ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 2, с. 229–241

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955+517.956.32

ФОРМУЛА ПУАССОНА РЕШЕНИЯ РАДИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО УЛЬТРАГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Л. Н. Ляхов[1], Ю. Н. Булатов[2]

[1]*Воронежский государственный университет*
[1]*Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семёнова-Тян-Шанского*
[1,2]*Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина*
e-mail: [1]*levnlya@mail.ru,* [2]*y.bulatov@bk.ru*

Поступила в редакцию 22.03.2024 г., после доработки 05.11.2024 г.; принята к публикации 28.11.2024 г.

Рассмотрено сингулярное ультрагиперболическое уравнение $(\Delta_{B_\beta})_y u=(\Delta_{B_\gamma})_x u$ в предположении, что выполнено условие И.А. Киприянова: дробные размерности входящих в уравнение Δ_{B_γ}-операторов равны одному и тому же положительному числу σ. Изучены три типа решений радиальной задачи Коши, один из них — на основе оператора $\mathbb{T}$-псевдосдвига, обобщённого $\mathbb{T}$-сдвига и метода С.А. Терсенова определения решений уравнений, вырождающихся на границе. Приведены формулы Пуассона решения задачи Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу при различных значениях параметров в данном уравнении.

Ключевые слова: сингулярный дифференциальный оператор Лапласа–Бесселя, задача Коши, обобщённый сдвиг Б.М. Левитана, оператор $\mathbb{T}$-псевдосдвига

DOI: 10.31857/S0374064125020086, EDN: HWNDTA

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введём следующие обозначения:

$$\mathbb{R}^n=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\},\quad \mathbb{R}^n_+=\{x\colon x_1>0,\ \ldots,\ x_n>0\},\quad \overline{\mathbb{R}}^n_+=\{x\colon x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0\},$$

$$\Delta_{B_\gamma}=\sum_{i=1}^n B_{\gamma_i},\quad B_{\gamma_i}=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\ \frac{\partial}{\partial x_i},\quad \gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n),\ \ \gamma_i>-1.$$

Используя терминологию работы [1], число $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$, которое может быть отрицательным*, называем *коэффициентом скрытой сферической симметрии*, а число $n+|\gamma|$ — *размерностью оператора* Δ_B.

В статье [2] для всех значений параметра $\gamma_i>-1$ получена формула, названная авторами *формулой Киприянова–Бельтрами*, из которой для любой чётной по каждой координате аргумента, дважды непрерывно дифференцируемой функции $u=u(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, следует равенство

$$\Delta_{B_\gamma}u(|x|)=(B_\mu)_r u(r),\quad r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2},\quad \mu=n+|\gamma|-1. \tag{1}$$

*Коэффициент скрытой сферической симметрии поколений кривой Коха и предканторового множества оказался отрицательным (см. [2]).

Определение 1. Заданную на полуоси $Ox_i=[0,+\infty)$ функцию будем называть *чётной по И.А. Киприянову по аргументу* x_i, если возможно её чётное продолжение на всю ось x_i с сохранением класса своей принадлежности [3, с. 21].

Через $C^\ell_{ev}(\mathbb{R}^n_+)$ будем обозначать множество функций, заданных в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$, удовлетворяющих условию чётности по Киприянову, ℓ раз непрерывно дифференцируемых.

Пусть

$$\gamma=[\gamma]+\{\gamma\}=n-1+\{\gamma\} \quad \text{и} \quad B_\gamma=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\gamma}{x}\frac{\partial}{\partial x}.$$

На основании результатов статьи [2] в работе [1] получены равенства

$$\lim_{\{\gamma\}\to 0} B_\gamma=\Delta_n, \qquad \lim_{\{\gamma\}\to 1} B_\gamma=\Delta_{n+1},$$

позволяющие (по крайней мере формально) считать сингулярный дифференциальный оператор Бесселя (с дробным параметром) оператором Лапласа во фрактальной структуре*.

Пусть $x\in\mathbb{R}^n_+$, $y\in\mathbb{R}^m_+$. Рассмотрим сингулярное ультрагиперболическое уравнение

$$(\Delta_{B_\beta})_y u(x,y)=(\Delta_{B_\gamma})_x u(x,y)$$

с операторами $\Delta_{B_\lambda}=\sum B_{\lambda_i}$, B_{λ_i} — операторы Бесселя с параметрами $\lambda_i>-1$, где координаты мультииндексов $\beta_i>-1$ и $\gamma_i>-1$, $i=\overline{1,n}$. Размерностями операторов в левой и правой частях этого уравнения являются числа $m+|\beta|>0$ и $n+|\gamma|>0$. Применив сферическое преобразование координат $x=|x|\theta$ и $y=|x|\widehat{\theta}$, с учётом (1) получим уравнение

$$B_\nu u(t,r)=B_\mu u(t,r), \quad t=|y|,\ r=|x|,\ \nu=m+|\beta|-1,\ \mu=n+|\gamma|-1. \tag{2}$$

Если окажется, что $\nu>0$, $\mu>0$ и при этом $\nu=\mu$, то (2) — хорошо известное уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД), для которого решение задачи Коши с условием

$$u(t,r)|_{t=0}=f(r)$$

определяется формулой Пуассона [6]

$$u(t,r)=T^t f(r), \quad T^t f(r)=\frac{\Gamma((\gamma+1)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\gamma/2)}\int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{r^2+t^2-2rt\cos\alpha}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha\,d\alpha, \tag{3}$$

где T^t_r — обобщённый сдвиг Дельсарта–Вайнштейна, принадлежащий классу обобщённых сдвигов Б.М. Левитана. В этом случае решение сингулярного ультрагиперболического уравнения получено в работе [7] ввиду выполнения условия теоремы Асгейрссона без учёта какого-либо начального условия Коши. Но в случае $-1<\nu<0$ и $-1<\mu<0$ формула (3) уже не верна.

