КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.927.4

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

© 2025 г. Г. Э. Абдурагимов

Дагестанский государственный университет, г. Махачкала

e-mail: gusen_e@mail.ru

Поступила в редакцию 02.02.2024 г., после доработки 10.07.2024 г.; принята к публикации 28.11.2024 г.

Исследован вопрос существования положительного решения двухточечной краевой задачи с однородными почти симметричными граничными условиями для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвёртого порядка.

Ключевые слова: краевая задача, функция Грина, конус, положительное решение

DOI: 10.31857/S0374064125020104, EDN: HVRJOT

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Краевые задачи для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений четвёртого порядка часто встречаются в механике твёрдых тел и довольно подробно изучены. Однако публикаций, посвящённых краевым задачам для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) четвёртого порядка с симметричными граничными условиями, относительно немного, отметим среди них последние работы [1–3]. Результаты, близкие к полученным настоящей статье, можно найти в [4–7].

Один из наиболее часто используемых элементов в таких конструкциях как самолеты, здания, корабли, мосты и др. — упругая балка. Деформация балки описывается краевой задачей для уравнения четвёртого порядка [8]. В работе [9] были изучены вопросы существования и единственности решения двухточечной линейной краевой задачи

$$x^{(4)}(t)+f(t)x(t)=g(t), \quad 0<t<1,$$
$$x(0)=A_1, \quad x''(0)=B_1, \quad x(1)=A_2, \quad x''(1)=B_2.$$

Впоследствии этот результат был распространён [10] на нелинейную краевую задачу

$$x^{(4)}(t)+f(x(t))x'(t)+g(t,x(t),x'(t),x''(t))=e(t), \quad 0<t<1,$$
$$x(0)=x''(0)=0, \quad x(1)=x''(1)=0.$$

Отметим также работу [11], в которой исследуется краевая задача для уравнения $x^{(4)}(t)= =f(t,x(t),x'(t))$ с различными типами линейных граничных условий.

В данной статье рассматривается краевая задача

$$x^{(4)}(t)=f(t,x(t)), \qquad 0<t<1, \tag{1}$$

$$x(0)=0, \quad x''(0)+\alpha x'''(0)=0, \quad x(1)=0, \quad x''(1)+\beta x'''(1)=0, \tag{2}$$

где α и β — положительные числа такие, что $\alpha \geqslant 1$ и $1+\beta-\alpha > 0$. Функция $f(t,x)$ предполагается неотрицательной и непрерывной на $[0,1]\times[0,+\infty)$, причём $f(\cdot,0)\equiv 0$.

Задача (1), (2) моделирует деформацию состояния равновесия упругой балки, у которой оба конца жёстко закреплены и неподвижны. В механике такая задача называется *краевой задачей изгиба упругой балки*, где производные функции деформации $x(t)$ имеют следующий физический смысл: $x^{(4)}$ — жёсткость плотности нагрузки, x''' — жёсткость поперечной силы, x'' — жёсткость изгибающего момента и x' — наклон (см. [10, 11]).

Рассматриваемая задача сводится к краевой задаче для ОДУ второго порядка и далее к интегральному уравнению, которое исследуется с помощью известной теоремы Го–Красносельского о неподвижной точке оператора в конусе. Обосновывается наличие по крайней мере одной ненулевой неподвижной точки интегрального оператора, что равносильно существованию по меньшей мере одного положительного решения изучаемой краевой задачи. Полученные достаточные условия дополняют результаты работ автора в данном направлении [12, 13].

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Приведём некоторые определения и утверждения, необходимые в дальнейшем.

Определение 1 [14, с. 256]. Замкнутое выпуклое множество K банахова пространства E называется *конусом*, если из $x\in K$ и $x\neq 0$ вытекает, что $\alpha x\in K$ при $\alpha\geqslant 0$ и $\alpha x\notin K$ при $\alpha<0$.

Теорема 1 [15, с. 93]. *Пусть E — банахово пространство и $K\subset E$ — конус в E. Предположим, что Ω_1 и Ω_2 являются открытыми подмножествами E с $0\in\Omega_1$, $\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$, и пусть $A\colon K\cap(\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1)\to K$ — вполне непрерывный оператор такой, что выполнено одно из двух условий*:

(i) $\|Au\|\leqslant\|u\|$ *для любого* $u\in K\cap\partial\Omega_1$ *и* $\|Au\|\geqslant\|u\|$ *для любого* $u\in K\cap\partial\Omega_2$,

(ii) $\|Au\|\geqslant\|u\|$ *для любого* $u\in K\cap\partial\Omega_1$ *и* $\|Au\|\leqslant\|u\|$ *для любого* $u\in K\cap\partial\Omega_2$.

