ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 2, с. 268–274

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.955+517.958

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

О. И. Махмудов[1], И. Э. Ниёзов[2]

Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Узбекистан
e-mail: [1]makhmudovo@rambler.ru, [2]iqboln@mail.ru

Поступила в редакцию 08.05.2024 г., после доработки 25.11.2024 г.; принята к публикации 28.11.2024 г.

Исследован вопрос разрешимости задачи аналитического продолжения решения системы уравнений моментной теории упругости в области трёхмерного пространства по его значениям и значениям его напряжения на части границы этой области.

Ключевые слова: задача Коши, эллиптическая система, формула Карлемана

DOI: 10.31857/S0374064125020119, EDN: HVLJLJ

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Впервые формула, восстанавливающая голоморфную функцию в области одного специального вида по её значениям на части границы, была предложена Т. Карлеманом. Впоследствии подобные формулы стали называть *формулами Карлемана*, появилось множество работ, в которых рассматривались как одномерные, так и многомерные формулы Карлемана.

В данной статье, используя идеи М.М. Лаврентьева и Ш.Я. Ярмухамедова, построена в явном виде матрица Карлемана, на её основе получен аналог формулы Карлемана и установлен критерий разрешимости задачи Коши для системы моментной теории упругости.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ ограниченную односвязную область D с кусочно-гладкой границей ∂D, обозначим через S гладкую открытую часть поверхности этой границы.

Пусть вектор-функция $U(x)=(u(x),v(x))=(u_1(x),u_2(x),u_3(x),v_1(x),v_2(x),v_3(x))$, $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)$, удовлетворяет в области D системе уравнений моментной теории упругости [1, с. 46]

$$\begin{cases}(\mu+\alpha)\Delta u+(\lambda+\mu-\alpha)\operatorname{grad}\operatorname{div}u+2\alpha\operatorname{rot}v+\rho\omega^2u+\rho f=0,\\ (\nu+\beta)\Delta v+(\varepsilon+\nu-\beta)\operatorname{grad}\operatorname{div}v+2\alpha\operatorname{rot}u-4\alpha v+\theta\omega^2v+\rho g=0,\end{cases}$$

где f — массовая сила, g — массовый момент, ω — частота колебания, ρ — плотность среды, θ — положительный коэффициент, а параметры α, β, ε, λ, μ, ν, характеризующие среду, удовлетворяют условиям

$$\alpha>0,\quad \beta>0,\quad \mu>0,\quad 3\lambda+2\mu>0,\quad 3\varepsilon+2\nu>0.$$

Для краткости изложения в дальнейшем запишем эту систему в матричной форме:

$$M(\partial_x)U(x)+\rho F(x)=0,\quad x\in D,\ U=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Определение 1. Функцию U называем *регулярной*, если $U\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$.

Рассмотрим следующую задачу Коши: требуется найти регулярное решение $U(x)$ уравнения (1) в области D, удовлетворяющее начальным условиям

$$U(y)=U_0(y), \quad T(\partial_y, n(y))U(y)=U_1(y), \quad y\in S, \tag{2}$$

где $U_0\in C^1(S)\cap L_1(S)$, $U_1\in C(S)\cap L_1(S)$, $F\in C(D)$.

Известно, что эта задача некорректна. В работах [2; 3, гл. 2, § 1] была разработана концепция условно корректных задач и получены не только условия разрешимости таких задач, но и формулы для их решений в виде ряда, что позволило построить удовлетворительные приближённые решения путём суммирования конечного числа членов ряда.

В настоящей статье основным приёмом построения решения является разложение элементов подходящего пространства в ряд по однородным гармоническим функциям, образующим базис на сфере. Получены условия разрешимости и формула Карлемана задачи Коши для системы уравнений установившихся колебаний моментной теории упругости. В частности, построена формула для восстановления решения системы уравнений установившихся колебаний моментной теории упругости в области специального вида по заданным смещению и напряжению на открытом связном подмножестве границы области.

2. КРИТЕРИЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ

Справедлива следующая

Теорема 1 [4, с. 349]. *Для любой функции* $U\in C^1(\overline{D})$ *со значениями в* $\mathbb{R}^6$, *такой что* $M(\partial_x)U\in L_1(D)$, *имеет место равенство*

$$\int\limits_{\partial D}\big[(T(\partial_y,n(y))\Psi(y-x))^{\mathrm{т}}U(y)-\Psi(x-y)(T(\partial_y,n(y))U(y))\big]\,ds_y+$$
$$+\int\limits_{D}\Psi(x-y)M(\partial_y)U(y)\,dy=\begin{cases}U(x), & x\in D,\\ 0, & x\notin\overline{D}.\end{cases} \tag{3}$$

Здесь $T(\partial_x,n(x))$ *— оператор напряжения.*

Для решения задачи (1), (2) определим функцию

$$\mathcal{U}(x)=\int\limits_{S}\big(\{T(\partial_y,n(y))\Psi(y-x)\}^{\mathrm{т}}U_0(y)-\Psi(x-y)U_1(y)\big)\,ds_y-$$
$$-\int\limits_{D}\Psi(x-y)\rho F(y)\,dy, \quad x\in\mathbb{R}^3\setminus S. \tag{4}$$

Так как фундаментальное решение Ψ уравнения (3) является вещественным и аналитичным в $\mathbb{R}^3$, кроме начала координат, то функция $\mathcal{U}$ является вещественной и аналитичной в $\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}$. Кроме того, функция $\mathcal{U}$ является решением однородной системы (так как $\Psi^{\mathrm{т}}(x-y)=\Psi(y-x)$)

$$M(\partial_x)U(x)=0, \quad x\in\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}. \tag{5}$$

Если $x_0\in S$, то интегралы $\mathcal{U}$ и $T(\partial_y,n(y))\mathcal{U}$ имеют скачки, равные U_0 и U_1 соответственно:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\big(\mathcal{U}(x_0-\varepsilon n(x_0))-\mathcal{U}(x_0+\varepsilon n(x_0))\big)=U_0(x_0),$$
$$\lim_{\varepsilon\to0}\big(T(\partial_y,n(y))\mathcal{U}(x_0-\varepsilon n(x_0))-T(\partial_y,n(y))\mathcal{U}(x_0+\varepsilon n(x_0))\big)=U_1(x_0),$$

где $n(x)=(n_1(x),n_2(x),n_3(x))$ — единичный вектор нормали в точке $x\in\partial D$, внешней по отношению к области D.

Теорема 2. *Для существования решения $U \in C^1(D\cup S)$ задачи Коши* (1), (2) *необходимо и достаточно, чтобы интеграл* (4) *можно было продолжить из $\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}$ через S в D как вещественную аналитическую функцию.*

Доказательство аналогично доказательству соответствующей теоремы в статье [5].

3. ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА

Пусть область D является частью шара $B_R\subset\mathbb{R}^3$ с центром в начале координат и радиусом $R>0$, S — гладкая замкнутая поверхность в B_R, разбивающая её на две связные компоненты ${B_R}^+$ и ${B_R}^-$ и ориентированная как граница ${B_R}^-$, $0\in {B_R}^+$, $0\notin S$. Пусть $D={B_R}^-$ и её граница состоит из S и части границы сферы ∂B_R.

Верна следующая

Теорема 3 [5]. *Для фундаментального решения уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^3$ имеет место разложение*

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\exp\{ik|x-y|\}}{|x-y|}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}c_{n,m}(y,k)\bar{J}_n(k|x|)P_{n,m}(x), \tag{6}$$

где ряд сходится равномерно вместе со всеми своими производными на компактных подмножествах конуса $\mathcal{K}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\colon |x|<|y|\}$.