Сингулярное ультрагиперболическое уравнение при указанных параметрах μ и ν ранее не исследовалось. При выполнении условия $\nu=\mu$ оказалось, что необходимо заменить в (3) не только оператор "обобщённого сдвига", но и вид начального условия (см. далее формулу (15)), чтобы получить решение волнового уравнения (2) (при выполнении соответствующих требований к мультииндексам β и γ).

*Понятие фрактала как некоторой структуры, основной математической характеристикой которой служит дробная размерность (фрактальной структуры), введено Б. Мандельбротом [4]. Вообще говоря, подмена оператора Лапласа оператором Бесселя с дробным параметром использовалась в работах прикладного характера. Было отмечено, что оператор Бесселя с дробным параметром и есть нецелочисленная размерность оператора Лапласа (см., например, работу [5] и библиографию в ней).

Постановка задачи Коши. Требуется найти функцию $u\in C^2_{ev}(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ такую, что

$$(\Delta_{B_\beta})_y\, u(x,y)=(\Delta_{B_\gamma})_x\, u(x,y),\quad \beta_i>-1,\ \gamma_i>-1,\ i=\overline{1,n};$$

$$u(x,y)|_{|y|=0}=f(|x|),\quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y_i}\bigg|_{y_i=0}=0,\quad i=\overline{1,n}. \tag{4}$$

Пусть выполнено *условие И.А. Киприянова* [7] о размерности Δ_B-операторов слева и справа в уравнении (4):

$$n+|\gamma|-1=m+|\beta|-1=s. \tag{5}$$

Замечание 1. Второе условие Коши в (4) вызвано требованием чётности по И.А. Киприянову по каждой координате аргумента y и обычно отсутствует в формулировках задач для уравнений с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя.

2. $\mathbb{J}$-ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Пусть переменные x и ξ принадлежат пространству $\mathbb{R}^1_+$. Отметим, что ограниченность функции $B_\gamma u(x)$ в окрестности начала координат обеспечена применением оператора B_γ к чётным функциям [6]. В связи с этим используем чётность по И.А. Киприянову для функций, заданных на положительной полуоси.

Решения сингулярного уравнения Бесселя

$$(B_{-\gamma})_x u(x,\xi)=-\xi^2 u(x,\xi) \tag{6}$$

с отрицательным параметром $-1<-\gamma<0$ называются $\mathbb{J}$-*функциями Бесселя.* Пусть $\mu=(\gamma+1)/2$. Линейно независимые решения уравнения (6) выражаются через функции Бесселя первого рода J_μ формулами [8]

$$\mathbb{J}_\mu(x)=\Gamma(1+\mu)2^\mu x^\mu J_\mu(x)=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(1+\mu)x^{2\mu+2m}}{m!\Gamma(m+1+\mu)2^{2m}},$$

$$\mathbb{J}_{-\mu}(x)=\Gamma(1-\mu)2^\mu x^\mu J_{-\mu}(x)=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(1-\mu)x^{2m}}{m!\Gamma(m+1-\mu)2^{2m}}.$$

$\mathbb{J}$-функции Бесселя образуют фундаментальную систему решений уравнения (6) и удовлетворяют условиям

$$\lim_{x\to 0}x^{-2\mu}\mathbb{J}_\mu(x)=1,\qquad \mathbb{J}_{-\mu}(0)=1.$$

Решение $\mathbb{J}_{-\mu}$ более востребовано в спектральной теории сингулярных дифференциальных уравнений, что продемонстрировано в работах [9–11].

Имеет место

Теорема 1 (теорема сложения $\mathbb{J}_\mu$-функций Бесселя). *Для $1/2<\mu<1$ справедливы равенства*

$$\mathbb{J}_\mu(x\xi)\mathbb{J}_\mu(x\xi)=\begin{cases}\mathbb{T}^y_x\mathbb{J}_\mu(x\xi),\\ y^{2\mu}\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y_x\mathbb{J}_\mu(x\xi)=x^{2\mu}\overset{**}{\mathbb{T}}{}^y_x\mathbb{J}_\mu(x\xi).\end{cases}$$

В первом равенстве переменные x и y равносильны в смысле симметрии:

$$\mathbb{T}^y_x\mathbb{J}_\mu(x\xi)=\mathbb{T}^x_y\mathbb{J}_\mu(y\xi);$$

во втором равенстве строго различаются аргумент функции и аргумент сдвига. Определения операторов $\overset{*}{\mathbb{T}}$-сдвига и $\overset{**}{\mathbb{T}}$-квазисдвига и их свойства приведены в п. 3.

3. $\mathbb{T}$-ПСЕВДОСДВИГ, $\overset{*}{\mathbb{T}}$-СДВИГ И $\overset{**}{\mathbb{T}}$-КВАЗИСДВИГ

Обобщённый $\mathbb{T}$-псевдосдвиг (определён в [8] на основании теоремы сложения $\mathbb{J}$-функций Бесселя), $\overset{*}{\mathbb{T}}$-сдвиг и $\overset{**}{\mathbb{T}}$-квазисдвиг (см. [12]), действующие по переменной x, определены следующими формулами:

$$\mathbb{T}_x^y f(x) = \frac{\Gamma((\gamma+3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma+2)/2)} \int\limits_0^\pi \frac{(x\,y)^{\gamma+1} f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)^{\gamma+1}} \sin^{\gamma+1}\alpha\, d\alpha, \tag{7}$$

$$\overset{*}{\mathbb{T}}{}_x^y f(x) = \frac{\Gamma((\gamma+3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma+2)/2)} \int\limits_0^\pi \frac{x^{\gamma+1} f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)^{\gamma+1}} \sin^{\gamma+1}\alpha\, d\alpha, \tag{8}$$

$$\overset{**}{\mathbb{T}}{}_x^y f(x) = \frac{\Gamma((\gamma+3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma+2)/2)} \int\limits_0^\pi \frac{y^{\gamma+1} f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)^{\gamma+1}} \sin^{\gamma+1}\alpha\, d\alpha. \tag{9}$$

