ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 2, с. 207–220

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.5

О СПЕКТРАХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ ДВУМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ И СИСТЕМЫ ЕЁ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

© 2025 г. А. Х. Сташ

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

e-mail: aidamir.stash@gmail.com

Поступила в редакцию 20.06.2024 г., после доработки 04.11.2024 г.; принята к публикации 28.11.2024 г.

Изучены множества значений (спектры) показателей колеблемости строгих знаков, нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней решений дифференциальных систем. Построены двумерные нелинейные системы, у которых все решения бесконечно продолжимы вправо, и любой из спектров их показателей колеблемости может совпадать как с отрезком $[0,1]$, так и с любым наперёд заданным непустым подмножеством рациональных чисел этого отрезка, в то время как спектры линейных систем их первого приближения состоят только из одного элемента. Более того, спектры показателей исходной системы совпадают с соответствующими спектрами показателей колеблемости сужения построенных нелинейных двумерных систем на прямое произведение любой открытой окрестности нуля фазовой плоскости и временно́й полуоси. Доказано существование нелинейной системы, спектр любого из рассматриваемых показателей колеблемости которой совпадает с произвольным заранее заданным интервалом отрезка $[0,1]$, а соответствующие спектры системы её первого приближения состоят из одного неотрицательного числа.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, линейная система, нелинейная система, колеблемость, число нулей, показатели колеблемости, показатель Ляпунова

DOI: 10.31857/S0374064125020063, EDN: HWUPXA

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для изучения колебательных свойств движения И.Н. Сергеевым были введены сначала понятия *характеристические частоты* [1], а затем *показатели колеблемости* [2–4].

Все перечисленные показатели, как и *линейные* (см. [5]), оказались применимыми лишь к решениям, гарантированно определённым на всей положительной полуоси времени, что затрудняет их вычисление для нелинейных систем, где такой гарантии дать нельзя. В работе [5] предпринята первая попытка распространить определения этих показателей на случай несуществования решений системы на всей полуоси, а именно, определены и изучены *сферические*, *радиальные* и *шаровые* функционалы и показатели. В [6] перечислены различные реализуемые соотношения между линейными, сферическими, радиальными и шаровыми разновидностями этих показателей, а также их взаимосвязи с аналогичными показателями системы первого приближения, в частности, одноэлементные спектры линейных показателей колеблемости гиперкорней двумерной нелинейной системы и системы её первого приближения могут быть совершенно произвольными.

Настоящая статья продолжает исследования, начатые в работе [7], в которой было доказано существование нелинейной системы со счётными спектрами линейных показателей колеблемости, в то время как спектры соответствующей линейной системы её первого приближения состоят ровно из одного неотрицательного числа.

Все асимптотические характеристики колеблемости, введённые И.Н. Сергеевым, для решений линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка равны нулю, а на множестве решений двумерных систем, отвечающих линейным уравнениям второго порядка, все верхние (как и все нижние) характеристики колеблемости равны между собой и их спектры (т.е. множества значений на ненулевых решениях) состоят из одного числа [1, 2].

В работах [2, 8, 9] полностью описаны спектры всех показателей колеблемости автономных систем. Спектры показателей колеблемости отдельных классов нестационарных систем исследованы в статьях [10–14].

В 1930 г. О. Перрон показал [15], что отрицательность старшего характеристического показателя системы первого приближения не всегда влечёт за собой устойчивость нулевого решения исходной системы. Более того, в сколь угодно малой окрестности нуля могут существовать решения исходной системы с положительным характеристическим показателем. В 2003 г. Г.А. Леонов открыл антиперроновский эффект смены знака характеристических показателей: решение системы первого приближения имеет положительный характеристический показатель, а решение исходной системы с теми же начальными данными — отрицательный показатель [16]. Различные модификации контрпримера Перрона изучались многими математиками (см., например, [17–19]). В работе [17] доказано существование двумерной нелинейной дифференциальной системы с континуальным спектром показателей Ляпунова и линейным приближением, имеющим произвольно заданные отрицательные характеристические показатели.