Представление (6) позволяет получить формулу Карлемана для восстановления решения однородной системы (5)

$$\Psi(y-x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\Psi_n(x,y), \tag{7}$$

где ряд равномерно сходится вместе со всеми производными на компактных подмножествах конуса $\mathcal{K}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\colon |x|<|y|\}$, а каждая Ψ_n является блок-матрицей размерности 3×3 такой, что

$$\Psi^{(1)}_{n,kj}(x,y)=\sum_{q=1}^{4}\left(\delta_{kj}a_q+b_q\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\right)\sum_{m=0}^{n}c_{n,m}(y,k_q)\overline{J}_n(k|x|)P_{n,m}(x),$$

$$\Psi^{(2)}_{n,kj}(x,y)=\Psi^{(3)}_{n,kj}(x,y)=\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\sum_{q=1}^{4}\sum_{p=1}^{3}\varepsilon_q\varepsilon_{kjp}\frac{\partial}{\partial x_p}\sum_{m=0}^{n}c_{n,m}(y,k_q)\overline{J}_n(k|x|)P_{n,m}(x),$$

$$\Psi^{(4)}_{n,kj}(x,y)=\sum_{q=1}^{4}\left(\delta_{kj}c_q+d_q\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\right)\sum_{m=0}^{n}c_{n,m}(y,k_q)\overline{J}_n(k|x|)P_{n,m}(x),$$

где $k,j=1,2,3$.

Если здесь заменим $\partial/\partial x_i$ на $-\partial/\partial y_i$, то получим следующее утверждение.

Теорема 4. *Каждый член $\Psi_n(x,y)$ ряда* (7) *является вещественной аналитической матрицезначной функцией на $\mathbb{R}^3\times(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$, удовлетворяющей уравнениям*

$$M(\partial_x,)\Psi_n(x,y)=0,\quad M'(\partial_y)(\Psi_n(x,y))^{\mathrm{T}}=0.$$

Пусть

$$\Psi^{(n)}(x,y)=\Psi(x-y)-\sum_{\nu=0}^{n}\Psi_\nu(x,y),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^3\times(\mathbb{R}^3\setminus\{0\}).$$

Теорема 5. *Для любой вектор-функции $U\in C^1(\bar D)$ и любого $x\in D$ верно интегральное представление*

$$U(x)=\lim_{n\to+\infty}\int_S\big[\big(T(\partial_y,n)(\Psi^{(n)}(x,y))^{\mathrm T}\big)^{\mathrm T}U(y)-\Psi^{(n)}(x,y)(T(\partial_y,n)U(y))\big]\,ds_y+$$

$$+\lim_{n\to+\infty}\int_D\Psi^{(n)}(x,y)M(\partial_y)U(y)\,dy.$$

Вывод данного представления аналогичен приведённому в статье [5].

Обозначим

$$V_{(n)}(x)=\sum_{m=0}^{n}\left(\int_S\big[(T(\partial_y,n)(\Psi_m(x,y))^{\mathrm T}\big)^{\mathrm T}U_0(y)-\Psi_m(x,y)U_1(y)\big]\,ds_y-\int_D\Psi_m(y,x)\rho F(y)\,dy\right).$$

Из последних результатов и теоремы 2 получим следующее условие разрешимости для задачи (1), (2).

Следствие 1. *Если последовательность $\{V_{(n)}\}$ сходится равномерно на компактных подмножествах шара B_R, то задача Коши (1), (2) разрешима.*

Доказательство аналогично соответствующему доказательству в статье [5].