Выражение (7) называется *одномерным* $\mathbb{T}$-*псевдосдвигом*. Выражение (8) удовлетворяет определению Б.М. Левитана обобщённого сдвига (доказательство ниже), поэтому называется $\mathbb{T}$-*сдвигом*. Выражение (9) не удовлетворяет определению обобщённого сдвига (см. [13]) только одним свойством (доказательство см. ниже), поэтому называется $\mathbb{T}$-*квазисдвигом*. Соответствующие многомерные операторы обычно представляются в виде суперпозиции одномерных:

$$\mathbb{T}_x^y f(x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x), \quad \overset{*}{\mathbb{T}}{}_x^y f(x) = \prod_{i=1}^n \overset{*}{\mathbb{T}}{}_x^y f(x), \quad \overset{**}{\mathbb{T}}{}_x^y f(x) = \prod_{i=1}^n \overset{**}{\mathbb{T}}{}_{x_i}^{y_i} f(x).$$

3.1. ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ КЛАССУ ОБОБЩЁННЫХ СДВИГОВ Б.М. ЛЕВИТАНА

Впервые термин “обобщённый сдвиг” по отношению к интегральному оператору (3) появился в работах Ж. Дельсарта и А. Вайнштейна в середине XX века (см. [6]). Б.М. Левитан обобщил понятие “оператора обобщённого сдвига”, указав набор условий, которым этот оператор должен удовлетворять, чтобы называться “обобщённым сдвигом” (см. [13]). Большим достижением статьи [6] является формула решения задачи Коши для уравнения ЭПД — формула Пуассона, полученная применением обобщённого сдвига (3) к начальному условию. В связи с этим приложением к теории сингулярных дифференциальных уравнений сдвиг (3) называется *обобщённым сдвигом Пуассона.*

Операторы (7), (8) и (9) связаны с обобщённым сдвигом Пуассона (3), соответственно, равенствами

$$\mathbb{T}_x^y f(x) = (xy)^{\gamma+1} T^y\left(\frac{f(x)}{x^{\gamma+1}}\right), \quad \overset{*}{\mathbb{T}}{}_x^y f(x) = x^{\gamma+1} T^y\left(\frac{f(x)}{x^{\gamma+1}}\right), \quad \overset{**}{\mathbb{T}}{}_x^y f(x) = y^{\gamma+1} T^y\left(\frac{f(x)}{x^{\gamma+1}}\right).$$

Основную роль в наших рассуждениях играет оператор (8). Учитывая его особенности, введём следующее

Определение 2. *Оператором обобщённого сдвига* будем называть оператор Λ, удовлетворяющий следующим условиям:

1) оператор линейный;

2) в $\overline{\mathbb{R}}_+^1$ существует точка (элемент) y_0, которая обладает тем свойством, что для любой функции $f(x)$

$$\Lambda^{y_0} f(x) = f(x);$$

3) для произвольной непрерывной функции $f(x)$ и произвольных точек $x, y, \eta \in [0, +\infty)$ выполняется равенство

$$\Lambda_x^y \Lambda_x^\eta f(x) = \Lambda_x^\eta \Lambda_x^y f(x);$$

4) оператор обобщённого сдвига ограничено действует в пространстве Лебега $L_p^{-\gamma}$, $1 \leqslant p < +\infty$, т.е.

$$\|\Lambda^y f(x)\|_{L_p^{-\gamma}} \leqslant \|f\|_{L_p^{-\gamma}}.$$

Отметим, что свойства 1)–3) полностью совпадают со свойствами обобщённого сдвига Б.М. Левитана из книги [13], свойство 4) взято нами из статьи [14] — это условие “ограниченного действия в лебеговых пространствах”. Если рассмотреть пространства L_∞, то условие 4 из работы [14] можно заменить на условие 4 из книги [13], но что обобщённый сдвиг Пуассона удовлетворяет свойству 4 из [13] было установлено только в 1970 г. в статье [15] (часто называют *неравенством Киприянова–Ключанцева*). Возможно поэтому используемое нами свойство 4) не вошло в окончательное определение левитановского класса операторов обобщённого сдвига из книги [13].

Покажем, что оператор (8) $(\Lambda = \overset{*}{\mathbb{T}})$ принадлежит классу обобщённых сдвигов в смысле введённого определения 2.

Доказательства свойств 1)–3) для $\overset{*}{\mathbb{T}}$-сдвига можно найти в работе [12], поэтому достаточно доказать выполнение условия 4) для $\Lambda = \overset{*}{\mathbb{T}}$-сдвига. Отчасти в этом доказательстве может быть использован подход к аналогичной проблеме из [15] для обобщённого сдвига Пуассона.

В выражении $\Phi(y) = \|\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y f\|_{L_p^{-\gamma}}$ норма взята интегрированием по аргументу функции. Учитывая, что $-\gamma = 1 - 2\mu$, имеем

$$\|\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y f(x)\|_{L_p^{-\gamma}} = \left[\int\limits_{\mathbb{R}_+^1} \left| C(\gamma) \int\limits_0^\pi x^{2\mu} \frac{f\big(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\big)}{\big(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\big)^{2\mu}} \sin^{2\mu}\alpha \, d\alpha \right|^p x^{-\gamma}\, dx\right]^{1/p},$$

где $C(\gamma) = \Gamma((\gamma+3)/2)/\big(\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma+2)/2)\big)$.