В связи с этим возникает вопрос: насколько произвольными могут быть спектры показателей колеблемости нелинейной системы с фиксированными спектрами системы её первого приближения?

2. БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сначала дадим основные определения.

Определение 1 [1]. Скажем, что в точке $t>0$ происходит *строгая* (*нестрогая*) *смена знака* функции $y\in C^1(\mathbb{R}_+)$, если в любой проколотой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

Определение 2 [1–4]. Для вектора $m\in\mathbb{R}^n_*\equiv\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ и вектор-функции $x\in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n_*)$, $n\in\mathbb{N}$, обозначим:

$\nu^-(x,m,t)$ — число точек *строгой смены знака* скалярного произведения $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

$\nu^\sim(x,m,t)$ — число точек *нестрогой смены знака* функции $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

$\nu^0(x,m,t)$ — число *нулей* функции $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

$\nu^+(x,m,t)$ — число *корней* (т.е. нулей с учётом их кратности) функции $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

$\nu^*(x,m,t)$ — число *гиперкорней* функции $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(0,t]$, где в процессе подсчёта этого количества каждый некратный корень считается ровно один раз, а кратный — бесконечно много раз независимо от его фактической кратности.

Определение 3 [2–4]. *Верхние* и *нижние сильный* и *слабый показатели колеблемости строгих знаков, нестрогих знаков, нулей, корней* и *гиперкорней* функции $x\in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n_*)$ зададим равенствами

$$\hat\nu^\alpha_\bullet(x)\equiv\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t),$$

$$\check\nu^\alpha_\bullet(x)\equiv\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\varliminf_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t),$$

$$\hat\nu^\alpha_\circ(x)\equiv\varlimsup_{t\to+\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t),$$

$$\check\nu^\alpha_\circ(x)\equiv\varliminf_{t\to+\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)$$

при $\alpha=-,\sim,0,+,*$ соответственно.

К определению 3 при любом $\alpha=-,\sim,0,+,*$ добавим ещё обозначения

$$\nu^\alpha(x,m,s,t)\equiv\nu^\alpha(x,m,t)-\nu^\alpha(x,m,s),\quad x\in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n_*),\ m\in\mathbb{R}^n_*,\ 0\leqslant s<t.$$

Определение 4 [4]. Для функции $x\in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n_*)$ условимся о следующем:

1) если значение некоторого верхнего (со знаком $\hat{}$) показателя колеблемости совпадает со значением одноимённого нижнего (со знаком $\check{}$) показателя, то будем называть это значение *точным*, записывая его без знаков $\hat{}$ и $\check{}$;

2) если значение некоторого слабого (со знаком $\circ$) показателя колеблемости совпадает со значением одноимённого сильного (со знаком $\bullet$) показателя, то будем называть это значение *абсолютным*, записывая его без знаков вообще.

Замечание 1. Для любой функции $x\in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n_*)$ справедливы неравенства

$$\check\nu^-_\circ(x)\leqslant\check\nu^\sim_\circ(x)\leqslant\check\nu^0_\circ(x)\leqslant\check\nu^+_\circ(x)\leqslant\check\nu^*_\circ(x),$$

$$\check\nu^-_\bullet(x)\leqslant\check\nu^\sim_\bullet(x)\leqslant\check\nu^0_\bullet(x)\leqslant\check\nu^+_\bullet(x)\leqslant\check\nu^*_\bullet(x);$$

$$\hat\nu^-_\circ(x)\leqslant\hat\nu^\sim_\circ(x)\leqslant\hat\nu^0_\circ(x)\leqslant\hat\nu^+_\circ(x)\leqslant\hat\nu^*_\circ(x),$$

$$\hat\nu^-_\bullet(x)\leqslant\hat\nu^\sim_\bullet(x)\leqslant\hat\nu^0_\bullet(x)\leqslant\hat\nu^+_\bullet(x)\leqslant\hat\nu^*_\bullet(x);$$

$$\hat\nu^\alpha_\circ(x)\leqslant\hat\nu^\alpha_\bullet(x),\quad \check\nu^\alpha_\circ(x)\leqslant\check\nu^\alpha_\bullet(x),\quad \alpha=-,\sim,0,+,*.$$

