ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 3, с. 293–304

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.984.5+517.927.25

АСИМПТОТИКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА ГРАФЕ–ЗВЕЗДЕ. II

К. П. Зуев

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: kizuev02@gmail.com

Поступила в редакцию 24.11.2024 г., после доработки 24.11.2024 г.; принята к публикации 26.12.2024 г.

Исследованы спектральные задачи на графе–звезде, состоящем из трёх рёбер, с заданным на каждом из них оператором Штурма–Лиувилля. Изучены спектральные свойства таких операторов, в частности, получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций оператора с краевыми условиями Дирихле на свободных концах и условиями непрерывности и Кирхгофа в общей вершине. Потенциал в задаче Штурма–Лиувилля предполагается сингулярным, а именно, является обобщённой производной квадратично суммируемой функции.

Ключевые слова: дифференциальный оператор на графах, оператор Штурма–Лиувилля, спектральная задача, сингулярный потенциал

DOI: 10.31857/S0374064125030018, EDN: HMXMVB

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящее время дифференциальные операторы на графах нашли широкое применение в таких областях как квантовая механика, химия, теория волноводов [1, 2]. Математическая теория дифференциальных операторов на графах начала развиваться в конце XX — начале XXI века и сейчас этой тематике посвящено большое количество работ (см., например, [3–5] и литературу в них). Прямые и обратные спектральные задачи на графах изучались в статьях [6–10].

В работе [11] рассматривался граф–звезда — связный граф, в котором все три ребра с заданным на каждом из них оператором Штурма–Лиувилля исходят из одной вершины; были доказаны теоремы об асимптотическом представлении собственных значений и собственных функций оператора в случае, когда на всех трёх рёбрах были заданы одинаковые сингулярные потенциалы: $q=u'$, где $u\in L_2$. Теория операторов с сингулярными потенциалами берёт своё начало в исследованиях А.М. Савчука и А.А. Шкаликова [12, 13]. В данной статье будет рассмотрен случай различных потенциалов на рёбрах графа–звезды.

Пусть на каждом из трёх рёбер графа–звезды с длинами l_1, l_2 и l_3 задан оператор Штурма–Лиувилля, порождённый дифференциальным выражением $l(h)=-h''+q(x)h$ и краевыми условиями Дирихле. Параметризуем каждое ребро вещественным параметром x_j, изменяющимся от 0 до l_j, причём значения параметров l_j соответствуют вершине, инцидентной всем трём ребрам. На свободных концах зададим условие Дирихле $h_0(0)=h_2(0)=h_3(0)=0$, а в общей вершине — условие непрерывности $h_1(l_1)=h_2(l_2)=h_3(l_3)$ и условие Кирхгофа $h_1^{[1]}(l_1)+h_2^{[1]}(l_2)+h_3^{[1]}(l_3)=0$, где через $h^{[1]}=h'-uh$ обозначена *квазипроизводная*. В случае нулевого потенциала считаем, что $u=0$, где u — первообразная потенциала, тогда квазипроизводная, очевидно, совпадает с обычной производной: $h^{[1]}=h'$. Всюду в дальнейшем будем полагать, что рёбра имеют одинаковую длину: $l_1=l_2=l_3=l$.

Заметим, что спектральную задачу на графе можно свести к системе

$$-\mathbf{h}''+\mathbf{q}(x)\mathbf{h}=\lambda\mathbf{h},$$

где $\mathbf{h}(x)=(h_1(x),\ h_2(x),\ h_3(x))^{\mathrm{т}}$, $\mathbf{q}(x)=\operatorname{diag}\{q_1(x),q_2(x),q_3(x)\}$, с краевыми условиями

$$h_1(0)=h_2(0)=h_3(0)=0,\quad h_1(l)=h_2(l)=h_3(l),\quad h_1^{[1]}(l)+h_2^{[1]}(l)+h_3^{[1]}(l)=0. \tag{1}$$

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть оператор L_u порождается дифференциальным выражением $\ell(\mathbf{h})=z^2\mathbf{h}$, где

$$\ell(\mathbf{h})=-(\mathbf{h}^{[1]})'-\mathbf{u}\mathbf{h}^{[1]}-\mathbf{u}^2\mathbf{h}. \tag{2}$$

Характеристический определитель имеет вид

$$\Delta(\lambda)=\psi_1^{[1]}(l,z)\psi_2(l,z)\psi_3(l,z)+\psi_1(l,z)\psi_2^{[1]}(l,z)\psi_3(l,z)+\psi_1(l,z)\psi_2(l,z)\psi_3^{[1]}(l,z). \tag{3}$$

Для записи остатков в асимптотических формулах определим функции: если $(j,l)\in\in\{(1,2),(3,4),(5,6)\}$, то

$$\upsilon_{jkl}(s,x,z)=\begin{cases}(\pm)_{jk}(\pm)_{lk}\displaystyle\int\limits_{t_1}^{t_2}u(t)e^{2iz(x-t)}\,dt & \text{при } k=l,\\ (\pm)_{jk}(\pm)_{lk}\displaystyle\int\limits_{t_1}^{t_2}u(t)e^{-2iz(t-s)}\,dt & \text{при } k=j;\end{cases}$$

в остальных случаях $\upsilon_{jkl}(s,x,z)=0$.

Пределы интегрирования выбираются следующим образом (считаем, что интеграл равен нулю, если $t_1>t_2$):

$$\begin{cases}t_1=x,\ \ t_2=s & \text{при } j,l<k,\\ t_1=\max\{x,s\},\ \ t_2=l & \text{при } j<k\leqslant l,\\ t_1=0,\ \ t_2=\min\{x,s\} & \text{при } l<k\leqslant j,\\ t_1=s,\ \ t_2=x & \text{при } k\leqslant j,l.\end{cases}$$

Введём также функцию

$$\Upsilon(u;z)=\Upsilon(z)=\max_{j,k,l,s,x}|\upsilon_{jkl}(s,x,z)|. \tag{4}$$

Определение. Назовём последовательность $z_n\in\Pi_{\alpha_1,\alpha_2}=\{z\in\mathbb{C}\colon \alpha_1<\operatorname{Im}z<\alpha_2\}$, $n\in\mathbb{N}$, *несгущающейся*, если найдётся такое число $\beta>0$, что в любом прямоугольнике $\operatorname{Re}z\in[x,x+1]$, $\operatorname{Im}z\in[\alpha_1,\alpha_2]$ заключено не более β элементов этой последовательности.