Применим обобщённое неравенство Минковского:

$$\|\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y f(x)\|_{L_p^{-\gamma}} \leqslant C(\gamma) \int\limits_0^\pi \sin^{2\mu}\alpha\, d\alpha \left[\int\limits_{\mathbb{R}_+^1} \left| x^{2\mu} \frac{f\big(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\big)}{\big(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\big)^{2\mu}}\right|^p x^{-\gamma}\, dx\right]^{1/p}.$$

Учитывая рост подынтегрального выражения при $x = y$ (и $\alpha \to 0$), при $x = y$ получаем

$$\frac{x^{2\mu}}{\big(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\big)^{2\mu}}\bigg|_{x=y} = \frac{1}{(2(1-\cos\alpha))^\mu}. \tag{10}$$

Тогда

$$\|\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y f(x)\|_{L_p^{-\gamma}} \leqslant C(\gamma) \int\limits_0^\pi \sin^{2\mu}\alpha\, d\alpha \left[\int\limits_{\mathbb{R}_+^1} \left| \frac{f\big(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\big)}{(2(1-\cos\alpha))^\mu}\right|^p x^{-\gamma}\, dx\right]^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant C(\gamma) \int\limits_0^\pi |\cos^{2\mu}(\alpha/2)|\, d\alpha \left[\int\limits_{\mathbb{R}_+^1} \left| f\big(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\big)\right|^p x^{-\gamma}\, dx\right]^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant C(\gamma)\int\limits_0^\pi d\alpha\left[\int\limits_{\mathbb{R}^1_+}\left|f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)\right|^p x^{1-2\mu}\,dx\right]^{1/p}.$$

Введём антиполярные координаты

$$x\cos\alpha=z_1,\quad x\sin\alpha=z_2,\quad x\,dx\,d\alpha=dz_1\,dz_2=dz$$

и в результате будем иметь

$$\|\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y f(x)\|_{L_p^{-\gamma}}\leqslant C(\gamma)\left[\int\limits_{\mathbb{R}^2_+}\left|f\left(\sqrt{(y-z_1)^2+z_2^2}\right)\right|^p\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2}\right)^{-2\mu}dz\right]^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant C(\gamma)\left[\int\limits_{\mathbb{R}^2_+}\left|f\left(\sqrt{(y-z_1)^2+z_2^2}\right)\right|^p\left(\sqrt{z_2^2}\right)^{-2\mu}dz\right]^{1/p}.$$

Теперь сдвиг $y-z_1=\xi$ приведёт к неравенству

$$\|\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y f(x)\|_{L_p^{-\gamma}}\leqslant C(\gamma)\left[\int\limits_{\mathbb{R}^2_+=\{z:\,z_2>0\}}\left|f\left(\sqrt{\xi^2+z_2^2}\right)\right|^p z_2^{-2\mu}\,d\xi\,dz\right]^{1/p}.$$

Применив полярное преобразование координат

$$\xi=x\cos\alpha,\quad z_2=x\sin\alpha,\quad d\xi\,dz=d\alpha\,x\,dx,$$

с учётом равенства $-2\mu=-\gamma-1$ вернёмся к прежним обозначениям:

$$\|\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y f(x)\|_{L_p^{-\gamma}}\leqslant C(\gamma)\int\limits_0^\pi\sin^{1-\gamma}\alpha\,d\alpha\left[\int\limits_{\mathbb{R}^1_+}|f(x)|^p x^{-\gamma}\,dx\right]^{1/p}=\|f\|_{L_p^{-\gamma}}.$$

Таким образом, выполнение условия 4) доказано.

Замечание 2. Для $p=\infty$ выполнение условия 4) возможно лишь при ограниченности носителя функции f.

Отдельно рассмотрим случай непрерывной функции f. Непрерывность $\overset{*}{\mathbb{T}}$-сдвига по аргументу функции нарушена в связи с очевидным равенством $\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y_x f(x)|_{y=0}=0$. Поэтому при работе с $\overset{*}{\mathbb{T}}$-сдвигом (9) на аргумент функции вводится ограничение

$$x\geqslant\delta>0.$$

При этом шаг сдвига y может принимать произвольные действительные значения.

Отметим, что введённое в определении 2 условие 4) часто бывает необходимо применить в пространстве непрерывных функций. Тогда условие 4) принимает следующий вид:

4^0) Пусть $\overline{\Omega}_+\subseteq\overline{\mathbb{R}}^1_+$ и $f\in C(\overline{\Omega}_+)$. Если $\sup_{x\in\overline{\Omega}_+}|f(x)|=M$, то $\sup_{x\in\overline{\Omega}_+}|\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y f(x)|=M$.

Действительно, для выполнения условия 4^0) продолжим функцию f нулём в область $\Omega^1_+=\mathbb{R}^1_+\setminus\overline{\Omega}_+$. Имеем

$$\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y f(x)=\frac{\Gamma((\gamma+3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma+2)/2)}\int\limits_0^\pi\frac{x^{\gamma+1}f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)^{\gamma+1}}\sin^{\gamma+1}\alpha\,d\alpha.$$

При $x=y$ выполнено равенство (10), следовательно

$$\left|\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y f(x)\right| \leqslant \frac{\Gamma((\gamma+3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma+2)/2)} \int\limits_0^\pi \frac{x^{\gamma+1}M}{\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)^{\gamma+1}}\bigg|_{x=y} |\sin\alpha|^{\gamma+1}\,d\alpha =$$

$$= \frac{\Gamma((\gamma+3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma+2)/2)} \int\limits_0^\pi \frac{M}{|2(1-\cos\alpha)|^{\frac{\gamma+1}{2}}} |\sin\alpha|^{\gamma+1}\,d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant 2M \frac{\Gamma((\gamma+3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma+2)/2)} \int\limits_0^{\pi/2} |\cos\alpha|^{\gamma+1}\,d\alpha = M.$$