Для заданного натурального числа $n>1$ и заданной открытой окрестности G точки 0 в евклидовом (векторном) фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим дифференциальную, вообще говоря, нелинейную, систему вида

$$\dot x=f(t,x),\quad f(t,0)=0,\quad x\in G,\ t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,+\infty),\ f,f'_x\in C(\mathbb{R}_+\times G),\tag{1}$$

обеспечивающую наличие нулевого решения, а также существование и единственность решений задач Коши. С системой (1) свяжем линейную *систему её первого приближения*

$$\dot x=A(t)x\equiv f_\prime(t,x),\quad A(t)=f'_x(t,0),\quad t\in\mathbb{R}_+,\ x\in\mathbb{R}^n,$$

при условии

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|f(t,x)-f_\prime(t,x)|=o(x),\quad x\to0.$$

Через $\mathcal{S}_*(f)$ будем обозначать множество всех непродолжаемых ненулевых решений системы (1), а через $x_f(\cdot, x_0)$ — то из них, которое удовлетворяет начальному условию $x_f(0, x_0) = x_0$; через G_γ и G_{γ_1,γ_2} — множества всех значений $x_0 \in G$, удовлетворяющих условию $|x_0| = \gamma$ и условию $\gamma_1 < |x_0| < \gamma_2$ соответственно.

Отсутствие непосредственной взаимосвязи между мощностями спектров всех показателей колеблемости двумерной нелинейной системы, все нетривиальные решения которой бесконечно продолжимы вправо, и системы её первого приближения демонстрируют следующие две теоремы.

Теорема 1. *Для любого непустого подмножества $X \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}$ существуют две системы*:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t,x) \equiv f(t,x), \tag{2}$$

$$\dot{x} = A(t)x \equiv f_\prime(t,x), \tag{3}$$

где $A(t) = f'_x(t,0)$, $|B(t,x)| \leqslant |x|^2$, $f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}_+$, с устойчивым по Ляпунову нулевым решением, обладающие свойствами

$$\nu^\alpha(\mathcal{S}_*(f_\prime)) = \begin{cases} \{0\}, & \alpha = -, \sim, \\ \{1\}, & \alpha = 0, +, *, \end{cases} \tag{4}$$

$$\nu^\alpha(\mathcal{S}_*(f)) = \begin{cases} X \cup \{0\}, & \alpha = -, \sim, \\ X \cup \{1\}, & \alpha = 0, +, *, \end{cases} \tag{5}$$

причём для каждого значения $\alpha = -, \sim, 0, +, *$ при любом $\varepsilon > 0$ выполнено равенство

$$\{\nu^\alpha(x_f(\cdot, x_0)) \colon x_0 \in G_{0,\varepsilon}\} = \nu^\alpha(\mathcal{S}_*(f)). \tag{6}$$

Теорема 2. *Для любого интервала $X \subset [0,1]$ или $X = [0,1]$ существуют две системы вида (2) и (3) с устойчивым по Ляпунову нулевым решением, спектры показателей колеблемости которых обладают соответственно свойствами (4) и (5), причём при $X = [0,1]$ для каждого значения $\alpha = -, \sim, 0, +, *$ при любом $\varepsilon > 0$ множество $\{\nu^\alpha(x_f(\cdot, x_0)) \colon x_0 \in G_{0,\varepsilon}\}$ имеет мощность континуума.*

