ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 2, с. 221–228

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4+517.928

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЧЁТНОГО ПОРЯДКА

Я. Т. Султанаев[1], Б. И. Марданов[2], Э. А. Назирова[3]

[1]*Московский центр фундаментальной и прикладной математики*
[1,2]*Башкирский государственный педагогический университет имени М. Акмуллы, г. Уфа*
[3]*Уфимский университет науки и технологий*

e-mail: [1]sultanaevyt@gmail.com, [2]mardanov_bulat@list.ru, [3]ellkid@gmail.com

Поступила в редакцию 14.10.2024 г., после доработки 14.10.2024 г.; принята к публикации 31.10.2024 г.

Исследовано асимптотическое поведение при больши́х значениях независимой переменной фундаментальной системы решений линейных дифференциальных уравнений, порождённых симметричным двухчленным дифференциальным выражением произвольного нечётного порядка, в зависимости от коэффициентов при старшей производной и свободном члене.

Ключевые слова: асимптотика, квазипроизводная, L-диагональная система

DOI: 10.31857/S0374064125020079, EDN: HWORFY

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение

$$l(y)=\frac{i}{2}[(p(x)y^{(n)}(x))^{(n+1)}+(p(x)y^{(n+1)}(x))^{(n)}]+q(x)y(x)=\lambda y, \quad \lambda\in\mathbb{C}, \ x\geqslant 1, \tag{1}$$

где i — мнимая единица.

Для нахождения асимптотики фундаментальной системы решений (ФСР) уравнения (1) при $x\to+\infty$ будет использован подход, предложенный ранее в работах [1–3], основанный на последовательности матричных преобразований и применении тождества Кэмпбелла–Хаусдорфа [4]. Данный метод позволяет существенно расширить классы коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$, для которых можно выписать асимптотику ФСР уравнения (1).

Отметим, что полученные асимптотические формулы позволяют исследовать спектральные свойства соответствующих дифференциальных операторов, порождаемых уравнением (1), а именно, индексы дефекта и характер спектра.

Запишем уравнение (1) в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, используя для этого аппарат квазипроизводных [5]. Определим функции $q_n(x)\in L_{1,loc}[1,+\infty)$ так, чтобы

$$q_n^{(n)}(x)=q(x), \tag{2}$$

и введём в рассмотрение квазипроизводные, определяемые соотношениями

$$\begin{cases} z_1 = y, & z_{n+2} = \sqrt{p} z'_{n+1} - iq_n z_1, \\ z_2 = z'_1, & z_{n+3} = z'_{n+2} + iC_n^1 q_n z_2, \\ \vdots & \\ z_n = z'_{n-1}, & z_{2n} = z'_{2n-1} + i(-1)^{n-1} C_n^{n-2} q_n z_{n-1}, \\ z_{n+1} = \sqrt{p} z'_n, & z_{2n+1} = z'_{2n} + i(-1)^n C_n^{n-1} q_n z_n. \end{cases} \tag{3}$$

Тогда из уравнения (1) получим соотношение

$$z'_{2n+1} = -i\lambda z_1 - (-1)^{n+1} \frac{q_n}{\sqrt{p}} i z_{n+1}.$$

Введём вектор-столбец $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{2n+1})^{\mathrm{т}}$ и запишем уравнение (1) как систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$z' = Sz, \tag{4}$$

где $S(x,\lambda)$ — матрица Шина–Зеттла [5] вида

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & & & & \ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{p}} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \dfrac{iq_n}{\sqrt{p}} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{p}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -inq_n & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & & & & \ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & (-1)^{n-1} inq_n & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -i\lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \dfrac{(-1)^n iq_n}{\sqrt{p}} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что из соотношения (2) следует, что функция $q_n(x)$ определяется с точностью до многочлена порядка $n-1$. Однако ФСР уравнения (1) не зависит от выбора констант интегрирования, что непосредственно следует из формул (3). Условия выбора коэффициентов многочлена формулируются для каждого исследуемого случая.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть функция $p(x)$ представима как

$$\frac{1}{\sqrt{p(x)}} = 1 + h(x), \quad h(x) \in L_{1,loc}[1,\infty). \tag{5}$$

Запишем с учётом (5) систему уравнений (4) в виде

$$z' = (L_0 + h(x)L_1 + iq_n D_0 + iq_n(x)h(x)D_1)z, \tag{6}$$

где матрицы L_0, L_1, D_0, D_1 таковы, что их ненулевые элементы определяются формулами

$$(L_0)_{k,j}=1, \quad j=1+k, \ k=\overline{1,2n}, \quad (L_0)_{2n+1,1}=-i\lambda,$$
$$(L_1)_{n,n+1}=(L_1)_{n+1,n+2}=1, \quad (D_0)_{n+1,1}=(D_0)_{2n+1,n+1}=1,$$
$$(D_0)_{n+k,k}=(-1)^{k-1}C_n^{k-1}, \quad k=\overline{2,n}, \quad (D_1)_{n+1,1}=1, \quad (D_1)_{2n+1,n+1}=(-1)^n.$$

Рассмотрим далее различные случаи поведения коэффициентов исходного уравнения.