Здесь учтено, что согласно определению бета-функции Эйлера

$$2\int\limits_0^{\pi/2} (\cos\alpha)^{\gamma+1}\,d\alpha = B\left(\frac{\gamma+2}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma+2)/2)}{\Gamma((\gamma+3)/2)}.$$

3.2. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА $\overset{*}{\mathbb{T}}$-СДВИГА И $\overset{**}{\mathbb{T}}$-КВАЗИСДВИГА

Зададим билинейную форму следующего вида (см. [1]):

$$(u,v)_{-\gamma} = \int\limits_{\Omega_+\subseteq\overline{\mathbb{R}}^1_+} u(x)v(x)x^{-\gamma}\,dx.$$

Лемма 1 (эрмитовость $\mathbb{T}$-псевдосдвига в пространстве $L_2^{-\gamma}$). *Если f и g — суммируемые с весом $x^{-\gamma}$ функции, то*

$$(\mathbb{T}^x f(t), g(t))_{-\gamma} = (f(t), \mathbb{T}^x g(t))_{-\gamma}.$$

Доказательство леммы 1 приведено в работе [12].

Следствие. *Справедливо равенство* $\left(\overset{**}{\mathbb{T}}{}^x f(t), g(t)\right)_1 = \left(f(t), \overset{**}{\mathbb{T}}{}^x g(t)\right)_1$.

Доказательство. Так как (см. (9)) $\mathbb{T}^x_t = t^{\gamma+1}\overset{**}{\mathbb{T}}{}^x_t$, то из леммы 1 имеем

$$\left(\overset{**}{\mathbb{T}}{}^x f(t), g(t)\right)_1 = (t^{-\gamma-1}\,\mathbb{T}^x f(t), g(t))_1 = (\mathbb{T}^x f(t), g(t))_{-\gamma} = (f(t), \mathbb{T}^x g(t))_{-\gamma} =$$

$$= (f(t), tt^{-\gamma-1}\mathbb{T}^x g(t))_0 = \left(f(t), \overset{**}{\mathbb{T}}{}^x g(t)\right)_1.$$

Здесь третье равенство непосредственно вытекает из леммы 1. Первое равенство и последующие с очевидностью следуют из определений $\mathbb{T}$-псевдосдвига, $\overset{**}{\mathbb{T}}$-квазисдвига и определения соответствующих весовых линейных форм.

Лемма 2 (коммутируемость с оператором $B_{-\gamma}$). *Если $u(x)$ — суммируемая с весом $x^{-\gamma}$, дважды непрерывно дифференцируемая, чётная по И.А. Киприянову функция, то выполняются соотношения*

$$\mathbb{T}^x B_{-\gamma,t} u(t) = B_{-\gamma,t}\mathbb{T}^x u(t) = B_{-\gamma,x}\mathbb{T}^x u(t), \tag{11}$$

$$\overset{**}{\mathbb{T}}{}^x B_{-\gamma,t} u(t) = B_{-\gamma,x}\overset{**}{\mathbb{T}}{}^x u(t), \tag{12}$$

$$\overset{*}{\mathbb{T}}{}^x B_{-\gamma,t} u(t) = B_{-\gamma,t}\overset{*}{\mathbb{T}}{}^x u(t). \tag{13}$$

Доказательство. Первое равенство в (11) вытекает из теоремы сложения $\mathbb{J}$-функций Бесселя и возможности его представления в рамках $\mathbb{J}$-преобразования Бесселя (см. [8]). Причём, ввиду симметрии функции $\mathbb{T}^t u(x)$ относительно переменных x и t, оператор $B_{-\gamma}$ во втором равенстве в (11) может применяться либо по x, либо по t (разумеется, при условии $x \neq 0,\ t \neq 0$).

Докажем (12). Имеем

$$\overset{**}{\mathbb{T}}{}^x B_{-\gamma,t} u(t) = t^{-\gamma-1} \mathbb{T}^x B_{-\gamma,t} u(t) = t^{-\gamma-1} B_{-\gamma,t} \mathbb{T}^x u(t) = t^{-\gamma-1} B_{-\gamma,x} \mathbb{T}^x u(t) =$$
$$= B_{-\gamma,x} t^{-\gamma-1} \mathbb{T}^t u(x) = B_{-\gamma,x} \overset{**}{\mathbb{T}}{}^x u(t).$$

Здесь первое равенство является следствием определений операторов (7) и (8), второе — следствием коммутируемости операторов $B_{-\gamma}$ и $\mathbb{T}$-псевдосдвига [8], третье — следствием симметрии $\mathbb{T}$-псевдосдвига относительно аргумента функции и шага сдвига, четвёртое и пятое равенства очевидны.

Аналогично доказывается утверждение (13):

$$\overset{*}{\mathbb{T}}{}^x B_{-\gamma,t} u(t) = x^{-\gamma-1} \mathbb{T}^x B_{-\gamma,t} u(t) = x^{-\gamma-1} B_{-\gamma,t} \mathbb{T}^x u(t) = B_{-\gamma,t} x^{-\gamma-1} \mathbb{T}^x u(t) = B_{-\gamma,t} \overset{*}{\mathbb{T}}{}^x u(t).$$

Лемма доказана.