Непосредственно из определения следует оценка

$$C_1n\leqslant|z_n|\leqslant C_2n,\quad n\in\mathbb{N},\ \ C_1,C_2>0.$$

В данной работе нам потребуется

Утверждение 1 [14, следствие 7.1]. *Пусть* $\{z_n\}$ *— некоторая несгущающаяся последовательность,* $z_n \in \Pi_{\alpha_1,\alpha_2}$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|\Upsilon(u; z_n)\|_{l_2} \leqslant C\|u\|_{L_2},$$

где константа C *зависит только от последовательности* $\{z_n\}$.

При выводе асимптотических формул для собственных функций и собственных значений нам понадобится утверждение об асимптотиках фундаментальной системы решений уравнения Штурма–Лиувилля на отрезке, доказанное в работе [15].

Теорема 1 [15, теорема 3.13]. *Пусть* $\varphi(x,z)$ *и* $\psi(x,z)$ *— фундаментальная система решений уравнения*

$$-y''(x) + u'(x)y(x) = z^2 y(x)$$

с начальными условиями

$$\varphi(0,z) = \psi^{[1]}(0,z) = 1, \quad \varphi^{[1]}(0,z) = \psi(0,z) = 0.$$

Тогда для любой полосы $\Pi_\alpha = \{|\operatorname{Im} z| < \alpha\}$ *найдётся число* $k = k(\|u\|, \alpha)$ *такое, что при всех* $\{z \in \Pi_\alpha : \Upsilon(z) + |z|^{-1} < k\}$ *справедливы представления*

$$\varphi(x,z) = \cos(zx) + \int_0^x u(t)\cos(z(2t-x))\,dt - \frac{\sin(zx)}{2z}\int_0^x u^2(t)\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2z}\int_0^x u^2(t)\sin(z(2t-x))\,dt + \int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(z(2s-2t+x))\,ds\,dt + \zeta_1(x,z),$$

$$\varphi^{[1]}(x,z) = z\Bigg[-\sin(zx) + \int_0^x u(t)\sin(z(2t-x))\,dt - \frac{\cos(zx)}{2z}\int_0^x u^2(t)\,dt -$$

$$- \frac{1}{2z}\int_0^x u^2(t)\cos(z(2t-x))\,dt - \int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\sin(z(2s-2t+x))\,ds\,dt + \zeta_2(x,z)\Bigg],$$

$$\psi(x,z) = \frac{1}{z}\Bigg[\sin(zx) + \int_0^x u(t)\sin(z(2t-x))\,dt + \frac{\cos(zx)}{2z}\int_0^x u^2(t)\,dt -$$

$$- \frac{1}{2z}\int_0^x u^2(t)\cos(z(2t-x))\,dt + \int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\sin(z(2s-2t+x))\,ds\,dt + \zeta_3(x,z)\Bigg], \tag{5}$$

$$\psi^{[1]}(x,z) = \cos(zx) - \int_0^x u(t)\cos(z(2t-x))\,dt - \frac{\sin(zx)}{2z}\int_0^x u^2(t)\,dt -$$

$$- \frac{1}{2z}\int_0^x u^2(t)\sin(z(2t-x))\,dt + \int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(z(2s-2t+x))\,ds\,dt + \zeta_4(x,z), \tag{6}$$

где остаточные члены подчинены оценке

$$\sum_{j=1}^4 \max_{x\in[0,\pi]} |\zeta_j(x,z)| \leqslant C(\Upsilon(z) + |z|^{-1})^2, \quad C = C(\|u\|, \alpha).$$

Для упрощения записи договоримся обозначать через $\{\zeta_n\}$ любую последовательность, члены которой подчинены оценке

$$|\zeta_n| \leqslant C(\Upsilon(u(x);\xi_n)+\Upsilon(xu(x);\xi_n)+|\xi_n|^{-1})^2 \tag{7}$$

для некоторой константы C и некоторой несгущающейся последовательности $\{\xi_n\}$. Из определения (4) функции $\Upsilon(u;z)$ и утверждения 1 следует, что для любой последовательности, удовлетворяющей оценке (7), справедливо

$$\{\zeta_n\}_{n=1}^{+\infty} \in l_1, \quad \text{поскольку } u \in L_2[0,l].$$

Теорема 2 [11]. *Пусть λ_n — собственные значения оператора $L_{\mathbf{u}}$, порождённого дифференциальным выражением (2) и краевыми условиями (1), причём $u_1=u_2=u_3=u$. Тогда существует номер $N\in\mathbb{N}$ такой, что для любого $n\geqslant N$ их можно разбить на серию простых собственных значений $\{\lambda_{n,1}\}$ и серию собственных значений $\{\lambda_{n,2}=\lambda_{n,3}\}$ алгебраической кратности 2, при этом справедливы асимптотические равенства*

$$(\lambda_{n,1})^{1/2} = \frac{\pi+2\pi n}{2l} - \frac{1}{l}\int_0^l u(t)\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{l}t\right)dt - \frac{1}{\pi+2\pi n}\int_0^l u^2(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi+2\pi n}\int_0^l u^2(t)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{l}t\right)dt - \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^t u(t)u(s)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{l}t\right)\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{l}s\right)ds\,dt + \zeta_n,$$

$$(\lambda_{n,2})^{1/2} = \frac{\pi n}{l} - \frac{1}{l}\int_0^l u(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{l}t\right)dt - \frac{1}{2\pi n}\int_0^l u^2(t)\,dt + \frac{1}{2\pi n}\int_0^l u^2(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{l}t\right)dt -$$

$$-\frac{2}{l}\int_0^l\int_0^t u(t)u(s)\cos\left(\frac{2\pi n}{l}t\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{l}s\right)ds\,dt + \zeta_n,$$

где последовательность $\{\zeta_n\}$ удовлетворяет оценке (7).