Случай 1. Определим функцию $\widetilde{h}(x)$ как

$$\widetilde{h}(x)=q_n(x)h(x). \tag{7}$$

Пусть выполняются следующие условия:

$$h(x), q_n(x)\in L_1[1,\infty), \quad \widetilde{h}(x)\in L_{1,loc}[1,\infty).$$

Эти условия выполнены, например, для функций

$$h(x)=\frac{1}{x^\gamma}, \quad \gamma>1; \quad q_n(x)=x^\alpha\sin x^\beta, \quad \alpha>0, \ \beta>\frac{\alpha+n+1}{n}.$$

Введём в рассмотрение постоянную матрицу T, которая приводит матрицу L_0 к диагональному виду. Сделаем замену

$$z=Tu, \quad T^{-1}L_0T=\Lambda,$$

где Λ — диагональная матрица, состоящая из собственных значений матрицы L_0:

$$(\Lambda)_{k,k}=\mu_k, \quad \mu_k^{2n+1}=-i\lambda, \ k=\overline{1,2n+1},$$

T — матрица, состоящая из собственных векторов матрицы L_0:

$$T=(t_1,\ldots,t_{2n+1}),$$
$$t_1=(1,\mu_1,\mu_1^2,\ldots,\mu_1^{2n})^{\text{т}}, \ \ldots, \ t_{2n+1}=(1,\mu_{2n+1},\mu_{2n+1}^2,\ldots,\mu_{2n+1}^{2n})^{\text{т}}.$$

Тогда система (6) примет вид

$$u'=(\Lambda+h(x)T^{-1}L_1T+iq_nT^{-1}D_0T+\widetilde{h}(x)T^{-1}D_1T)u. \tag{8}$$

Очевидно, что в силу наложенных условий система (8) удовлетворяет условиям леммы 1 из [6, с. 288] и является *L-диагональной*, а это означает, что можно выписать асимптотические формулы при $x\to+\infty$ для ФСР этой системы:

$$z_k(x,\lambda)=Tu_k(x,\lambda)=e^{\mu_kx}T(e_k+o(1)), \quad k=\overline{1,2n+1},$$

где e_k — единичные базисные векторы.

Случай 2. Пусть выполнены следующие условия:

$$q_n(x)\notin L_1[1,\infty), \quad q_{n+1}(x), h(x), \widetilde{h}(x)\in L_1[1,\infty), \quad \widetilde{h}(x)\in L_{1,loc}[1,\infty).$$

Они справедливы, например, для функций

$$h(x)=\frac{1}{x^\gamma}, \quad \gamma>1; \quad q(x)=x^\alpha\sin x^\beta, \quad \alpha>0, \ \frac{\alpha+n+2}{n+1}<\beta\leqslant\frac{\alpha+n+1}{n}.$$

Следуя подходу, изложенному в статье [2], сделаем замену в системе (6) по формуле

$$z = e^{iq_{n+1}(x)D_0}u \tag{9}$$

и получим

$$u' = e^{-iq_{n+1}(x)D_0}(L_0 + h(x)L_1 + i\widetilde{h}(x)D_1)e^{iq_{n+1}(x)D_0}u. \tag{10}$$

Применив тождество Кэмпбелла–Хаусдорфа, преобразуем правую часть (10) к виду

$$e^{-iq_{n+1}(x)D_0}L_0e^{iq_{n+1}(x)D_0} =$$

$$= L_0 - iq_{n+1}(x)[D_0, L_0] + \frac{i^2}{2!}q_{n+1}^2(x)[D_0, [D_0, L_0]] - \frac{i^3}{3!}q_{n+1}^3(x)[D_0, [D_0, [D_0, L_0]]] + \ldots,$$

где $[D_0, L_0] = D_0L_0 - L_0D_0$ — матричный коммутатор.

