна в $\mathbb{H}$.

2. $N_0<\hat N$. Тогда, удалив из системы $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}'}\mathring{\mathbf{y}}_n$ произвольные $\hat N-N_0$ собственных функций, получим систему $\mathring{Y}''$, состоящую из N_0 элементов. Отсюда следует, что можно установить взаимно однозначное соответствие между функциями $\tilde{\mathbf{y}}_k$, $k=\overline{1,N_0}$, и функциями системы $\mathring{Y}''$. Рассуждая далее аналогично случаю 1, получаем утверждение теоремы.

3. $N_0>\hat N$. Тогда, добавив к системе $\cup_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}'}\mathring{\mathbf{y}}_n$ произвольные $N_0-\hat N$ собственных функций из системы $\mathring{W}$, получим систему $\mathring{Y}'''$, состоящую из N_0 элементов. Отсюда следует, что можно установить взаимно однозначное соответствие между функциями $\tilde{\mathbf{y}}_k$, $k=\overline{1,N_0}$, и функциями системы $\mathring{Y}'''$. Система $\mathring{Y}'''\cup\big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}'}\mathring{Y}_n\big)$ неполна и минимальна в $\mathbb{H}$. Рассуждая далее аналогично случаю 1, получаем утверждение теоремы.

Замечание 1. Любая задача вида (1), (2), (6) имеет подпоследовательность собственных значений, удовлетворяющую условию (12).

Замечание 2. Существование задач (1), (2), (6) с потенциалами $V\in L_2(0,\pi)$ $(V\not\equiv 0)$, спектр которых удовлетворяет условию (12), было установлено в работе [20].

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марченко, В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения / В.А. Марченко. — Киев : Наукова думка, 1977. — 330 с.
2. Malamud, M.M. On the completeness of root subspaces of boundary value problems for first order systems of ordinary differential equations / M.M. Malamud, L.L. Oridoroga // J. Funct. Anal. — 2012. — V. 263, № 7. — P. 1939–1980.
3. Malamud, M.M. Completeness theorems for systems of differential equations / M.M. Malamud, L.L. Oridoroga // Funct. Anal. Appl. — 2000. — V. 34, № 4. — P. 308–310.
4. Savchuk, A.M. The Dirac operator with complex-valued summable potential / A.M. Savchuk, A.A. Shkalikov // Math. Notes. — 2014. — V. 96, № 5. — P. 777–810.
5. Лунев, А.А. О базисности Рисса системы корневых векторов для (2×2)-системы типа Дирака / А.А. Лунев, М.М. Маламуд // Докл. РАН. — 2014. — Т. 458, № 3. — С. 255–260.
6. Lunyov, A.A. On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators / A.A. Lunyov, M.M. Malamud // J. Math. Anal. Appl. — 2016. — V. 441. — P. 57–103.
7. Макин, А.С. О спектре двухточечных краевых задач для оператора Дирака / А.С. Макин // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 8. — С. 1023–1031.
8. Косарев, А.П. Спектральные асимптотики решений 2×2-системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка / А.П. Косарев, А.А. Шкаликов // Мат. заметки. — 2021. — Т. 110, № 6. — С. 939–943.
9. Makin, A.S. On the completeness of root function system of the Dirac operator with two-point boundary conditions / A.S. Makin // Mathematische Nachrichten. — 2024. — V. 297, № 7. — P. 2468–2487.
10. Lunyov, A.A. On spectral synthesis for dissipative Dirac type operators / A.A. Lunyov, M.M. Malamud // Integral Equations and Operator Theory. — 2014. — V. 90. — P. 79–106.
11. Lunyov, A.A. On the completeness and Riesz basis property of root subspaces of boundary value problems for first order systems and applications / A.A. Lunyov, M.M. Malamud // J. of Spectral Theory. — 2015. — V. 5, № 1. — P. 17–70.
12. Савчук, А.М. Базисность Рисса со скобками для системы Дирака с суммируемым потенциалом / А.М. Савчук, И.В. Садовничая // Соврем. математика. Фунд. направления. — 2015. — Т. 58. — Р. 128–152.
13. Келдыш, М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов / М.В. Келдыш // Успехи мат. наук. — 1971. — Т. 26, № 4. — С. 15–41.
14. Курбанов, В.М. Неравенство Бесселя и базисность для $2m\times 2m$-системы типа Дирака с суммируемым потенциалом / В.М. Курбанов, Г.Р. Гаджиева // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 5. — С. 584–594.
15. Кашин, Б.С. Ортогональные ряды / Б.С. Кашин, А.А. Саакян. — 2-е изд., доп. — М. : Изд-во Научно-исследовательского актуарно-финансового центра (АФИ), 1999. — 560 с.
16. Djakov, P. Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions / P. Djakov, B. Mityagin // Indiana Univ. Math. J. — 2012. — V. 61, № 1. — P. 359–398.
17. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.
18. Lunyov, A.A. Stability of spectral characteristics of boundary value problems for 2×2 Dirac type systems / A.A. Lunyov, M.M. Malamud // J. Differ. Equat. — 2022. — V. 313. — P. 633–742.
19. Гохберг, И.Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. — М. : Наука, 1965. — 448 с.
20. Макин, А.С. О спектре несамосопряжённого оператора Дирака с двухточечными краевыми условиями / А.С. Макин // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 2. — С. 157–174.