4. КРИТЕРИЙ РАЗРЕШИМОСТИ НА ЯЗЫКЕ МАТРИЦЫ КАРЛЕМАНА

Рассмотрим задачу Коши для однородной системы (5) моментной теории упругости. Введём следующие обозначения: $x'=(0,x_2,x_3)$, $y'=(0,y_2,y_3)$,

$$s=\alpha^2=|x'-y'|^2,\quad r^2=|y-x|^2=s+(y_1-x_1)^2;$$

$$G_\rho=\left\{y\in\mathbb R^3\colon |y'|<\tau y_1,\ y_1>0,\ \tau=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\rho},\ \rho>1\right\},$$

$$\partial G_\rho=\left\{y\in\mathbb R^3\colon |y'|=\tau y_1,\ y_1>0,\ \tau=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\rho},\ \rho>1\right\},\quad \overline{G_\rho}=G_\rho\cup\partial G_\rho;$$

$$G_\rho^\varepsilon=\left\{y\in\mathbb R^3\colon |y'|<\tau(y_1-\varepsilon),\ y_1>\varepsilon,\ \tau=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\rho},\ \rho>1\right\},$$

$$\partial G_\rho^\varepsilon=\left\{y\in\mathbb R^3\colon |y'|=\tau(y_1-\varepsilon),\ y_1>\varepsilon,\ \tau=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\rho},\ \rho>1\right\},$$

$$\overline{G_\rho^\varepsilon}=G_\rho^\varepsilon\cup\partial G_\rho^\varepsilon,\quad \tau_1=\sin\frac{\pi}{2\rho},\quad \rho>1,$$

где ε, ε_1 и ε_2 — достаточно малые положительные числа.

Пусть D_ρ — ограниченная односвязная область с границей ∂D_ρ, состоящей из части поверхности конуса ∂G_ρ (в двумерном случае из отрезков лучей с общим началом) и гладкой поверхности S (гладкой кривой), лежащей внутри конуса (угла) $\overline{G_\rho}$. Случай $\rho=1$ предельный, здесь G_1 — полупространство $y_1>0$ и ∂G_1 — гиперплоскость $y_1=0$; D_1 — ограниченная односвязная область с границей, состоящей из компактной связной части гиперплоскости $y_1=0$ (в двумерном случае из отрезка $a\leqslant y_2\leqslant b$) и гладкой поверхности S (гладкой кривой), лежащей в полупространстве $y_1>0$, $\overline{D_\rho}=D_\rho\cup\partial D_\rho$; S_0 — множество внутренних точек S, т.е. поверхность без края.

Решение задачи Коши будем строить в области D_ρ, когда данные Коши заданы на части S границы ∂D_ρ.

Требуется найти регулярное решение $U(x)$, удовлетворяющее условиям

$$M(\partial_x)U(x)=0, \quad x\in D_\rho, \tag{8}$$

$$U(y)=U_0(y), \quad T(\partial_y,n(y))U(y)=U_1(y), \quad y\in S, \tag{9}$$

где $U_0\in C^1(S)$, $U_1\in C(S)$.

Для решения задачи (8), (9) для данной односвязной области используется метод функции Карлемана, т.е. строится матрица Карлемана и с её помощью выводится формула нахождения решения внутри области.

Определение 2. *Матрицей Карлемана* области D и поверхности S называется 6×6-матрица $\Pi(y,x,\sigma)$, зависящая от двух точек $y,x\in\overline{D}$ и положительного числового параметра σ, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\Pi(y,x,\sigma)=\Psi(y-x)+G(y,x,\sigma),$$

где матрица $G(y,x,\sigma)$ удовлетворяет по переменной y системе (8) всюду в области D, $\Psi(y-x)$ — матрица фундаментальных решений системы (8);

$$\int\limits_{\partial D\setminus S}\big(|\Pi(y,x,\sigma)|+|T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)|\big)\,ds_y\leqslant\varepsilon(\sigma),$$

$\varepsilon(\sigma)\to 0$ при $\sigma\to\infty$, $|\Pi|$ — евклидова норма матрицы Π.

Теперь, учитывая теорему 1 и формулу Грина, на основе определения матрицы Карлемана при $M(\partial_y)U(y)=0$ для области D_ρ имеем

$$\int\limits_{\partial D_\rho}\big[(T(\partial_y,n(y))\Pi(y,x,\sigma))^{\mathrm{т}}U(y)-\Pi(y,x,\sigma)(T(\partial_y,n(y))U(y))\big]\,ds_y=\begin{cases}U(x), & x\in D_\rho,\\ 0, & x\notin\overline{D}_\rho.\end{cases} \tag{10}$$

Используя матрицу Карлемана, легко вывести оценку устойчивости решения задачи Коши (8), (9), а также указать метод эффективного решения этой задачи.