Введём обозначения $K_1 = [D_0, L_0]$, $K_2 = [D_0, [D_0, L_0]]$, $\ldots$ Заметим, что матрица D_0 нильпотентна, а значит, ненулевая последовательность матричных коммутаторов вида

$$[D_0, [D_0, \ldots, [D_0, L_0]] \ldots]$$

конечна. Последовательно вычисляя коммутаторы в правой части последнего соотношения, получаем, что $K_i = 0$, $i > 2$, а ненулевые элементы матриц K_1 и K_2 определяются соотношениями

$$(K_1)_{n,1} = -1, \quad (K_1)_{2n+1,n+2} = (-1)^n, \quad (K_1)_{n+i,i+1} = (-1)^i(C_n^{i-1} + C_n^i), \quad i = \overline{2, n},$$
$$(K_2)_{2n,1} = (-1)^n(2C_n^{n-1} - 1), \quad (K_2)_{2n+1,2} = (-1)^n(1 + 2C_n^1), \quad K_i = 0, \quad i > 2.$$

Аналогичные вычисления можно провести и для остальных слагаемых в правой части (10):

$$e^{-iq_{n+1}(x)D_0}L_1e^{iq_{n+1}(x)D_0} = h(x)L_1 - iq_{n+1}(x)[D_0, L_1] + \frac{i^2}{2!}h(x)q_{n+1}^2(x)[D_0, [D_0, L_1]] + \ldots$$

Обозначим $M_1 = [D_0, L_1]$, $M_2 = [D_0, [D_0, L_1]]$, $\ldots$, $M_k = 0$, $k > 2$. Ненулевые элементы матриц M_1 и M_2 определяются соотношениями

$$(M_1)_{n,1} = (M_1)_{2n+1,n+2} = 1, \quad (M_1)_{2,n+1} = n, \quad (M_1)_{2n,n+1} = (-1)^n n, \quad i = \overline{2, n},$$
$$(M_2)_{2n,1} = -2n, \quad (M_2)_{2n+1,2} = (-1)^{n+1}2n, \quad M_i = 0, \quad i > 2.$$

Поскольку $[D_0, D_1] = 0$, верно представление

$$e^{-iq_{n+1}(x)D_0}\widetilde{h}(x)D_1e^{iq_{n+1}(x)D_0} = \widetilde{h}(x)D_1,$$

тогда уравнение (10) можно записать в виде

$$u' = \left(L_0 + hL_1 + \widetilde{h}D_1 - iq_{n+1}K_1 + \frac{i^2}{2!}q_{n+1}^2K_2 - iq_{n+1}hM_1 + \frac{i^2}{2!}hq_{n+1}^2M_2\right)u.$$

Ввиду наложенных условий на функции $h(x)$, $q(x)$, последняя система допускает представление

$$u' = (L_0 + D(x))u,$$

где $D(x)$ — матрица с элементами из пространства $L_1[1,\infty]$:

$$D(x) = -h_1N_1 + \frac{h_1^2}{2!}N_2 - iq_nh_1P_1 + \frac{iq_nh_1^2}{2!} + i\widetilde{h}D_1 - ih_1\widetilde{h}[L_1, D_1].$$

Как и в случае 1, сделаем замену $u = Tv$ и получим

$$v' = (\Lambda + T^{-1}D(x)T)v. \tag{11}$$

Система (11) удовлетворяет условиям леммы 1 из книги [6, с. 288] и является L-диагональной, а значит, с учётом (9) можно записать асимптотические формулы при $x \to +\infty$ для её ФСР

$$z_k(x,\lambda) = e^{\mu_k x}Te^{iq_{n+1}(x)D_0}(e_k + o(1)), \quad k = \overline{1, 2n+1},$$

где e_k — единичные базисные векторы.

Случай 3. Определим функцию $h_1'(x)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$h_1'(x) = h(x). \tag{12}$$

И пусть имеют место условия

$$h(x), q_n(x) \notin L_1[1,\infty), \quad h_1(x), q_{n+1}(x), \widetilde{h}(x) \in L_1[1,\infty), \quad \widetilde{h}(x) \in L_{1,loc}[1,\infty).$$

Эти условия справедливы, например, для

$$h(x) = \frac{1}{x^\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1; \quad q(x) = x^\alpha \sin x^\beta, \quad 2 > \alpha > 0, \ \ \frac{\alpha + n + 1 - \gamma}{n} < \beta \leqslant \frac{\alpha + n + 1}{n}.$$

Как и в случае 2, сделаем замену в системе (6) по формуле

$$z = e^{h_1(x)L_1}u \tag{13}$$

и получим

$$u' = e^{-h_1(x)L_1}(L_0 + iq_nD_0 + i\widetilde{h}(x)D_1)e^{h_1(x)L_1}u. \tag{14}$$