Теорема 3 [11]. *Пусть $L_{\mathbf{u}}$ — оператор, порождённый дифференциальным выражением (2) и краевыми условиями (1), причём $u_1=u_2=u_3=u$. Тогда найдётся номер $N\in\mathbb{N}$ такой, что при всех $n\geqslant N$ оператор $L_{\mathbf{u}}$ имеет серию простых собственных значений $\{\lambda_{n,1}\}$ и серию собственных значений $\{\lambda_{n,2}=\lambda_{n,3}\}$ алгебраической и геометрической кратности 2. Обозначим через $\mathbf{y}_{n,j}$, $n\geqslant N$, собственные функции оператора $L_{\mathbf{u}}$, отвечающие собственным значениям $\lambda_{n,j}$, $j=1,2,3$, и нормированные начальным условием $\mathbf{y}_{n,1}^{[1]}(0)=(1,1,1)^{\mathrm{т}}$, $\mathbf{y}_{n,2}^{[1]}(0)=(1,0,-1)^{\mathrm{т}}$, $\mathbf{y}_{n,3}^{[1]}(0)=(1,-2,1)^{\mathrm{т}}$. Тогда $\mathbf{y}_{n,1}=(y_{n,1},y_{n,1},y_{n,1})^{\mathrm{т}}$, $\mathbf{y}_{n,2}=(y_{n,2},0,-y_{n,2})^{\mathrm{т}}$, $\mathbf{y}_{n,3}=(y_{n,3},-2y_{n,3},y_{n,3})^{\mathrm{т}}$, где*

$$y_{n,1}(x) = \frac{2l}{\pi+2\pi n}\Bigg[\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}x\right) + \mu_n x\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}x\right) + \frac{l}{\pi+2\pi n}\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}x\right)\int_0^x u^2(t)\,dt +$$

$$+\int_0^x u(t)\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}(2t-x)\right)dt - \frac{l}{\pi+2\pi n}\int_0^x u^2(t)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}(2t-x)\right)dt +$$

$$+\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}(2s-2t+x)\right)ds\,dt + r_{n,1}(x)\Bigg];$$

$$y_{n,2}(x)=y_{n,3}(x)=\frac{l}{\pi n}\left[\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)+\nu_n x\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)+\int\limits_0^x u(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}(2t-x)\right)dt+\right.$$

$$+\frac{l}{2\pi n}\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\int\limits_0^x u^2(t)\,dt-\frac{l}{2\pi n}\int\limits_0^x u^2(t)\cos\left(\frac{\pi n}{l}(2t-x)\right)dt+$$

$$\left.+\int\limits_0^x\int\limits_0^t u(t)u(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}(2s-2t+x)\right)ds\,dt+r_{n,2}(x)\right].$$

Здесь

$$\mu_n=-\frac{1}{2}b_{2n+1}+\frac{1}{2(2n+1)}A_{2n+1}-\frac{1}{\pi(2n+1)}U(l)-w_{2n+1},$$

$$\nu_n=-\frac{1}{2}b_{2n}+\frac{1}{4n}A_{2n}-\frac{1}{2\pi n}U(l)-w_{2n},$$

а функции $r_{n,j}$ *подчинены оценке*

$$\max_{j=1,2}\sum_{n=N}^{+\infty}\max_{x\in[0,l]}|r_{n,j}(x)|\leqslant C<+\infty. \tag{8}$$

Следуя [15], введём обозначения

$$b_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l u(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}t\right)dt,\quad A_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^l u^2(t)\cos\left(\frac{\pi n}{l}t\right)dt,$$

$$w_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^t u(t)u(s)\cos\left(\frac{\pi n}{l}t\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds\,dt,\quad U(l)=\int\limits_0^l u^2(t)\,dt. \tag{9}$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть на всех трёх ребрах графа заданы различные потенциалы u_1, u_2, u_3.

Утверждение 2 [15, утверждение 3.4]. *Пусть* $u\in L_2[0,\pi]$. *Тогда для последовательности* $\{w_n\}$, *определённой в* (9), *справедливы следующие оценки*:

$$\{w_n\}_{n=1}^{\infty}\in l_p,\quad \{w_n\ln^{-p}(n+1)\}_{n=1}^{\infty}\in l_1\quad \text{при любом } p>1. \tag{10}$$

Для упрощения записи договоримся обозначать через $\{\kappa_n\}$ любую последовательность, удовлетворяющую оценкам (10).

Теорема 4. *Пусть* λ_n *— собственные значения оператора* $L_{\mathbf{u}}$, *порождённого дифференциальным выражением* (2) *и краевыми условиями* (1). *Тогда существует такое* $N\in\mathbb{N}$, *что при всех* $n\geqslant N$ *собственные значения можно разбить на три серии*: $\{\lambda_{n,1}\}$, $\{\lambda_{n,2\pm}\}$, *причём справедливы асимптотические равенства**

$$(\lambda_{n,1})^{1/2}=\frac{\pi(n+1/2)}{l}-\frac{1}{3l}\int\limits_0^l(u_1(t)+u_2(t)+u_3(t))\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{l}t\right)dt+\kappa_n, \tag{11}$$

*Из асимптотических формул видно, что серия $\{\lambda_{n,1}\}$ является асимптотически простой, а серии $\{\lambda_{n,2\pm}\}$ асимптотически сближаются.

$$
(\lambda_{n,2\pm})^{1/2} = \frac{\pi n}{l} - \frac{1}{3l}\Bigg[\int\limits_0^l (u_1(t)+u_2(t)+u_3(t))\sin\left(\frac{2\pi n}{l}t\right)dt + \\ + \sqrt{I_{1,n}^2+I_{2,n}^2+I_{3,n}^2-I_{1,n}I_{2,n}-I_{1,n}I_{3,n}-I_{2,n}I_{3,n}}\Bigg] + \chi_n, \qquad (12)
$$

где

$$
I_{j,n} = \int\limits_0^l u_j(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{l}t\right)dt, \quad j=1,2,3,
$$

последовательность $\{\chi_n\}\in l_p$ при любом $p>4/3$, а последовательность $\{\kappa_n\}$ удовлетворяет условиям (10). Знаки $\pm$ в представлении (12) соответствуют различному выбору ветвей квадратного корня.