Замечание 3. Отметим принципиальную особенность формулы (12): квазисдвиг $\overset{**}{\mathbb{T}}{}^x_t$ не коммутирует ни с одним из операторов $B_{-\gamma,x},\ B_{-\gamma,t}$.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ

Рассмотрим уравнение ЭПД с отрицательными индексами оператора Бесселя. История исследований уравнений ЭПД очень богата. Здесь приведём только работу [16], в которой решение задачи Коши с оператором Бесселя $B_{-\gamma}$, $\gamma > 0$, по времени получено в виде формулы, аналогичной формуле Пуассона из [6]. Было отмечено, что рассматриваемая задача имеет не единственное решение.

Воспользуемся идеей С.А. Терсенова для решений дифференциальных уравнений с вырождением на границе [17] и получим решение задачи Коши для уравнения ЭПД, в котором оператор Бесселя с коэффициентом $-1 < -\gamma < 0$ действует как по времени, так и по пространственной переменной.

Пусть $-1 < -\gamma < 0,\ \mu = (\gamma+1)/2$. Рассмотрим уравнение ЭПД

$$B_{-\gamma,t} u(x,t) = B_{-\gamma,x} u(x,t). \tag{14}$$

Поставим следующую задачу Коши: найти функцию $u(x,t) \in C_{ev}(\mathbb{R}^2_+)$, удовлетворяющую уравнению (14) и начальным условиям в предельной форме С.А. Терсенова [17]

$$\lim_{t \to +0} \frac{1}{t^{\gamma+1}} u(x,t) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0, \tag{15}$$

где второе условие, как и в [6], связано с чётностью по И.А. Киприянову функции $f(x,t)$, заданной на $\overline{\mathbb{R}}^2_+$.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая чётная по И.А. Киприянову функция. Тогда решение задачи Коши* (14), (15) *определяется следующей формулой Пуассона*:

$$u(x,t) = \mathbb{T}^t f(x) = \frac{\Gamma(\mu+1)(xt)^{2\mu}}{\Gamma(1/2)\Gamma(\mu+1/2)} \int_0^{\pi} \frac{f\left(\sqrt{x^2+t^2-2xt\cos\alpha}\right)}{\left(\sqrt{x^2+t^2-2xt\cos\alpha}\right)^{2\mu}} \sin^{2\mu}\alpha\, d\alpha.$$

Доказательство. Из леммы 2 вытекает, что функция $u(x,t)=\mathbb{T}^t f(x)$ — решение уравнения ЭПД (14). Обычно (см. [6]) его называют формулой Пуассона.

Проверим выполнение первого начального условия из (15). Учитывая, что $\gamma+1=2\mu$, имеем

$$\lim_{t\to+0}\frac{1}{t^{\gamma+1}}u(x,t)=\lim_{t\to+0}\frac{1}{t^{\gamma+1}}\mathbb{T}^t_x u(x,t)=\lim_{t\to+0}\overset{*}{\mathbb{T}}{}^t_x f(x)=$$

$$=C(\gamma)\lim_{t\to+0}\int\limits_0^\pi \frac{x^{2\mu}f\big(\sqrt{x^2+t^2-2xt\cos\alpha}\big)}{\big(\sqrt{x^2+t^2-2xt\cos\alpha}\big)^{2\mu}}\sin^{2\mu}\alpha\,d\alpha=$$

$$=C(\gamma)\int\limits_0^\pi f(x)\sin^{2\mu}\alpha\,d\alpha=f(x)\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\mu+1/2)}\int\limits_0^\pi \sin^{2\mu}\alpha\,d\alpha,=f(x),$$

где в последнем равенстве использована формула вычисления бета-функции Эйлера

$$\int\limits_0^\pi \sin^{2\mu}\alpha\,d\alpha=2\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\frac{2\mu+1}{2}-1}\alpha\cos^{2\cdot\frac{1}{2}-1}\alpha\,d\alpha=B\left(\frac{2\mu+1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

и учтено, что

$$C(\gamma)=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\mu+1/2)}=\frac{1}{B((2\mu+1)/2,1/2)}.$$

Теорема доказана.

Замечание 4. В работе [6] подобная задача Коши для уравнения ЭПД с положительными параметрами операторов Бесселя B_γ, $\gamma>0$, представлена обобщённым сдвигом (3) начального условия: $u(x,t)=T^t f(x)$. Очевидна следующая связь между T^t_x-сдвигом и $\overset{*}{\mathbb{T}}{}^t_x$-сдвигом (8): $\overset{*}{\mathbb{T}}{}^t f(x)=t^{2\mu}T^t_x(x^{-2\mu}f(x))$, причём дополнительные сомножители в правой части этого равенства, как это видно из (10), нейтрализуют друг друга. Из равенства (11) леммы 2 видим, что результат применения $\mathbb{T}$-псевдосдвига к начальному условию (15) задачи Коши является решением уравнения ЭПД с отрицательными индексами оператора Бесселя. Но это решение не может непосредственно удовлетворять начальному условию $u(x,0)=f(x)$ при произвольной функции f, так как $\mathbb{T}^x_t f(x,t)|_{t=0}\equiv 0$. В то же время условию (15) решение уравнения ЭПД (14) удовлетворяет.

5. ФОРМУЛА ПУАССОНА И ФОРМУЛА ДАЛАМБЕРА РЕШЕНИЯ РАДИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ (4)

Рассмотрим задачу (4) с условием И.А. Киприянова (5).