Применив тождество Кэмпбелла–Хаусдорфа для преобразования правой части (14), будем иметь

$$e^{-h_1(x)L_1}L_0e^{h_1(x)L_1} = L_0 - h_1(x)[L_1, L_0] + \frac{h_1^2(x)}{2!}[L_1,[L_1,L_0]] - \frac{h_1^3}{3!}[L_1,[L_1,[L_1,L_0]]] + \ldots$$

Обозначим $N_1 = [L_1, L_0]$, $N_2 = [L_1,[L_1,L_0]]$. Заметим, что матрица L_1 нильпотентна, а значит, последовательность коммутаторов конечна, а именно, $N_i = 0$, $i > 2$. Ненулевые элементы N_1 и N_2 определяются соотношениями

$$(N_1)_{n-1,n+1} = 1, \quad (N_1)_{n+1,n+3} = -1, \quad (N_2)_{n-1,n+2} = (N_2)_{n,n+3} = -1.$$

Выполнив аналогичные вычисления для остальных членов в правой части (14), получим

$$e^{-h_1(x)L_1}iq_n(x)D_0e^{h_1(x)L_1} =$$

$$= iq_n(x)D_0 - iq_n(x)h_1(x)[L_1, D_0] + \frac{i}{2!}q_n(x)h_1^2(x)[L_1,[L_1,D_0]] - \frac{i}{3!}q_n(x)h_1^3(x)[L_1,[L_1,[L_1,D_0]]] + \ldots$$

Пусть $P_1=[L_1,D_0]$, $P_2=[L_1,[L_1,D_0]]$, ... Имеем

$$(P_1)_{1,n}=(P_1)_{2n+1,n+2}=1,$$

$$(P_1)_{2,n+1}=n(P_1)_{2n,n+1}=(-1)^{n-1}n,$$

$$(P_2)_{n,2}=n,(P_2)_{2n,n+2}=(-1)^{n-1}n,$$

из нильпотентности матрицы D_0 следует, что $P_k=0$, $k>2$. Далее,

$$e^{-h_1(x)L_1}i\widetilde{h}(x)D_1e^{h_1(x)L_1}=i\widetilde{h}(x)D_1-ih_1(x)\widetilde{h}(x)[L_1,D_1],$$

$$([L_1,D_1])_{n,1}=1, \quad ([L_1,D_1])_{2n+1,n}=-1.$$

Ввиду наложенных условий на функции $h(x)$, $q(x)$, система (14) может быть записана как

$$u'=(L_0+iq_n(x)D_0+D(x))u,$$

где $D(x)$ — матрица с элементами из $L_1[1,\infty)$. В отличие от случая 2, полученная система ещё не является L-диагональной. Сделаем ещё одну замену по формуле

$$u=e^{iq_{n+1}(x)D_0}v, \tag{15}$$

тогда последняя система примет вид

$$v'=e^{-iq_{n+1}(x)D_0}(L_0+iq_n(x)D_0+D(x))e^{iq_{n+1}(x)D_0}v. \tag{16}$$

Применив тождество Кэмпбелла–Хаусдорфа для преобразований правой части (16), с учётом нильпотентности D_0 и после вычисления необходимых матричных коммутаторов запишем систему (16) как

$$v'=(L_0+\widetilde{D}(x))v.$$

Здесь матрица

$$\widetilde{D}(x)=-iq_{n+1}(x)[D_0,L_0]+\frac{i^2}{2!}q_{n+1}^2[D_0,[D_0,L_0]]+e^{-q_{n+1}D_0}D(x)e^{iq_{n+1}(x)D_0}.$$

В силу условий, наложенных на функции $h(x)$ и $q(x)$, очевидно, что $\widetilde{D}(x)$ является матрицей с суммируемыми на промежутке $[1,+\infty)$ элементами.

Далее сделаем замену $v=Ts$ и получим систему

$$s'=(\Lambda+T^{-1}\widetilde{D}(x)T)s,$$

которая уже удовлетворяет условиям леммы 1 в [6, с. 288] и является L-диагональной, следовательно, принимая во внимание (13) и (15), можно выписать асимптотические формулы при $x\to+\infty$ для её ФСР:

$$z_k(x,\lambda)=e^{\mu_k x}Te^{iq_{n+1}(x)D_0}e^{h_1(x)L_1}(e_k+o(1)), \quad k=\overline{1,2n+1},$$

где e_k — единичные базисные векторы.