Доказательство. В силу представления (3) уравнение на собственные значения имеет вид

$$
\psi_1^{[1]}(l,z)\psi_2(l,z)\psi_3(l,z)+\psi_1(l,z)\psi_2^{[1]}(l,z)\psi_3(l,z)+\psi_1(l,z)\psi_2(l,z)\psi_3^{[1]}(l,z)=0.
$$

Подставив сюда представления (5), (6) для ψ_i и $\psi_i^{[1]}$, получим уравнение вида $f(z)+g(z)=0$, где $f(z)=3\cos(zl)\sin^2(zl)$. Обозначим через z_n^0 нули функции $f(z)$.

Для произвольного $\varepsilon>0$ рассмотрим систему кругов U_n с центрами в точках z_n^0 радиуса ε. Число ε выберем настолько малым, чтобы круги U_n не пересекались и лежали в полосе Π_α (введена в формулировке теоремы 1). В силу периодичности функции f найдётся такое число m, что на всех окружностях ∂U_n будет выполняться неравенство $|f(z)|\geqslant m$. Отметим, что в силу принципа минимума модуля то же неравенство выполняется везде в полосе вне объединения кругов U_n. Функция $g(z)\to 0$ при $|z|\to+\infty$ в полосе Π_α, таким образом, функция $f+g$ не может иметь нулей вне объединения кругов U_n при $|z|\geqslant R$ для некоторого $R>0$. Кроме того, по теореме Руше при $|z|\geqslant R$ число нулей функции $f+g$ внутри каждого круга U_n совпадает с числом нулей функции f (а именно, в каждом круге с центром в точке $\pi(n+1/2)/l$ есть один корень, а в круге с центром в $\pi n/l$ — два корня). Обозначим эти корни через z_n. В силу произвольности выбора ε видим, что $|z_n-z_n^0|\to 0$ при $n\to+\infty$. Тогда можно разбить последовательность $\{z_n\}$ на две серии: $z_{n,j}=z_{n,j}^0+\mu_{n,j}$, где $\mu_{n,j}\to 0$ при $n\to+\infty$, $j=1,2$. Здесь, как и раньше, $z_{n,1}^0=\pi(n+1/2)/l$, $z_{n,2}^0=\pi n/l$.

Так же как и в теореме 2, последовательность $\{\mu_{n,j}^2\}$ удовлетворяет оценкам (7) (а значит, (10)). Тогда

$$
0=f(z_{n,j})+g(z_{n,j})=f(z_{n,j}^0+\mu_{n,j})+g(z_{n,j}^0+\mu_{n,j})=f(z_{n,j}^0)+f'(z_{n,j}^0)\mu_{n,j}+\frac{f''(z_{n,j}^0)}{2}\mu_{n,j}^2+ \\ +g(z_{n,j}^0)+g'(z_{n,j}^0)\mu_{n,j}+\frac{g''(z_{n,j}^0)}{2}\mu_{n,j}^2+o(\mu_{n,j}^2), \quad n\to+\infty, \ j=1,2. \qquad (13)
$$

Отсюда, с учётом того что $f(z_{n,j}^0)=0$, $f'(z_{n,j}^0)=3(-1)^{n+1}l$, получаем

$$
\mu_{n,1}^0=\frac{(-1)^{n+1}}{3l}\big(g(z_{n,1}^0)+g'(z_{n,1}^0)\mu_{n,1}\big)+\kappa_n.
$$

Введём следующие обозначения ($i=1,2,3$, $j=1,2$):

$$
I_i(z)=\int\limits_0^l u_i(t)\sin(z(2t-l))\,dt, \quad J_i(z)=\int\limits_0^l u_i(t)\cos(z(2t-l))\,dt.
$$

Из представлений (5), (6) и (10) следуют равенства

$$g(z_{n,1}^0)=-\int\limits_0^l(u_1(t)+u_2(t)+u_3(t))\cos(z_{n,1}^0(2t-l))\,dt+\kappa_n=J_1(z_{n,1}^0)+J_2(z_{n,1}^0)+J_3(z_{n,1}^0)+\kappa_n,$$

$$g'(z_{n,1}^0)\mu_{n,1}=(-2l(I_1(z_{n,1}^0)+I_2(z_{n,1}^0)+I_3(z_{n,1}^0))+\kappa_n)\mu_{n,1}=\kappa_n,$$

откуда

$$\mu_{n,1}=-\frac{(-1)^n}{3l}\int\limits_0^l(u_1(t)+u_2(t)+u_3(t))\cos(z_{n,1}^0(2t-l))\,dt+\kappa_n.$$

Здесь учтено, что

$$\begin{gathered}g(z)=2\sin(zl)\cos(zl)(I_1(z)+I_2(z)+I_3(z))-\sin^2(zl)(J_1(z)+J_2(z)+J_3(z))+\\+\cos(zl)\big(I_1(z)I_2(z)+I_1(z)I_3(z)+I_2(z)I_3(z)\big)-\\-\sin(zl)\big(J_1(z)I_2(z)+J_1(z)I_3(z)+J_2(z)I_1(z)+J_2(z)I_3(z)+J_3(z)I_1(z)+J_3(z)I_2(z)\big)-\\-\big(J_1(z)I_2(z)I_3(z)+J_2(z)I_1(z)I_3(z)+J_3(z)I_1(z)I_2(z)\big)+h(z)=\\=2\sin(zl)\cos(zl)(I_1(z)+I_2(z)+I_3(z))-\sin^2(zl)(J_1(z)+J_2(z)+J_3(z))+h(z)\end{gathered}\tag{14}$$

(через $h(z)$ обозначена произвольная функция, удовлетворяющая условию $h(z_{n,j}^0)=\kappa_n$). Так как

$$\cos(z_{n,1}^0(2t-l))=\cos\bigg(\frac{\pi(n+1/2)}{l}(2t-l)\bigg)=(-1)^n\sin\bigg(\frac{\pi+2\pi n}{l}t\bigg),$$

равенство (11) доказано.