Теорема 3. *Предположим, что координаты мультииндексов β и γ удовлетворяют условиям $\beta_i>-1$, $\gamma_i>-1$. Решение задачи Коши (4) с условием (5) существует и представлено следующими формулами.*

1. *Пусть $s>0$ $(n+|\gamma|=m+|\beta|>1)$, тогда решение задачи Коши (4) определено первой формулой Пуассона*

$$u(x,y)=\frac{2\Gamma((n+|\gamma|)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma((n+|\gamma|-1)/2)}\int\limits_0^\pi f\big(\sqrt{|x|^2+|y|^2-2|x||y|\cos\alpha}\big)\sin^{2s}\alpha\,d\alpha. \qquad (16)$$

2. *Для* $s=0$ $(n+|\gamma|=m+|\beta|=1)$ *решение задачи* (4) *имеет вид формулы Даламбера*

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\big(f(|x|+|y|)+f(|x|-|y|)\big). \tag{17}$$

3. *Если* $-1<s<0$ $(0<n+|\gamma|=m+|\beta|<1)$, *то решение задачи Коши* (4) *определено второй формулой Пуассона*

$$u(x,y)=\mathbb{T}^y f(x)=\frac{\Gamma(s+1)(xy)^{2s}}{\Gamma(1/2)\Gamma(s+1/2)}\int\limits_0^\pi \frac{f\big(\sqrt{|x|^2+|y|^2-2|x||y|\cos\alpha}\big)}{\big(\sqrt{|x|^2+|y|^2-2|x||y|\cos\alpha}\big)^{2s}}\sin^{2s}\alpha\,d\alpha. \tag{18}$$

Доказательство. Ясно, что условия на координаты мультииндексов γ и β приводят к условию $s>-1$. Поэтому сферические преобразования $x=r\theta$, $y=t\widehat{\theta}$, $|\theta|=1$, $|\widehat{\theta}|=1$ приведут задачу (4) к следующей задаче Коши для уравнения ЭПД (здесь и далее следуем замечанию 4):

$$(B_s)_t u(r,t)=(B_s)_r u(r,t), \quad u(r,t)|_{t=0}=f(r). \tag{19}$$

Согласно условию теоремы все показатели $s>-1$ разбиваются на три группы.

1. Если $s>0$, то решение задачи (19) определено в [6] применением к начальному условию обобщённого сдвига Пуассона. Тогда решение задачи Коши (4) определено в виде первой формулы Пуассона (16).

2. Для $s=0$ в работе [12] получена формула

$$\lim_{s\to+0}\left(\frac{2\Gamma((s+1)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(s/2)}\int\limits_0^\pi f\big(\sqrt{r^2+r^2-2rt\cos\alpha}\big)\sin^{2s}\alpha\,d\alpha\right)=\frac{f(r+t)+f(r-t)}{2}.$$

Кроме того, при $s=0$ задача (19) — это задача для радиального волнового уравнения с соответствующими условиями Коши:

$$u(r,t)_{tt}=u(r,t)_{rr}, \quad u(r,t)|_{t=0}=f(r), \quad \left.\frac{\partial u(r,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0. \tag{20}$$

Напомним, что здесь второе начальное условие Коши порождено чётностью по И.А. Киприянову по каждой координате аргумента y предполагаемого решения задачи (4) и присутствует в этой задаче для сравнения с классической формулой Даламбера. Решение задачи (20)

$$u(r,t)=\frac{f(r+t)+f(r-t)}{2}$$

называется *формулой Даламбера*. Следовательно, решение задачи (4) примет вид (17).

3. В случае $-1<s<0$ решение задачи (19) определено в теореме 2 применением к начальному условию обобщённого $\mathbb{T}$-псевдосдвига, при этом начальное условие мы должны принять в предельной форме С.А. Терсенова:

$$(B_s)_y u(x,y)=(\Delta_{B_\gamma})_x u(x,y), \quad \lim_{y\to+0}\frac{1}{y^{\gamma+1}}u(x,y)=f(x).$$

Тогда решение задачи Коши (4) определяется по формуле (18). Теорема доказана.

Отметим, что третий случай доказанной теоремы ранее не был известен и не мог быть получен в рамках работы [7]. Тем не менее его решение найдено в явной форме применением псевдосдвига, не принадлежащего классу обобщённых сдвигов Левитана.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24-21-00387).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляхов, Л.Н. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Мат. заметки. — 2023. — Т. 113, № 4. — С. 517–528.
2. Ляхов, Л.Н. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 12. — С. 1610–1620.
3. Киприянов, И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов. — М. : Наука, 1997. — 198 с.
4. Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт ; пер. с англ. А.Р. Логинова. — М. : Ин-т компьютерных исследований, 2002. — 656 с.
5. Metzler, R. Fractional model equation for anomalous diffusion / R. Metzler, W.G. Glöckle, Th.F. Nonnenmacher // Phys. A: Stat. Mech. Appl. — 1994. — V. 211, № 1. — P. 13–24.
6. Левитан, Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье / Б.М. Левитан // Успехи мат. наук. — 1951. — Т. 6, № 2 (42). — С. 102–143.
7. Ляхов, Л.Н. Об одной задаче И.А. Киприянова для сингулярного ультрагиперболического уравнения / Л.Н. Ляхов, И.П. Половинкин, Э.Л. Шишкина // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 4. — С. 516–526.
8. Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B-оператора Киприянова / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов, С.А. Рощупкин, Е.Л. Санина // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 12. — С. 1654–1665.
9. Сабитов, К.Б. Вторая начально-граничная задача для B-гиперболического уравнения / К.Б. Сабитов, Н.В. Зайцева // Изв. вузов. Математика. — 2019. — № 10. — С. 75–86.
10. Сабитов, К.Б. Начальная задача для B-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода / К.Б. Сабитов, Н.В. Зайцева // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 1. — С. 123–135.
11. Сабитов, К.Б. О равномерной сходимости разложения функции в ряд Фурье–Бесселя / К.Б. Сабитов // Изв. вузов. Математика. — 2022. — № 11. — С. 89–96.
12. Фундаментальное решение сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина, С.А. Рощупкин, Ю.Н. Булатов // Изв. вузов. Математика. — 2023. — № 7. — С. 52–65.
13. Левитан, Б.М. Теория операторов обобщённого сдвига / Б.М. Левитан. — М. : Наука, 1973. — 313 с.
14. Левитан, Б.М. Применение операторов обобщённого сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка / Б.М. Левитан // Успехи мат. наук. — 1949. — Т. 4, № 1 (29). — С. 3–112.
15. Киприянов, И.А. О сингулярных интегралах, порожденных оператором обобщённого сдвига / И.А. Киприянов, М.И. Ключанцев // Сиб. мат. журн. — 1970. — Т. 2, № 5. — С. 1060–1083.