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФАКТЫ

Для произвольной вектор-функции $z \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2_*)$ однозначно определим функцию $\phi_z \in C^1(\mathbb{R}_+)$ соотношениями

$$\phi_z(0) \in [0, 2\pi), \quad |z(t)|(\cos\phi_z(t), \sin\phi_z(t))^{\mathrm{T}} = z(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Для любого угла $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ обозначим через $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ множества, состоящие из вектор-функций $u \in C^1([0, 2\pi], \mathbb{R}^2_*)$, удовлетворяющих условиям:

1) $\phi(0) = \varphi_0$, где $\phi = \phi_u$;

2) функция ϕ нестрого возрастает на отрезке $[0, \pi]$ (при возрастании $t \in [0, \pi]$ вектор $u(t)$ движется против часовой стрелки относительно начала координат);

3) при каждом $t \in (0, \pi]$ верно равенство $\phi(\pi + t) = \phi(\pi - t)$;

4) для $u \in \mathcal{A}_0$ при некотором $\delta \in (0, \pi/2)$ выполнено равенство $\phi(\pi) - \varphi_0 = \pi - \delta$;

5) для $u \in \mathcal{A}_1$ выполнены неравенства $\pi < \phi(\pi) - \varphi_0 < 3\pi/2$.

Определение 5 [20]. Последовательность дробных долей (θ_i) называется *равномерно распределённой по модулю* 1, если для каждого полуинтервала $[a,b)\subset[0,1)$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\chi_{[a,b)}(\theta_i)=b-a,$$

где $\chi_{[a,b)}$ — характеристическая функция промежутка $[a,b)$.

Замечание 2. Последовательность $\theta_i=\{i\pi\}$, $i\in\mathbb{N}$, где $\{\cdot\}$ — дробная часть числа, является равномерно распределённой по модулю 1 (см. [20]), причём на месте числа π может стоять любое иррациональное число.

Для любой функции $z\in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^2_*)$ и любого номера $i\in\mathbb{N}$ определим функцию $z^i\in\in C^1([0,2\pi],\mathbb{R}^2_*)$ с помощью равенства

$$z^i(t)\equiv z(2\pi(i-1)+t),\quad t\in[0,2\pi].$$

Лемма. *Для некоторой линейной системы* (3) *с условиями* (4) *при любых* $q\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$ *и* $0<\gamma_1<\gamma_2\leqslant 1$ *найдётся возмущённая система вида* (2), *обладающая свойствами*

$$\{\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0))\colon x_0\in G_{\gamma_1}\cup G_{\gamma_2}\}=\begin{cases}\{0\}, & \alpha=-,\sim,\\ \{1\}, & \alpha=0,+,*,\end{cases}\tag{7}$$

$$\{\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0))\colon x_0\in G_{\gamma_1,\gamma_2}\}=\{q\},\quad \alpha=-,\sim,0,+,*.\tag{8}$$

Доказательство. 1. Рассмотрим линейную периодическую систему (3), записанную в фиксированном базисе в $\mathbb{R}^2$ в виде

$$\dot x=\zeta(t)Ix\equiv f_\prime(t,x),\quad \zeta(t)\equiv\frac{\pi}{2}\sin t,\quad I\equiv\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.\tag{9}$$

Она задаёт вращение фазовой плоскости вокруг точки $x=0$ с мгновенной угловой скоростью $\zeta(t)$ в каждый момент $t\in\mathbb{R}_+$, в результате чего ориентированный угол поворота любого начального вектора $x_0\in\mathbb{R}^2_*$ за время t равен

$$\Theta(x_{f_\prime}(\cdot,x_0),t)=\frac{\pi}{2}(1-\cos t)\in[0,\pi],$$

а значит, справедливы равенства

$$x_{f_\prime}(t_k,x_0)=(-1)^{k-1}x_{f_\prime}(t_1,x_0),\quad t_k\equiv\pi(k-1),\ \ k\in\mathbb{N}.$$