Для доказательства соотношения (12) подставим в (13) $z_{n,2}^0=\pi n/l$ и, с учётом того, что $f(\pi n/l)=f'(\pi n/l)=0,$ $f''(\pi n/l)=(-1)^n6l^2,$ получим

$$(-1)^n3l^2\mu_{n,2}^2+g\bigg(\frac{\pi n}{l}\bigg)+g'\bigg(\frac{\pi n}{l}\bigg)\mu_{n,2}+\frac12 g''\bigg(\frac{\pi n}{l}\bigg)\mu_{n,2}^2+o(\mu_{n,2}^2)=0,$$

где из представления (14)

$$g\bigg(\frac{\pi n}{l}\bigg)=(-1)^n\big(I_1(z_{n,2}^0)I_2(z_{n,2}^0)+I_1(z_{n,2}^0)I_3(z_{n,2}^0)+I_2(z_{n,2}^0)I_3(z_{n,2}^0)\big)+\gamma_n,$$

$$g'\bigg(\frac{\pi n}{l}\bigg)\mu_{n,2}=2l\big(I_1(z_{n,2}^0)+I_2(z_{n,2}^0)+I_3(z_{n,2}^0)\big)\mu_{n,2}+\gamma_n,$$

$$\frac12 g''\bigg(\frac{\pi n}{l}\bigg)\mu_{n,2}^2=\gamma_n,$$

через $\{\gamma_n\}$ обозначена произвольная последовательность, представляющая собой произведение некоторой последовательности из l_2 и последовательности $\{\kappa_n\}$, удовлетворяющей условиям (10).

Учитывая тождество $\sin(z_{n,2}^0(2t-l))=(-1)^n\sin(2\pi nt/l)$ и обозначая

$$I_{j,n}=\int\limits_0^l u_j(t)\sin\bigg(\frac{2\pi n}{l}t\bigg)\,dt,\quad j=1,2,3,$$

получаем квадратное уравнение относительно $\mu_{n,2}$ вида

$$3l^2\mu_{n,2}^2+2l(I_{1,n}+I_{2,n}+I_{3,n})\mu_{n,2}+I_{1,n}I_{2,n}+I_{1,n}I_{3,n}+I_{2,n}I_{3,n}+\gamma_n=0. \tag{15}$$

Обозначим

$$t_n=l^2(I_{1,n}+I_{2,n}+I_{3,n})^2-3l^2(I_{1,n}I_{2,n}+I_{1,n}I_{3,n}+I_{2,n}I_{3,n})=$$
$$=l(I_{1,n}^2+I_{2,n}^2+I_{3,n}^2-I_{1,n}I_{2,n}-I_{1,n}I_{3,n}-I_{2,n}I_{3,n}).$$

Несложно видеть, что последовательность $\{t_n\}\in l_1$, а дискриминант квадратного уравнения имеет вид $D_n=t_n+s_n$, где $\{s_n\}$ является произведением последовательности из l_2 и последовательности, удовлетворяющей условиям (10).

Выберем $\phi_n=\arg t_n$ и $\theta_n=\arg s_n$ так, чтобы $\phi_n-\theta_n\in(-\pi,\pi]$, и положим $q_n^{\pm}=\sqrt{D_n}^{\pm}-\sqrt{t_n}^{\pm}$, где $\sqrt{D_n}^{\pm}=\pm\sqrt{|D_n|}e^{i\theta_n/2}$, $\sqrt{t_n}^{\pm}=\pm\sqrt{|t_n|}e^{i\phi_n/2}$. Тогда

$$|q_n^{\pm}|=\big|\sqrt{D_n}^{\pm}-\sqrt{t_n}^{\pm}\big|=\frac{|s_n|}{\big|\sqrt{D_n}^{\pm}+\sqrt{t_n}^{\pm}\big|}\leqslant|s_n|^{1/2},$$

поскольку можем оценить знаменатель следующим образом:

$$\big|(\pm)\sqrt{|D_n|}e^{i\theta_n/2}+(\pm)\sqrt{|t_n|}e^{i\phi_n/2}\big|^2\geqslant|D_n|+|t_n|+2\sqrt{|D_n|\,|t_n|}\cos\frac{\phi-\theta}{2}\geqslant|D_n|+|t_n|\geqslant|s_n|.$$

Тогда решения уравнения (15) можно записать в виде

$$\mu_{n,2\pm}=-\frac{1}{3l}(I_{1,n}+I_{2,n}+I_{3,n}+\sqrt{t_n}^{\pm}+\chi_n),$$

где $\{\chi_n\}=\{q_n{}^{\pm}\}\in l_p$ при любом $p>4/3$. Это сразу следует из условия $|q_n^{\pm}|\leqslant\sqrt{|s_n|}$, последовательность $\{s_n\}$ является произведением некоторой последовательности из пространства l_2 и некоторой другой последовательности, которая лежит в l_p при всех $p>1$. Представление (12) доказано.