Тогда оператор A имеет неподвижную точку в $K\cap(\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$.

В работе использованы следующие обозначения: $C^4_{[0,1]}$ — пространство четырежды непрерывно-дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ вещественных функций, $C_{[0,1]}$ — пространство непрерывных на отрезке $[0,1]$ вещественных функций с нормой $\|x\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$, $\Omega_1=\{u\in K\colon \|u\|<r\}$, $\partial\Omega_1=\{u\in K\colon \|u\|=r\}$, $\Omega_2=\{u\in K\colon \|u\|<R\}$, $\partial\Omega_2=\{u\in K\colon \|u\|=R\}$, $\Omega=\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1$, r и R — некоторые положительные числа, которые определим далее.

Определение 2. Под *положительным решением задачи* (1), (2) будем понимать функцию $x\in C^4_{[0,1]}$, положительную в интервале $(0,1)$, удовлетворяющую уравнению (1) и краевым условиям (2).

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1. *Пусть $h(t)$ — неотрицательная и непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция. Краевая задача*

$$u''(t)=h(t),\quad 0<t<1, \tag{3}$$

$$u(0)+\alpha u'(0)=0,\quad u(1)+\beta u'(1)=0, \tag{4}$$

имеет единственное положительное решение

$$u(t)=\int\limits_0^1 G(t,s)h(s)\,ds,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

где

$$G(t,s)=\frac{1}{1+\beta-\alpha}\begin{cases}(s-(1+\beta))(t-\alpha), & 0\leqslant t\leqslant s,\\ (s-\alpha)(t-(1+\beta)), & s\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

Доказательство. Проинтегрировав равенство (3) на промежутке $[0,t]$ при $t\in[0,1]$, получим

$$u'(t)=\int\limits_0^t h(s)\,ds+a_1,$$

а отсюда аналогично

$$u(t)=\int\limits_0^t (t-s)h(s)\,ds+a_1t+a_2. \tag{5}$$

С учётом граничных условий (4) находим

$$a_1=\frac{1}{1+\beta-\alpha}\int\limits_0^1(s-(1+\beta))h(s)\,ds,\quad a_2=-\frac{\alpha}{1+\beta-\alpha}\int\limits_0^1(s-(1+\beta))h(s)\,ds,$$

после их подстановки в (5) получим

$$u(t)=\int\limits_0^t(t-s)h(s)\,ds+\frac{1}{1+\beta-\alpha}\int\limits_0^1 t(s-(1+\beta))h(s)\,ds-\frac{\alpha}{1+\beta-\alpha}\int\limits_0^1(s-(1+\beta))h(s)\,ds=$$

$$=\int\limits_0^t(t-s)h(s)\,ds+\frac{1}{1+\beta-\alpha}\int\limits_0^1(t-\alpha)(s-(1+\beta))h(s)\,ds=$$

$$=\int\limits_0^t(t-s)h(s)\,ds+\frac{1}{1+\beta-\alpha}\int\limits_0^t(t-\alpha)(s-(1+\beta))h(s)\,ds+\frac{1}{1+\beta-\alpha}\int\limits_t^1(t-\alpha)(s-(1+\beta))h(s)\,ds=$$

$$=\frac{1}{1+\beta-\alpha}\int\limits_0^t(s-\alpha)(t-(1+\beta))h(s)\,ds+\frac{1}{1+\beta-\alpha}\int\limits_t^1(t-\alpha)(s-(1+\beta))h(s)\,ds=$$

$$=\int\limits_0^1 G(t,s)h(s)\,ds.$$

Лемма доказана.