На каждом промежутке $(t_k,t_{k+1}]$, $k\in\mathbb{N}$, решение $x_{f_\prime}(\cdot,x_0)$, совершая поворот на угол π, будет ортогонально в одной точке заданному ненулевому вектору. Принимая во внимание, что угол между векторами $x_{f_\prime}(t,x_0)$ и $m_0=x_{f_\prime}(\pi/2,x_0)$ заключён в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$ и функция $\dot x_{f_\prime}(\cdot,x_0)$ обнуляется только в точках t_k, приходим к отсутствию нестрогих смен знака у скалярной функции $\langle x_{f_\prime}(\cdot,x_0),m_0\rangle$. Следовательно, при любом $t\in\mathbb{R}_+$ выполнено

$$\nu^-(x_{f_\prime}(\cdot,x_0),m_0,t)=\nu^\sim(x_{f_\prime}(\cdot,x_0),m_0,t)=0,$$

откуда следует свойство

$$\nu^-(\mathcal{S}_*(f_\prime))=\nu^\sim(\mathcal{S}_*(f_\prime))=\{0\}.$$

Для любого вектора m, неколлинеарного вектору m_0, функция $\langle x_{f_\prime}(\cdot,x_0),m\rangle$ не имеет кратных нулей и на каждом промежутке $(t_k,t_{k+1}]$ длины π имеет один нуль, а значит, выполняется свойство

$$\nu^0(\mathcal{S}_*(f_\prime))=\nu^+(\mathcal{S}_*(f_\prime))=\nu^*(\mathcal{S}_*(f_\prime))=\{1\}.$$

2. На отрезке $r\in[0,3]$ при любых значениях параметров $0\leqslant\gamma_1<\gamma_2\leqslant 3$ зададим функции

$$\delta(r,\gamma_1,\gamma_2)=\frac{r^2(r-\gamma_1)^2(r-\gamma_2)^2}{(r+\gamma_1)^2(r^2+100)^2},$$

$$\psi_\pm(r,\gamma_1,\gamma_2)\equiv 1\pm\frac{\delta(r,\gamma_1,\gamma_2)}{\pi}\in(0,3/2).$$

Для нелинейной периодической системы $\dot x=\psi_-(|x|,\gamma_1,\gamma_2)f_\prime(t,x)\equiv g(t,x)$ при любом $t\in\mathbb{R}_+$ имеем

$$\Theta(x_g(\cdot,x_0),t)=\frac{\pi}{2}\psi_-(|x_0|,\gamma_1,\gamma_2)(1-\cos t)\in[0,\pi-\delta(|x_0|,\gamma_1,\gamma_2)]\subset[0,\pi),\quad \gamma_1<|x_0|<\gamma_2.$$

Скалярное произведение решения $x_g(t,x_0)=|x_0|(\cos\varphi_g(t),\sin\varphi_g(t))^{\mathrm{T}}$, совершающего поворот менее чем на π, и вектора $m_g=(\cos\psi_g,\sin\psi_g)^{\mathrm{T}}$, где $\psi_g=\varphi_g(0)+\pi/2-\delta(|x_0|,\gamma_1,\gamma_2)/2$, отлично от нуля. Поэтому для значения $q=0$ выберем нелинейную систему

$$f(t,x)\equiv\begin{cases}f_\prime(t,x), & 0<|x|\leqslant\gamma_1 \text{ или } |x|\geqslant\gamma_2,\ t\in\mathbb{R}_+,\\ \psi_-(|x|,\gamma_1,\gamma_2)f_\prime(t,x), & \gamma_1<|x|<\gamma_2,\ t\in\mathbb{R}_+.\end{cases}$$

3. Для нелинейной периодической системы $\dot x=\psi_+(|x|,\gamma_1,\gamma_2)f_\prime(t,x)\equiv h(t,x)$ будем иметь

$$\{\Theta(x_h(\cdot,x_0),t)\colon t\in\mathbb{R}_+\}\supset[0,\pi+\delta(|x_0|,\gamma_1,\gamma_2)]\supset[0,\pi],\quad \gamma_1<|x_0|<\gamma_2.$$