Для получения приближённого решения задачи (8), (9) построим матрицу Карлемана следующим образом:

$$\Pi(y,x,\sigma)=\begin{pmatrix}\Pi^{(1)}(y,x,\sigma) & \Pi^{(2)}(y,x,\sigma)\\ \Pi^{(3)}(y,x,\sigma) & \Pi^{(4)}(y,x,\sigma)\end{pmatrix},$$

$$\Pi^{(q)}(y,x,\sigma)=\big(\Pi^{(q)}_{kj}(y,x,\sigma)\big)_{3\times 3}, \quad q=\overline{1,4},$$

$$\Pi^{(1)}_{kj}(y,x,\sigma)=\sum_{q=1}^{4}\bigg(\delta_{kj}a_q+b_q\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\bigg)\Phi_\tau(y,x,i\lambda_q), \quad k,j=1,2,3,$$

$$\Pi^{(2)}_{kj}(y,x,\sigma)=\Pi^{(3)}_{kj}(y,x,\sigma)=\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\sum_{q=1}^{4}\sum_{m=1}^{3}\varepsilon_q\varepsilon_{kjs}\frac{\partial}{\partial x_m}\Phi_\sigma(y,x,i\lambda_q), \quad k,j=1,2,3,$$

$$\Pi^{(4)}_{kj}(y,x,\sigma)=\sum_{q=1}^{4}\bigg(\delta_{kj}c_q+d_q\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\bigg)\Phi_\sigma(y,x,i\lambda_q), \quad k,j=1,2,3, \tag{11}$$

где

$$\Phi_\sigma(y,x,\lambda)=\Phi_\sigma(y-x,\lambda)=\frac{1}{-2\pi^2}\int\limits_0^{+\infty}\operatorname{Im}\left[\frac{K_\sigma(w)}{w}\right]\frac{\cos(\lambda u)\,du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, \tag{12}$$

$$K_\sigma(w)=\exp\{w^2\}E_\rho(\sigma w),\quad w=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_1-x_1.$$

Из результатов работы [6] вытекает

Лемма. *Матрица* $\Pi(y,x,\sigma)$, *определённая формулами* (11), (12), *является матрицей Карлемана задачи* (8), (9).

Положим

$$U_\sigma(x)=\int\limits_S\big[(T(\partial_y,n(y))\Pi(y,x,\sigma))^{\mathrm{т}}U(y)-\Pi(y,x,\sigma)(T(\partial_y,n(y))U(y))\big]\,ds_y,\quad x\in D_\rho. \tag{13}$$

Имеет место

Теорема 6. *Пусть* $U(x)$ *— регулярное решение системы* (8) *в области* D_ρ, *удовлетворяющее условию*

$$|U(y)|+|T(\partial_y,n(y))U(y)|\leqslant M,\quad y\in\partial D_\rho\setminus S.$$

Тогда для $\sigma\geqslant 1$ *и* $x\in D_\rho$ *верна оценка*

$$|U(x)-U_\sigma(x)|\leqslant\frac{MC_2(x)}{\sigma^3},$$

где $C_2(x)=\int_{\partial D_\rho}r^{-2}\,ds_y,\ r=|x-y|$.

Доказательство теоремы следует из формул (10)–(13).