Вычислим

$$\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}=\frac{1}{1+\beta-\alpha}\begin{cases}s-(1+\beta), & 0\leqslant t< s,\\ s-\alpha, & s<t\leqslant 1.\end{cases}$$

Легко видеть, что $\partial G(t,s)/\partial t\leqslant 0$ при $t\in[0,1]$, т.е. функция $G(t,s)$ убывает по t. Следовательно,

$$\min_{0\leqslant t\leqslant 1}G(t,s)=G(1,s)=\frac{\beta}{1+\beta-\alpha}(\alpha-s),\quad s\in[0,1],$$

и

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}G(t,s)=G(0,s)=\frac{\alpha}{1+\beta-\alpha}(1+\beta-s),\quad s\in[0,1].$$

Определим оператор $A\colon C_{[0,1]}\to C_{[0,1]}$ формулой

$$(Ax)(t)=\int_0^1 G_0(t,s)\left[\int_0^1 G(s,\tau)f(\tau,x(\tau))\,d\tau\right]ds,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

где $G_0(t,s)$ — функция Грина оператора d^2/dt^2 с краевыми условиями $x(0)=x(1)=0$:

$$G_0(t,s)=\begin{cases} s(1-t), & 0\leqslant s\leqslant t,\\ t(1-s), & t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

Нетрудно видеть, что в квадрате $[0,1]\times[0,1]$ функция $G_0(t,s)$ неотрицательна и обладает свойством

$$\varphi(t)\varphi(s)\leqslant G_0(t,s)\leqslant\varphi(s), \tag{6}$$

где $\varphi(t)=\min(t,1-t)$.

Заметим, что в силу леммы 1 функция $x(t)$ является решением краевой задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда $x(t)$ — неподвижная точка оператора A.

Введём в пространстве $C_{[0,1]}$ конус

$$K=\{x\in C_{[0,1]}: x\geqslant 0, x(t)\geqslant\varphi(t)\|x\|\}.$$

Лемма 2. *Конус K инвариантен относительно оператора A.*

Доказательство. Для любых $x\in K$ в силу (6) имеем

$$\|Ax\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}(Ax)(t)\leqslant\int_0^1\varphi(s)\left[\int_0^1 G(s,\tau)f(\tau,x(\tau))\,d\tau\right]ds.$$

Тогда

$$(Ax)(t)\geqslant\varphi(t)\int_0^1\varphi(s)\left[\int_0^1 G(s,\tau)f(\tau,x(\tau))\,d\tau\right]ds\geqslant\varphi(t)\|Ax\|.$$

Следовательно, $A(K)\subset K$. Лемма доказана.

Кроме того, из теоремы Арцела–Асколи [16, с. 897] следует, что оператор A вполне непрерывен.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия*

$$\lim_{u\to+0}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\frac{f(t,u)}{u}=0,\quad \lim_{u\to+\infty}\min_{0\leqslant t\leqslant 1}\frac{f(t,u)}{u}=\infty. \tag{7}$$

Тогда краевая задача (1), (2) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Доказательство. При выполнении первого условия из (7) найдётся положительное число l такое, что

$$f(t,x)\leqslant\xi x,\quad t\in[0,1],\ 0\leqslant x\leqslant l,\ 0<\xi\leqslant\frac{8(1+\beta-\alpha)}{\alpha(1+2\beta)}. \tag{8}$$

В определении множества Ω_1 положим $r=l$ и с учётом (6) и (8) для $x\in\partial\Omega_1$ будем иметь

$$\|Ax\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G_0(t,s)\left[\int_0^1 G(s,\tau)f(\tau,x(\tau))\,d\tau\right]ds\leqslant\xi\int_0^1 G(0,\tau)x(\tau)\,d\tau\int_0^1\varphi(s)\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\xi\int_0^1 G(0,\tau)\,d\tau\int_0^1\varphi(s)\,ds\cdot\|x\|\leqslant\xi\frac{\alpha(1+2\beta)}{8(1+\beta-\alpha)}\|x\|\leqslant\|x\|.$$

В свою очередь, второе условие из (7) гарантирует существование числа $L>0$ такого, что

$$f(t,u)\geqslant \mu u, \quad t\in[0,1],\ u\geqslant L,$$

где

$$\mu\geqslant \frac{8(1+\beta-\alpha)}{\beta}\left(\int\limits_{\sigma}^{1-\sigma}(\alpha-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\right)^{-1}, \quad \sigma\in(0,1/2).$$

Пусть $R=\max\{L/\gamma,2r\}$, где $\gamma=\min_{\sigma\leqslant t\leqslant 1-\sigma}\varphi(t)$. Если $x\in\partial\Omega_2$, то для каждого $t\in[\sigma,1-\sigma]$ имеем

$$x(t)\geqslant \min_{\sigma\leqslant t\leqslant 1-\sigma}\varphi(t)\|x\|=\gamma R>L.$$