Теорема 5. *Пусть $L_{\mathbf{u}}$ — оператор, порождённый дифференциальным выражением (2) и краевыми условиями (1). Тогда найдётся номер $N\in\mathbb{N}$ такой, что при всех $n\geqslant N$ оператор $L_{\mathbf{u}}$ имеет три серии собственных значений: $\lambda_{n,1}$, $\lambda_{n,2+}$, $\lambda_{n,2-}$. Обозначим через $\mathbf{y}_{n,1}$, $\mathbf{y}_{n,2+}$, $\mathbf{y}_{n,2-}$, $n\geqslant N$, собственные функции оператора $L_{\mathbf{u}}$, отвечающие собственным значениям $\lambda_{n,1}$, $\lambda_{n,2+}$ и $\lambda_{n,2-}$ соответственно и нормированные начальным условием $\mathbf{y}_{n,1}^{[1]}(0)=(1,1,1)^{\mathrm{т}}$, $\mathbf{y}_{n,2+}^{[1]}(0)=$ $=(1,0,-1)^{\mathrm{т}}$, $\mathbf{y}_{n,2-}^{[1]}(0)=(1,-2,1)^{\mathrm{т}}$. Тогда $\mathbf{y}_{n,1}=(y_{n,1}^1,y_{n,1}^2,y_{n,1}^3)^{\mathrm{т}}$, $\mathbf{y}_{n,2+}=(y_{n,2+}^1,0,-y_{n,2+}^3)^{\mathrm{т}}$, $\mathbf{y}_{n,2-}=$ $=(y_{n,2-}^1,-2y_{n,2-}^2,y_{n,2-}^3)^{\mathrm{т}}$, где*

$$y_{n,1}^k(x)=\frac{l}{\pi(n+1/2)}\left[\sin\left(\frac{\pi(n+1/2)}{l}x\right)+\mu_n x\cos\left(\frac{\pi(n+1/2)}{l}x\right)+\right.$$
$$\left.+\int\limits_0^x u_k(t)\sin\left(\frac{\pi(n+1/2)}{l}(2t-x)\right)dt+\varkappa_{n,1}(x)\right],\quad k=1,2,3, \tag{16}$$

$$y_{n,2\pm}^k(x)=\frac{l}{\pi n}\left[\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)+\nu_{n,\pm}x\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)+\int\limits_0^x u_k(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}(2t-x)\right)dt+\varkappa_{n,2}(x)\right], \tag{17}$$

$$\mu_n = -\frac{1}{2}b_{2n+1}, \quad \nu_{n,\pm} = -\left[\frac{1}{2}b_{2n} + c_{2n,\pm}\right],$$

$$b_n = \frac{2}{3l}\int\limits_0^l (u_1(t)+u_2(t)+u_3(t))\sin\left(\frac{\pi n}{l}t\right)dt,$$

$$c_{n,\pm} = \frac{1}{3l}(I_{1,n}^2 + I_{2,n}^2 + I_{3,n}^2 - I_{1,n}I_{2,n} - I_{1,n}I_{3,n} - I_{2,n}I_{3,n})^{1/2}, \tag{18}$$

$I_{j,n}$ определены в теореме 4, а функции $\varkappa_{n,j}$ подчинены оценкам

$$\sum_{n=N}^{+\infty}\max_{x\in[0,l]}|\varkappa_{n,1}(x)|^p \leqslant C < +\infty, \quad \sum_{n=N}^{+\infty}\max_{x\in[0,l]}|\varkappa_{n,1}(x)|\ln^{-p}(n+1) \leqslant C < +\infty \tag{19}$$

при любом $p>1$;

$$\sum_{n=N}^{+\infty}\max_{x\in[0,l]}|\varkappa_{n,2}(x)|^p \leqslant C < +\infty \tag{20}$$

при любом $p>4/3$.

Доказательство. Заметим, что $y_{n,j}^k(x) = \psi_k(x, z_{n,j})$, где $z_{n,j} = \sqrt{\lambda_{n,j}}$, $j = 1, 2\pm$, а функции ψ_k получены из функции ψ, определённой в (5), подстановкой $u = u_k$.

Начнём с доказательства соотношений (16). Воспользовавшись представлением (11), подставим в выражение для ψ_k

$$z_{n,1} = \frac{\pi(n+1/2)}{l} + \mu_n + \kappa_n = \frac{\pi(n+1/2)}{l} + \mu_n'.$$

Рассуждая аналогично как при доказательстве теоремы 3, при выполнении оценки (8) получаем

$$y_{n,1}^k(x) = \frac{2l}{\pi+2\pi n}\Bigg[\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}x\right) + \mu_n x\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}x\right) + \frac{l}{\pi+2\pi n}\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}x\right)\int\limits_0^x u_k^2(t)\,dt +$$
$$+\int\limits_0^x u_k(t)\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}(2t-x)\right)dt - \frac{l}{\pi+2\pi n}\int\limits_0^x u_k^2(t)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}(2t-x)\right)dt +$$
$$+\int\limits_0^x\int\limits_0^t u_k(t)u_k(s)\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}(2s-2t+x)\right)ds\,dt + r_{n,1}(x)\Bigg].$$

Легко видеть, что слагаемые

$$\frac{l}{\pi+2\pi n}\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}x\right)\int\limits_0^x u_k^2(t)\,dt, \quad \frac{l}{\pi+2\pi n}\int\limits_0^x u_k^2(t)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}(2t-x)\right)dt$$

удовлетворяют оценкам (19).

Рассмотрим функцию

$$\eta_n(x) = \int\limits_0^x\int\limits_0^t u_k(t)u_k(s)\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}(2s-2t+x)\right)ds\,dt.$$

В утверждении 3.6 из работы [15] показано, что $\{\sup_{x\in[0,l]}|\eta_n(x)|\}$ допускает оценку величиной $\Upsilon^2(2n)$, следовательно, удовлетворяет также оценкам (19).