Следствие 2. *При выполнении условия теоремы* 6 *справедливы следующие эквивалентные формулы продолжения*:

$$U(x)=\lim_{\sigma\to+\infty}\int\limits_S\big[(T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma))^{\mathrm{т}}U(y)-\Pi(y,x,\sigma)(T(\partial_y,n)U(y))\big]\,ds_y, \tag{14}$$

$$U(x)=\int\limits_S\big[(T(\partial_y,n)\Psi(y-x))^{\mathrm{т}}U(y)-\Psi(x-y)(T(\partial_y,n)U(y))\big]\,ds_y+\int\limits_0^{+\infty}\mathcal{R}(\sigma,x)\,d\sigma, \tag{15}$$

где

$$\mathcal{R}(\sigma,x)=\int\limits_S\big[(T(\partial_y,n)\Omega(y,x,\sigma))^{\mathrm{т}}U(y)-\Omega(y,x,\sigma)(T(\partial_y,n)U(y))\big]\,ds_y,$$

$$\Omega(y,x,\sigma)=\frac{\partial}{\partial\sigma}\Pi(y,x,\sigma)=\left\|\frac{\partial}{\partial\sigma}\Pi_{kj}^{(i)}(y,x,\sigma)\right\|,\quad i=1,2,3,4.$$

Эквивалентность (14) и (15) вытекает из формулы

$$\lim_{\sigma\to+\infty}U_\sigma(x)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dU_\sigma(x)}{d\sigma}\,d\sigma+U_0(x),$$

здесь существование предела в левой части равенства эквивалентно существованию несобственного интеграла в правой части.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джарбашян, М.М. Интегральные преобразования и представления функции в комплексной области / М.М. Джарбашян. — М. : Наука, 1966. — 672 с.
2. Тихонов, А.Н. Об устойчивости обратных задач / А.Н. Тихонов // Докл. АН СССР. — 1943. — Т. 39, № 5. — С. 195–198.
3. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. — М. : Наука, 1980. — 286 с.
4. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелия, М.О. Башелейшвили, Т.В. Бурчуладзе. — М. : Наука, 1976. — 663 с.
5. Махмудов, О.И. О разрешимости задачи Коши для системы математической теории термоупругости в пространстве / О.И. Махмудов, И.Э. Ниёзов // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 5. — С. 687–699.
6. Ярмухамедов, Ш. Функция Карлемана и задача Коши для уравнения Лапласа / Ш. Ярмухамедов // Сиб. мат. журн. — 2004. — Т. 45, № 3. — С. 702–719.

THE CAUCHY PROBLEM FOR A SYSTEM OF MOMENT THEORY OF ELASTICITY

O. I. Makhmudov[1], I. E. Niyozov[2]

Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Uzbekistan
e-mail: [1]makhmudovo@rambler.ru, [2]iqboln@mail.ru

The question of the solvability of the problem of analytical continuation of the solution of the system of equations of the moment theory of elasticity in a region of three-dimensional space based on its values and the values of its stress on a part of the boundary of this region is investigated.

Keywords: Cauchy problem, elliptic system, Carleman formula

REFERENCES

1. Jarbashyan, M.M., *Integral'nyye preobrazovaniya i predstavleniya funktsii v kompleksnoy oblasti* (Integral Transforms and Representations of Functions in the Complex Domain), Moscow: Nauka, 1966.
2. Tikhonov, A.N., On the stability of inverse problems, *Dokl. AN SSSR*, 1943, vol. 39, no. 5, pp. 147–160.
3. Lavrent'ev, M.M., Romanov, V.G., and Shishatsky, S.P., *Nekorrektnyye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza* (Ill-posed Problems of Mathematical Physics and Analysis), Moscow: Nauka, 1980.
4. Kupradze, V.D., Gegelia, T.G., Basheleishvili, M.O., and Burchuladze, T.V., *Trekhmernyye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti i termouprugosti* (Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity), Moscow: Nauka, 1976.
5. Makhmudov, O.I. and Niyozov, I.E., Solvability of the Cauchy problem for the 3D system of mathematical theory of thermoelasticity, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 5, pp. 669–682.
6. Yarmukhamedov, Sh., A Carleman function and the Cauchy problem for the Laplace equation, *Sib. Math. J.*, 2004, vol. 45, no. 3, pp. 580–595.