В силу (6) и (8) для $x\in\partial\Omega_2$ получим

$$(Ax)(t)\geqslant\varphi(t)\int\limits_0^1\varphi(s)\left[\int\limits_0^1 G(s,\tau)f(\tau,x(\tau))\,d\tau\right]ds\geqslant\mu\varphi(t)\int\limits_0^1\varphi(s)\left[\int\limits_\sigma^{1-\sigma}G(s,\tau)x(\tau)\,d\tau\right]ds\geqslant$$

$$\geqslant\mu\varphi(t)\int\limits_\sigma^{1-\sigma}G(1,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\int\limits_0^1\varphi(s)\,ds\cdot\|x\|\geqslant\mu\frac{\beta}{4(1+\beta-\alpha)}\varphi(t)\int\limits_\sigma^{1-\sigma}(\alpha-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\cdot\|x\|.$$

Пронормировав теперь это неравенство с учётом ограничений на μ, окончательно получим $\|Ax\|\geqslant\|x\|$ для всех $x\in\partial\Omega_2$.

Таким образом, при соответствующем выборе величин r и R в силу теоремы 1 вполне непрерывный оператор A имеет по крайней мере одну неподвижную точку в Ω, что равносильно существованию хотя бы одного положительного решения краевой задачи (1), (2). Теорема доказана.

Замечание. При выполнении условий

$$\lim_{u\to+0}\min_{0\leqslant t\leqslant 1}\frac{f(t,u)}{u}=\infty, \qquad \lim_{u\to+\infty}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\frac{f(t,u)}{u}=0,$$

применяя теорему 1, можно по аналогичной схеме доказать существование по меньшей мере одного положительного решения краевой задачи (1), (2).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yan, D. Positive solutions for a singular superlinear fourth-order equation with nonlinear boundary conditions / D. Yan // J. Funct. Spaces. — 2020. — V. 2020. — P. 1–6.
2. Zhang, Y. Positive solution for a class of nonlinear fourth-order boundary value problem / Y. Zhang, L. Chen // AIMS Math. — 2023. — V. 8. — P. 1014–1021.
3. Chen, H. Existence and uniqueness of solutions to the nonlinear boundary value problem for fourth-order differential equations with all derivatives / H. Chen, Y. Cui // J. Inequal. Appl. — 2023. — V. 2023. — P. 1–13.
4. Harjani, S. Existence and uniqueness of positive solutions for a nonlinear fourth-order boundary value problem / S. Harjani, S. Kishin // Positivity. — 2010. — V. 14. — P. 849–858.
5. Абдурагимов, Э.И. Положительное решение двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвёртого порядка и численный метод его построения / Э.И. Абдурагимов // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2010. — № 2 (76). — С. 5–12.

6. Абдурагимов, Э.И. Существование положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвёртого порядка / Э.И. Абдурагимов // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — № 10 (121). — С. 9–16.
7. Абдурагимов, Э.И. Двухточечная краевая задача для одного нелинейного ОДУ 4-го порядка. Существование, единственность положительного решения и численный метод его построения / Э.И. Абдурагимов, П.Э. Абдурагимова, Т.Ю. Гаджиева // Вестн. Дагест. гос. ун-та. Сер. 1: Естеств. науки. — 2019. — Т. 3. — С. 79–85.
8. Reiss, E.L. Ordinary Differential Equations with Applications / E.L. Reiss, A.J. Callegari, D.S. Ahluwalia. — New York : Holt, Rinehart and Winston, 1976. — 400 p.
9. Usmani, R.A. A uniqueness theorem for a boundary value problem / R.A. Usmani // Proc. Amer. Math. Soc. — 1979. — V. 77, № 3. — P. 329–335.
10. Gupta, C.P. Existence and uniqueness theorems for a bending of an elastic beam equation / C.P. Gupta // Appl. Anal. — 1988. — V. 26. — P. 289–304.
11. Aftabizadeh, A.R. Existence and uniqueness theorems for fourth-order boundary value problems / A.R. Aftabizadeh // J. Math. Anal. Appl. — 1986. — V. 116. — P. 415–426.
12. Абдурагимов, Г.Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения чётного порядка / Г.Э. Абдурагимов, П.Э. Абдурагимова, М.М. Курамагомедова // Вестн. российских ун-тов. Математика. — 2021. — Т. 136, № 25. — С. 341–347.
13. Абдурагимов, Г.Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка / Г.Э. Абдурагимов, П.Э. Абдурагимова, М.М. Курамагомедова // Мат. заметки СВФУ. — 2022. — Т. 4, № 29. — С. 3–10.
14. Красносельский, М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 512 с.
15. Guo, D. Nonlinear Problems in Abstract Cones / D. Guo, V. Lakshmikantham. — Boston : Academic Press, 1988. — 275 p.
16. Thomson, B.S. Elementary Real Analysis / B.S. Thomson, J.B. Bruckner, A.M. Bruckner. — 2nd ed. — ClassicalRealAnalysis.com, 2008. — 740 p.