ON PROPERTIES OF DIRAC OPERATOR WITH IRREGULAR BOUNDARY CONDITIONS

© 2025 / **A. S. Makin**

Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Russia
e-mail: alexmakin@yandex.ru

The paper is concerned with the basis properties of root functions of the 2×2 Dirac operator with summable complex-valued potential and irregular boundary conditions. When certain conditions on the spectrum of the operator under consideration are satisfied, we prove that the system of root functions of this operator is incomplete in the space $L_2(0,\pi)\oplus L_2(0,\pi)$ but forms unconditional basis in the closure of its linear hull.

Keywords: Dirac operator, root function system, basis properties

REFERENCES

1. Marchenko, V.A., *Sturm–Liouville Operators and Their Applications*, Basel: Birkhäuser Verlag, 1986.
2. Malamud, M.M. and Oridoroga, L.L., On the completeness of root subspaces of boundary value problems for first order systems of ordinary differential equations, *J. Funct. Anal.*, 2012, vol. 263, no. 7, pp. 1939–1980.
3. Malamud, M.M. and Oridoroga, L.L., Completeness theorems for systems of differential equations, *Funct. Anal. Appl.*, 2000, vol. 34, no. 4, pp. 308–310.
4. Savchuk, A.M. and Shkalikov, A.A., The Dirac operator with complex-valued summable potential, *Math. Notes*, 2014, vol. 96, no. 5, pp. 777–810.
5. Lunyov, A.A. and Malamud, M.M., On the Riesz basis property of the system of root vectors for a (2×2)-system of Dirac type, *Dokl. Ros. Akad. Nauk*, 2014, vol. 458, no. 3, pp. 255–260.
6. Lunyov, A.A. and Malamud, M.M., On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators, *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, vol. 441, pp. 57–103.
7. Makin, A.S., On the spectrum of two-point boundary value problems for the Dirac operator, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 8, pp. 993–1002.
8. Kosarev, A.P. and Shkalikov, A.A., Spectral asymptotics of solutions of a 2×2 system of first-order ordinary differential equations, *Math. Notes*, 2021, vol. 110, no. 6, pp. 967–971.
9. Makin, A.S., On the completeness of root function system of the Dirac operator with two-point boundary conditions, *Mathematische Nachrichten*, 2024, vol. 297, no. 7, pp. 2468–2487.
10. Lunyov, A.A. and Malamud, M.M., On spectral synthesis for dissipative Dirac type operators, *Integral Equations and Operator Theory*, 2014, vol. 90, pp. 79–106.
11. Lunyov, A.A. and Malamud, M.M., On the completeness and Riesz basis property of root subspaces of boundary value problems for first order systems and applications, *J. of Spectral Theory*, 2015, vol. 5, no. 1, pp. 17–70.
12. Savchuk, A.M. and Sadovnichaya, I.V., The Riesz basis property with brackets for Dirac systems with summable potentials, *J. Math. Sci.*, 2018, vol. 233, no. 4, pp. 514–540.
13. Keldysh, M.V., On the completeness of the eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators, *Russ. Math. Surv.*, 1971, vol. 26, no. 4, pp. 15–44.
14. Kurbanov, V.M. and Gadzhieva, G.R., Bessel inequality and the basis property for a $2m\times 2m$ Dirac type system with an integrable potential, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 5, pp. 573–584.
15. Kashin, B.S. and Saakyan, A.A., *Ortogonal'nyye ryady* (Orthogonal Series), Moscow: AFI, 1999.
16. Djakov, P. and Mityagin, B., Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions, *Indiana Univ. Math. J.*, 2012, vol. 61, no. 1, pp. 359–398.
17. Naymark, M.A., *Lineynyye differentsial'nyye operatory* (Linear Differential Operators), Moscow: Nauka, 1969.
18. Lunyov, A.A. and Malamud, M.M., Stability of spectral characteristics of boundary value problems for 2×2 Dirac type systems, *J. Differ. Equat.*, 2022, vol. 313, pp. 633–742.
19. Gohberg, I.C. and Kreĭn, M.G., *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space*, Providence: Amer. Math. Soc., 1969.
20. Makin, A.S., On the spectrum of nonself-adjoint Dirac operators with two-point boundary conditions, *Differ. Equat.*, 2024, vol. 60, no. 2, pp. 152–168.