16. Шишкина, Э.Л. Единственность решения задачи Коши для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу / Э.Л. Шишкина // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 12. — С. 1688–1693.
17. Терсенов, С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе / С.А. Терсенов. — Новосибирск : НГУ, 1973. — 143 с.

POISSON FORMULA FOR SOLVING THE RADIAL CAUCHY PROBLEM FOR A SINGULAR ULTRAHYPERBOLIC EQUATION

L. N. Lyakhov[1], Yu. N. Bulatov[2]

[1] *Voronezh State University, Russia*
[1] *Lipetsk State Pedagogical University named after P.P. Semenov-Tyan-Shansky, Russia*
[1,2] *Yelets State University named after I.A. Bunin, Russia*
e-mail: [1] *levnlya@mail.ru,* [2] *y.bulatov@bk.ru*

The singular ultrahyperbolic equation $(\Delta_{B_\beta})_y u = (\Delta_{B_\gamma})_x u$ is considered under the assumption that the I.A. Kipriyanov condition is satisfied, where fractional dimensions of the Δ_{B_γ}-operators included in the equation are equal to the same positive number σ. Three types of solutions to the radial Cauchy problem are studied, one of them is based on the $\mathbb{T}$-pseudoshift operator, generalized $\mathbb{T}$-shift and S.A. Tersenov's method for determining solutions to equations that degenerate on the boundary. Poisson formulas for solving the Cauchy problem for the Euler–Poisson–Darboux equation are given for various values of the parameters in this equation.

Keywords: singular differential Laplace–Bessel operator, Cauchy problem, generalized Levitan shift, $\mathbb{T}$-pseudoshift operator

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00387).

REFERENCES

1. Lyakhov, L.N. and Sanina, E.L., Differential and integral operations in hidden spherical symmetry and the dimension of the Koch curve, *Math. Notes*, 2023, vol. 113, no. 4, pp. 502–511.
2. Lyakhov, L.N. and Sanina, E.L., Kipriyanov–Beltrami operator with negative dimension of the Bessel operators and the singular Dirichlet problem for the B-harmonic equation, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 12, pp. 1564–1574.
3. Kipriyanov, I.A., *Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi* (Singular Elliptic Boundary Value Problems), Moscow: Nauka, 1997.
4. Mandelbrot, B., *The Fractal Geometry of Nature*, United States: Henry Holt and Co., 1983.
5. Metzler, R., Glöckle, W.G., and Nonnenmacher, Th.F., Fractional model equation for anomalous diffusion, *Phys. A. Stat. Mech. Appl.*, 1994, vol. 211, no. 1, pp. 13–24.
6. Levitan, B.M., Expansion into Fourier series and integrals in Bessel functions, *Usp. Mat. Nauk*, 1951, vol. 6, no. 2 (42), pp. 102–143.
7. Lyakhov, L.N., Polovinkin, I.P., and Shishkina, E.L., On a Kipriyanov problem for a singular ultrahyperbolic equation, *Differ. Equat.*, 2014, vol. 50, no. 4, pp. 516–528.
8. Lyakhov, L.N., Bulatov, Yu.N., Roshchupkin, S.A., and Sanina, E.L., Pseudoshift and the fundamental solution of the Kipriyanov Δ_B-operator, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 12, pp. 1639–1650.
9. Sabitov, K.B. and Zaitseva, N.V., The second initial-boundary value problem for a B-hyperbolic equation, *Russ. Math.*, 2019, vol. 63, no. 10, pp. 66–76.
10. Sabitov, K.B. and Zaitseva, N.V., Initial value problem for B-hyperbolic equation with integral condition of the second kind, *Differ. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 121–133.
11. Sabitov, K.B., On the uniform convergence of the expansion of a function in the Fourier–Bessel range, *Russ. Math.*, 2022, vol. 66, no. 11, pp. 79–85.
12. Lyakhov, L.N., Sanina, E.L., Roshchupkin, S.A., and Bulatov, Yu.N., Fundamental solution of a singular Bessel differential operator with a negative parameter, *Russ. Math.*, 2023, vol. 67, no. 7, pp. 43–54.

13. Levitan, B.M., *Teoriya operatorov obobshchennogo sdviga* (Theory of Generalized Shift Operators), Moscow: Nauka, 1973.
14. Levitan, B.M., Application of generalized shift operators to second-order linear differential equations, *Usp. Mat. Nauk*, 1949, vol. 4, no. 1 (29), pp. 3–112.
15. Kipriyanov, I.A. and Klyuchantsev, M.I., Singular integrals that are generated by a generalized shift operator, *Siberian Math. J.*, 1970, vol. 11, no. 5, pp. 787–804.
16. Shishkina, E.L., Uniqueness of the solution of the Cauchy problem for the general Euler–Poisson–Darboux equation, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 12, pp. 1673–1679.
17. Tersenov, S.A., *Vvedeniye v teoriyu uravneniy, vyrozhdayushchikhsya na granitse* (Introduction to the Theory of Equations that Degenerate at the Boundary), Novosibirsk: NSU, 1973.