ON THE EXISTENCE OF A POSITIVE SOLUTION TO A BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR ONE NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FOURTH ORDER

 G. E. Abduragimov

Dagestan State University, Makhachkala, Russia
e-mail: gusen_e@mail.ru

The question of the existence of a positive solution to a two-point boundary value problem with homogeneous almost symmetric boundary conditions for one nonlinear fourth-order ordinary differential equation is investigated.

Keywords: boundary value problem, Green's function, cone, positive solution

REFERENCES

1. Yan, D., Positive solutions for a singular superlinear fourth-order equation with nonlinear boundary conditions, *J. Funct. Spaces*, 2020, vol. 2020, pp. 1–6.
2. Zhang, Y. and Chen, L., Positive solution for a class of nonlinear fourth-order boundary value problem, *AIMS Math.*, 2023, vol. 8, pp. 1014–1021.
3. Chen, H. and Cui, Y., Existence and uniqueness of solutions to the nonlinear boundary value problem for fourth-order differential equations with all derivatives, *J. Inequal. Appl.*, 2023, vol. 2023, pp. 1–13.

4. Harjani, S. and Kishin, S., Existence and uniqueness of positive solutions for a nonlinear fourth-order boundary value problem, *Positivity*, 2010, vol. 14, pp. 849–858.
5. Abduragimov, E.I., A positive solution to a two-point boundary value problem for one fourth-order nonlinear ODE and a numerical method for its construction, *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2010, no. 2 (76), pp. 5–12.
6. Abduragimov, E.I., Existence of a positive solution to a two-point boundary value problem for one fourth-order nonlinear ODE, *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2014, no. 10 (121), pp. 9–16.
7. Abduragimov, E.I., Abduragimova, P.E., and Gadzhieva T.Yu., Existence of a positive solution to a two-point boundary value problem for one fourth-order nonlinear ODE, *Vestnik of Dagestan State University. Ser. 1: Natural Sciences*, 2019, vol. 3, pp. 79–85.
8. Reiss, E.L., Callegari, A.J., and Ahluwalia, D.S., *Ordinary Differential Equations with Applications*, New York: Holt, Rinehart and Winston, 1976.
9. Usmani, R.A., A uniqueness theorem for a boundary value problem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1979, vol. 77, no. 3, pp. 329–335.
10. Gupta, C.P., Existence and uniqueness theorems for a bending of an elastic beam equation, *Appl. Anal.*, 1988, vol. 26, pp. 289–304.
11. Aftabizadeh, A.R., Existence and uniqueness theorems for fourth-order boundary value problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 1986, vol. 116, pp. 415–426.
12. Abduragimov, G.E., Abduragimova, P.E., and Kuramagomedova, M.M., On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a nonlinear ordinary differential equation of even order, *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 136, no. 25, pp. 341–347.
13. Abduragimov, G.E., Abduragimova, P.E., and Kuramagomedova, M.M., On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a fourth-order nonlinear ordinary differential equation, *Mathematical Notes of NEFU*, 2022, vol. 4, no. 29, pp. 3–10.
14. Krasnosel'skii, M.A. and Zabreiko, P.P., *Geometricheskiye metody nelineynogo analiza* (Geometric Methods of Nonlinear Analysis), Moscow: Nauka, 1975.
15. Guo, D. and Lakshmikantham, V., *Nonlinear Problems in Abstract Cones*, Boston: Academic Press, 1988.
16. Thomson, B.S., Bruckner, J.B., and Bruckner, A.M., *Elementary Real Analysis*, 2nd ed., ClassicalRealAnalysis.com, 2008.