Объединяя случаи 1–3, получаем утверждение следующей теоремы.

Теорема. *Пусть функции* $q_n(x)$, $q_{n+1}(x)$, $h(x)$, $\widetilde{h}(x)$, $h_1(x)$ *определены формулами* (2), (5), (7), (12) *и выполнено одно из следующих условий*:

1) $h(x),q_n(x)\in L_1[1,\infty)$, $\widetilde{h}(x)\in L_{1,loc}[1,\infty)$;

2) $q_n(x)\notin L_1[1,\infty)$, $h(x), q_{n+1}(x), \widetilde{h}(x)\in L_1[1,\infty)$, $\widetilde{h}(x)\in L_{1,loc}[1,\infty)$;
3) $h(x), q_n(x)\notin L_1[1,\infty)$, $q_{n+1}(x), h_1(x), \widetilde{h}(x)\in L_1[1,\infty)$, $\widetilde{h}(x)\in L_{1,loc}[1,\infty)$.
Тогда справедливы асимптотические формулы при $x\to+\infty$ для ФСР уравнения (1):

$$y_j(x,\lambda)=e^{\mu_j x}(1+o(1)),\quad j=\overline{1,2n+1}.$$

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00225).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Валеева, Л.Н. Об одном методе исследования асимптотики решений дифференциальных уравнений Штурма–Лиувилля с быстро осциллирующими коэффициентами / Л.Н. Валеева, Э.А. Назирова, Я.Т. Султанаев // Мат. заметки. — 2022. — Т. 112, № 6. — С. 935–940.
2. Валеев, Н.Ф. О новом подходе к изучению асимптотического поведения решений сингулярных дифференциальных уравнений / Н.Ф Валеев, Э.А. Назирова, Я.Т. Султанаев // Уфимск. мат. журн. — 2015. — Т. 7, № 3. — С. 9–15.
3. Валеев, Н.Ф. Об асимптотике решений сингулярного дифференциального уравнения n-го порядка с нерегулярными коэффициентами / Н.Ф Валеев, О.В. Мякинова, Я.Т. Султанаев // Мат. заметки. — 2018. — Т. 104, № 4. — С. 626–631.
4. Rossmann, W. Lie Groups — an Introduction Through Linear Groups / W. Rossmann. — Oxford : Oxford University Press, 2006. — 265 p.
5. Everitt, W.N. Boundary value problem and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators / W.N. Everitt, L. Marcus. — Providence : Amer. Math. Soc., 1999. — 187 p.
6. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1969. — 526 с.

ON THE ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF ODD ORDER

© 2025 / Ya. T. Sultanaev[1], B. I. Mardanov[2], E. A. Nazirova[3]

[1]Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Russia
[1,2]Akmulla Bashkir State Pedagogical University, Ufa, Russia
[3]Ufa University of Science and Technology, Russia
e-mail: [1]sultanaevyt@gmail.com, [2]mardanov_bulat@list.ru, [3]ellkid@gmail.com

The asymptotic behavior for large values of the independent variable of the fundamental system of solutions of linear differential equations generated by a symmetric two-term differential expression of arbitrary odd order is investigated, depending on the coefficients of the highest derivative and the free term.

Keywords: asymptotics, quasi-derivative, L-diagonal system

FUNDING

This work was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00225).

REFERENCES

1. Valeeva, L.N., Nazirova, E.A., and Sultanaev, Ya.T., On a method for studying the asymptotics of solutions of Sturm–Liouville differential equations with rapidly oscillating coefficients, *Math. Notes*, 2022, vol. 112, no. 6, pp. 1059–1064.
2. Valeev, N.F., Nazirova, E.A., and Sultanaev, Ya.T., On a new approach for studying asymptotic behavior of solutions to singular differential equations, *Ufa Math. J.*, 2015, vol. 7, no. 3, pp. 9–14.
3. Valeev, N.F., Myakinova, O.V., and Sultanaev, Ya.T., On the asymptotics of solutions of a singular nth-order differential equation with nonregular coefficients, *Math. Notes*, 2018, vol. 104, no. 4, pp. 606–611.
4. Rossmann, W., *Lie Groups — an Introduction Through Linear Groups*, Oxford: Oxford University Press, 2006.
5. Everitt, W.N. and Marcus, L., *Boundary Value Problem and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-Differential Operators*, Providence: Amer. Math. Soc., 1999.
6. Naimark, M.A., *Lineynyye differentsial'nyye operatory* (Linear Differential Operators), Moscow: Nauka, 1969.