На каждом промежутке $(t_k,t_{k+1}]$, $k\in\mathbb{N}$, решение $x_h(t,x_0)=|x_0|(\cos\varphi_h(t),\sin\varphi_h(t))^{\mathrm{T}}$, совершая поворот не менее чем на π (но менее чем на $3\pi/2$), будет ортогонально в одной или двух точках наперёд заданному ненулевому вектору. Следовательно, для вектора $m_h=(\cos\psi_h,\sin\psi_h)^{\mathrm{T}}$, где $\psi_h=\varphi_h(0)+\pi/2-\delta(|x_0|,\gamma_1,\gamma_2)/2$, выполнены соотношения

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^2_*}\nu^\alpha(x_h(\cdot,x_0),m,t_k,t_{k+1})=\nu^\alpha(x_h(\cdot,x_0),m_h,t_k,t_{k+1})=1,\quad k\in\mathbb{N},\ \ \alpha=-,\sim,0,+,*,$$

на основании которых будем иметь

$$\check\nu^\alpha_\circ(x_h(\cdot,x_0))=\varliminf_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\nu^\alpha(x_h(\cdot,x_0),m,t)=$$

$$=\varliminf_{k\to+\infty}\frac{\pi}{t_k}\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\sum_{i=2}^{k}\nu^\alpha(x_h(\cdot,x_0),m,t_{i-1},t_i)=$$

$$=\varliminf_{k\to+\infty}\frac{\pi}{t_k}\sum_{i=2}^{k}\nu^\alpha(x_h(\cdot,x_0),m_h,t_{i-1},t_i)=\varliminf_{k\to+\infty}\frac{\pi(k-1)}{\pi(k-1)}=1,$$

$$\hat\nu^\alpha_\bullet(x_h(\cdot,x_0))=\inf_{m\in\mathbb{R}^2_*}\varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\pi}{t_k}\nu^\alpha(x_h(\cdot,x_0),m,t_k)\leqslant\varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\pi}{t_k}\nu^\alpha(x_h(\cdot,x_0),m_h,t_k)=1.$$

Таким образом, с учётом замечания 1 для значения $q=1$ выберем систему

$$f(t,x)\equiv\begin{cases}f_\prime(t,x), & 0<|x|\leqslant\gamma_1 \text{ или } |x|\geqslant\gamma_2,\ t\in\mathbb{R}_+,\\ \psi_+(|x|,\gamma_1,\gamma_2)f_\prime(t,x), & \gamma_1<|x|<\gamma_2,\ t\in\mathbb{R}_+.\end{cases}$$

4. Теперь убедимся в том, что значению $q=l_1/(l_1+l_2)$, $l_1,l_2\in\mathbb{N}$, соответствует система

$$f(t,x)\equiv\begin{cases}f_\prime(t,x), & 0<|x|\leqslant\gamma_1 \text{ или } |x|\geqslant\gamma_2,\ t\in\mathbb{R}_+,\\ \psi_+(|x|,\gamma_1,\gamma_2)f_\prime(t,x), & \gamma_1<|x|<\gamma_2,\ t\in[0,2\pi l_1],\\ \psi_-(|x|,\gamma_1,\gamma_2)f_\prime(t,x), & \gamma_1<|x|<\gamma_2,\ t\in[2\pi l_1,2\pi(l_1+l_2)],\end{cases}$$

где в кольце $\gamma_1<|x|<\gamma_2$ функция $f(t,x)$ периодически (с периодом $T=2\pi(l_1+l_2)$) продолжается на всю полуось $\mathbb{R}_+$. Действительно, при любом $x_0\in G_{\gamma_1,\gamma_2}$ для решения $x_f(t,x_0)=$ $=|x_0|(\cos\varphi_f(t),\sin\varphi_f(t))^{\mathrm{т}}$ найдётся такой вектор $m_f=(\cos\psi_f,\sin\psi_f)^{\mathrm{т}}$, где $\psi_f=\varphi_f(0)+\pi/2-$ $-\delta(|x_0|,\gamma_1,\gamma_2)/2$, что при всех $k\in\mathbb{N}$ и $\alpha=-,\sim,0,+,*$ выполнены соотношения