Теперь перейдём к доказательству (17). Воспользуемся представлением (12) и подставим в выражение для ψ_k

$$z_{n,2\pm}=\frac{\pi n}{l}+\nu_{n,\pm}+\chi_n=\frac{\pi n}{l}+\nu'_{n,\pm}.$$

Таким же образом при выполнении оценки (8) получим

$$y^k_{n,2\pm}(x)=\frac{l}{\pi n}\Bigg[\sin\Big(\frac{\pi n}{l}x\Big)+\nu'_{n,\pm}x\cos\Big(\frac{\pi n}{l}x\Big)+\int\limits_0^x u_k(t)\sin\Big(\frac{\pi n}{l}(2t-x)\Big)\,dt+$$
$$+\frac{l}{2\pi n}\cos\Big(\frac{\pi n}{l}x\Big)\int\limits_0^x u_k^2(t)\,dt-\frac{l}{2\pi n}\int\limits_0^x u_k^2(t)\cos\Big(\frac{\pi n}{l}(2t-x)\Big)\,dt+$$
$$+\int\limits_0^x\int\limits_0^t u_k(t)u_k(s)\sin\Big(\frac{\pi n}{l}(2s-2t+x)\Big)\,ds\,dt+r_{n,2}(x)\Bigg].$$

Дальнейшие рассуждения полностью аналогичны.

Следствие 1. *Пусть λ_n — собственные значения оператора $L_{\mathbf{u}}$, порождённого дифференциальным выражением (2) и краевыми условиями (1), причём $u_1=u_2=u_3=u$. Тогда найдётся такой номер $N\in\mathbb{N}$, что при всех $n\geqslant N$ оператор $L_{\mathbf{u}}$ имеет серию простых собственных значений $\lambda_{n,1}$ и серию собственных значений $\lambda_{n,2}=\lambda_{n,3}$ алгебраической и геометрической кратности 2, при этом справедливы асимптотические равенства*

$$(\lambda_{n,1})^{1/2}=\frac{\pi+2\pi n}{2l}-\frac{1}{l}\int\limits_0^l u(t)\sin\Big(\frac{\pi+2\pi n}{l}t\Big)\,dt+\kappa_n,$$
$$(\lambda_{n,2})^{1/2}=\frac{\pi n}{l}-\frac{1}{l}\int\limits_0^l u(t)\sin\Big(\frac{2\pi n}{l}t\Big)\,dt+\chi_n,$$

где последовательность $\{\kappa_n\}\in l_p$ при всех $p>1$, а последовательность $\{\chi_n\}\in l_p$ при всех $p>4/3$.

Следствие 2. *Пусть $L_{\mathbf{u}}$ — оператор, порождённый дифференциальным выражением (2) и краевыми условиями (1), причём $u_1=u_2=u_3=u$. Номер N введён в следствии 1. Обозначим через $\mathbf{y}_{n,j}$, $n\geqslant N$, собственные функции оператора $L_{\mathbf{u}}$, отвечающие собственным значениям $\lambda_{n,j}$, $j=1,2,3$, и нормированные начальным условием $\mathbf{y}^{[1]}_{n,1}(0)=(1,1,1)^{\mathrm{т}}$, $\mathbf{y}^{[1]}_{n,2}(0)=(1,0,-1)^{\mathrm{т}}$, $\mathbf{y}^{[1]}_{n,3}(0)=(1,-2,1)^{\mathrm{т}}$. Тогда $\mathbf{y}_{n,1}=(y_{n,1},y_{n,1},y_{n,1})^{\mathrm{т}}$, $\mathbf{y}_{n,2}=(y_{n,2},0,-y_{n,2})^{\mathrm{т}}$, $\mathbf{y}_{n,3}=(y_{n,3},-2y_{n,3},y_{n,3})^{\mathrm{т}}$, где*

$$y_{n,1}(x)=\frac{l}{\pi(n+1/2)}\Bigg[\sin\Big(\frac{\pi(n+1/2)}{l}x\Big)+\mu_n x\cos\Big(\frac{\pi(n+1/2)}{l}x\Big)+$$
$$+\int\limits_0^x u(t)\sin\Big(\frac{\pi(n+1/2)}{l}(2t-x)\Big)\,dt+\varkappa_{n,1}(x)\Bigg],$$

$$y_{n,2}(x)=y_{n,3}(x)=\frac{l}{\pi n}\left[\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)+\nu_n x\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)+\int\limits_0^x u(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}(2t-x)\right)dt+\varkappa_{n,2}(x)\right],$$

$$\mu_n=-\frac{1}{2}b_{2n+1},\quad \nu_n=-\frac{1}{2}b_{2n},\quad b_n=\frac{2}{3l}\int\limits_0^l(u_1(t)+u_2(t)+u_3(t))\sin\left(\frac{\pi n}{l}t\right)dt,$$