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^2_*}\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0),m,(k-1)T,kT)=\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0),m_f,(k-1)T,kT)=2l_1.$$

Справедливость равенств (8) гарантируют следующие соотношения (см. замечание 1):

$$\check{\nu}^\alpha_\circ(x_f(\cdot,x_0))=\varliminf_{t\to+\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}^2_*}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0),m,t)=$$

$$=\varliminf_{p\to+\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}^2_*}\frac{\pi}{pT}\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0),m,pT)=$$

$$=\varliminf_{p\to+\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}^2_*}\frac{\pi}{pT}\sum_{i=1}^{p}\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0),m,(i-1)T,iT)=$$

$$=\varliminf_{p\to+\infty}\frac{\pi}{pT}\sum_{i=1}^{p}\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0),m_f,(i-1)T,iT)=$$

$$=\varliminf_{p\to+\infty}\frac{\pi}{2p\pi(l_1+l_2)}\sum_{i=1}^{p}2l_1=\varliminf_{p\to+\infty}\frac{2p\pi l_1}{2p\pi(l_1+l_2)}=\frac{l_1}{l_1+l_2},$$

$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet(x_f(\cdot,x_0))=\inf_{m\in\mathbb{R}^2_*}\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0),m,t)\leqslant$$

$$\leqslant\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0),m_f,t)=\varlimsup_{p\to+\infty}\frac{\pi}{pT}\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0),m_f,pT)=$$

$$=\varlimsup_{p\to+\infty}\frac{\pi}{pT}\sum_{i=1}^{p}\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0),m_f,(i-1)T,iT)=\frac{l_1}{l_1+l_2}.$$

Лемма доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 1. 1. Пусть задано бесконечное подмножество $X\subset[0,1]\cap\mathbb{Q}$.

Занумеровав все рациональные числа из отрезка $[0,1]$ натуральными числами, определим последовательность s_p, $p\in\mathbb{N}$, и образуем по ней следующую последовательность:

$$s_1;s_1,s_2;s_1,s_2,s_3;\ldots;s_1,s_2,s_3,\ldots,s_k;\ldots,$$

которую обозначим через q_p, $p\in\mathbb{N}$.

Множество $0<|x|<1$ разобьём на счётное число колец вида

$$\gamma_{k+1}<|x|<\gamma_k, \quad \gamma_k=2^{1-k}, \ k\in\mathbb{N}. \tag{10}$$

Далее выберем линейную систему (9) и на основании леммы модифицируем её в каждом кольце (10) так, чтобы при любом $k\in\mathbb{N}$ выполнялись равенства

$$\{\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0))\colon x_0\in G_{\gamma_{k+1},\gamma_k}\}=\{q_k\}, \quad \alpha=-,\sim,0,+,*.$$

В кольце $1\leqslant|x|<+\infty$ и на каждой окружности $|x|=\gamma_k$, $k\in\mathbb{N}$, линейную систему (9) оставляем без изменения, поэтому

$$\{\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0))\colon x_0\in G_{\gamma_k}\cup G_{1,+\infty}\}=\{0\}, \quad \alpha=-,\sim,$$
$$\{\nu^\alpha(x_f(\cdot,x_0))\colon x_0\in G_{\gamma_k}\cup G_{1,+\infty}\}=\{1\}, \quad \alpha=0,+,*.$$

Таким образом, установили справедливость равенств (5) и из условия $\gamma_k\to 0$ при $k\to+\infty$ следует равенство (6) при любых $\varepsilon>0$ и $\alpha=-,\sim,0,+,*$.