функции $\varkappa_{n,j}$ *подчинены оценкам* (19) *и* (20).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ruedenberg, K. Free-electron network model for conjugated systems. I. Theory / K. Ruedenberg, W.S. Scherr // J. Chem. Physics. — 1953. — V. 21, № 9. — P. 1565–1581.
2. Kuchment, P. Graph models for waves in thin structures / P. Kuchment // Waves in Random Media. — 2002. — V. 12, № 4. — P. R1–R24.
3. Kuchment, P. Quantum graphs: I. Some basic structures / P. Kuchment // Waves in Random Media. — 2004. — V. 14, № 1. — P. 107–128.
4. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. V. 77. Analysis of Graphs and its Applications / Eds. P. Exner, J.P. Keating, P. Kuchment [et al.]. — Cambridge : Amer. Math. Soc., 2007. — 718 p.
5. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев [и др.]. — М. : Физматлит, 2005. — 272 с.
6. Yurko, V. Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators on graphs / V. Yurko // Inverse Problems. — 2005. — V. 21, № 3. — P. 1075–1086.
7. Bondarenko, N. Inverse problems for the differential operator on the graph with a cycle with different orders on different edges / N. Bondarenko // Tamkang J. Math. — 2015. — V. 46, № 3. — P. 229–243.
8. Бурлуцкая, М.Ш. Краевая задача на геометрическом графе–звезде с нелинейным условием в узле / М.Ш. Бурлуцкая, М.Б. Зверева, М.И. Каменский // Мат. заметки. — 2023. — Т. 114, № 2. — С. 316–320.
9. Садовничий, В.А. Обратная задача Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями на геометрическом графе / В.А. Садовничий, Я.Т. Султанаев, А.М. Ахтямов // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 2. — С. 193–202.
10. Zhabko, A.P. Uniqueness solution to the inverse spectral problem with distributed parameters on the graph–star / A.P. Zhabko, K.B. Nurtazina, V.V. Provotorov // Vestnik of Saint Petersburg University. Appl. Math. Comput. Sci. Control Proc. — 2020. — V. 16, № 2. — P. 129–143.
11. Зуев, К.П. Асимптотики собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом на графе–звезде. I / К.П. Зуев // Дифференц. уравнения. — 2025. — Т. 61, № 2. — С. 162–176.
12. Савчук, А.М. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами / А.М. Савчук, А.А. Шкаликов // Мат. заметки. — 1999. — Т. 66, № 6. — С. 897–912.
13. Савчук, А.М. Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами–распределениями / А.М. Савчук, А.А. Шкаликов // Тр. Моск. мат. об-ва. — 2003. — Т. 64. — С. 159–212.
14. Савчук, А.М. Спектральный анализ одномерной системы Дирака с суммируемым потенциалом и оператора Штурма–Лиувилля с коэффициентами–распределениями / А.М. Савчук, И.В. Садовничая // Соврем. математика. Фунд. направления. — 2020. — Т. 66, № 3. — С. 373–530.
15. Савчук, А.М. Прямые и обратные спектральные задачи для оператора Штурма–Лиувилля и системы Дирака : дис. … д-ра физ.-мат. наук / А.М. Савчук. — М., 2019. — 334 с.

ASYMPTOTICS OF EIGENVALUES AND EIGENFUNCTIONS OF THE STURM–LIOUVILLE OPERATOR WITH SINGULAR POTENTIAL ON A STAR GRAPH. II

 K. P. Zuev

Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: kizuev02@gmail.com

Spectral problems on a star-graph consisting of three edges with a Sturm–Liouville operator defined on each of them are investigated. The spectral properties of such operators have been studied, in particular, asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of the operator with Dirichlet boundary conditions at free ends and continuity and Kirchhoff conditions at a common vertex have been obtained. The potential in the Sturm–Liouville problem is assumed to be singular, it is a derivative of a quadratically summable function in sense of distributions.

Keywords: differential operator on graphs, Sturm–Liouville operator, spectral problem, singular potential

REFERENCES

1. Ruedenberg, K. and Scherr, W.S., Free-electron network model for conjugated systems. I. Theory, *J. Chem. Physics*, 1953, vol. 21, no. 9, pp. 1565–1581.
2. Kuchment, P., Graph models for waves in thin structures, *Waves in Random Media*, 2002, vol. 12, no. 4, pp. R1–R24.
3. Kuchment, P., Quantum graphs: I. Some basic structures, *Waves in Random Media*, 2002, vol. 14, no. 1, pp. 107–128.
4. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Vol. 77. Analysis of Graphs and its Applications*, eds. P. Exner, J.P. Keating, P. Kuchment [et al.], Cambridge: Amer. Math. Soc., 2007.
5. Pokorny, Yu.V., Penkin, O.M., Pryadiev, V.L. [et al.], *Differentsial'nyye uravneniya na geometricheskikh grafakh* (Differential Equations on Geometrical Graphs), Moscow: Fizmatlit, 2005.
6. Yurko, V., Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators on graphs, *Inverse Problems*, 2005, vol. 21, no. 3, pp. 1075–1086.
7. Bondarenko, N., Inverse problems for the differential operator on the graph with a cycle with different orders on different edges, *Tamkang J. Math.*, 2015, vol. 46, no. 3, pp. 229–243.
8. Burlutskaya, M.Sh., Zvereva, M.B., and Kamenskii, M.I., Boundary value problem on a geometric star-graph with a nonlinear condition at a node, *Math. Notes*, 2023, vol. 114, no. 2, pp. 275–279.
9. Sadovnichiy, V.A., Sultanaev, Y.T., and Akhtyamov, A.M., Inverse Sturm–Liouville problem with nonseparated boundary conditions on a geometric graph, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 194–204.
10. Zhabko, A.P., Nurtazina, K.B., and Provotorov, V.V., Uniqueness solution to the inverse spectral problem with distributed parameters on the graph-star, *Vestnik of Saint Petersburg University. Appl. Math. Comput. Sci. Control Proc.*, 2020, vol. 16, no. 2, pp. 129–143.
11. Zuev, K.P., Asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator with singular potential on a star graph. I, *Differ. Equat.*, 2025, vol. 61, no. 2, pp. 162–176.
12. Savchuk, A.M. and Shkalikov, A.A., Sturm–Liouville operators with singular potentials, *Math. Notes*, 1999, vol. 66, no. 6, pp. 741–753.
13. Savchuk, A.M. and Shkalikov, A.A., Sturm–Liouville operators with distribution potentials, *Transactions of the Moscow Math. Soc.*, 2003, vol. 64, pp. 143–192.
14. Savchuk, A.M. and Sadovnichaya, I.V., Spectral analysis of one-dimensional Dirac system with summable potential and Sturm–Liouville operator with coefficient–distributions, *Sovrem. matematika. Fynd. napravlenia*, 2020, vol. 66, no. 3, pp. 373–530.
15. Savchuk, A.M., *Pryamyye i obratnyye spektral'nyye zadachi dlya operatora Shturma–Liuvillya i sistemy Diraka* (Direct and Inverse Spectral Problems for the Sturm–Liouville Operator and the Dirac System), Dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, 2019.