2. Пусть задано непустое конечное подмножество $X=\{s_1,s_2,\ldots,s_N\}\subset[0,1]\cap\mathbb{Q}$.

Сначала определим первые $T=(N^2+N)/2$ членов последовательности q_p $(p\in\mathbb{N})$:

$$q_1=s_1, \quad q_2=s_1, \quad q_3=s_2, \quad q_4=s_1, \quad q_5=s_2, \quad q_6=s_3, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad q_{T-N+1}=s_1, \quad q_{T-N+2}=s_2, \quad q_{T-N+3}=s_3, \quad \ldots, \quad q_T=s_N,$$

а последующие члены — с помощью условия периодичности $q_{i+T}=q_i$, $i\in\mathbb{N}$. Далее повторяются рассуждения из п. 1 настоящего доказательства.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. 1. Сначала рассмотрим случай $X=[0,1]$.

1.1. Определим вектор-функцию с помощью равенств

$$f(t,x)\equiv\begin{cases}\psi_-(|x|,0,\theta_i)f_\prime(t,x), & 0\leqslant|x|\leqslant\theta_i, \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_+(|x|,\theta_i,1)f_\prime(t,x), & \theta_i<|x|\leqslant 1, \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_-(|x|,1,2)f_\prime(t,x), & 1<|x|\leqslant 2, \ t\in\mathbb{R}_+,\\ \psi_+(|x|,2,3)f_\prime(t,x), & 2<|x|<3, \ t\in\mathbb{R}_+,\\ f_\prime(t,x), & |x|\geqslant 3, \ t\in\mathbb{R}_+,\end{cases} \tag{11}$$

где $\theta_i=\{ie\}$, $\tau_i=2\pi(i-1)$, $i\in\mathbb{N}$.

Каждому начальному значению $x_0\in\mathbb{R}^2_*$ поставим в соответствие единственное число $\theta>0$ по правилу $|x_0|=\theta$. Тогда из (11) при $0<|x_0|<1$ следует, что для каждого $\theta\in(0,1)$ выполнено включение

$$x^i_f(\cdot,x_0)\in\begin{cases}\mathcal{A}_1, & \theta_i\in(0,\theta),\\ \mathcal{A}_0, & \theta_i\in(\theta,1),\end{cases} \quad i\in\mathbb{N}. \tag{12}$$

1.2. Для каждого значения $x_0 \in \mathbb{R}^2_*$, лежащего в кольце $2 < |x_0| < 3$, выполнено (см. (11)) включение $x^i_f(\cdot, x_0) \in \mathcal{A}_1$, $i \in \mathbb{N}$, а значит, справедлива цепочка равенств

$$\check{\nu}^\alpha_\bullet(x_f(\cdot, x_0)) = \hat{\nu}^\alpha_\bullet(x_f(\cdot, x_0)) = \check{\nu}^\alpha_\circ(x_f(\cdot, x_0)) = \hat{\nu}^\alpha_\circ(x_f(\cdot, x_0)) = 1, \quad \alpha = -, \sim, 0, +, *.$$

Для каждого значения $x_0 \in \mathbb{R}^2_*$, лежащего в кольце $1 < |x_0| < 2$, выполнено (см. (11)) включение $x^i_f(\cdot, x_0) \in \mathcal{A}_0$, $i \in \mathbb{N}$, а значит, справедливы соотношения

$$\check{\nu}^\alpha_\bullet(x_f(\cdot, x_0)) = \hat{\nu}^\alpha_\bullet(x_f(\cdot, x_0)) = \check{\nu}^\alpha_\circ(x_f(\cdot, x_0)) = \hat{\nu}^\alpha_\circ(x_f(\cdot, x_0)) = 0, \quad \alpha = -, \sim, 0, +, *.$$

1.3. Покажем, что при любом $\theta \in (0, 1)$ для всех соответствующих решений $x_f = x_f(\cdot, x_0)$ выполняются равенства

$$\check{\nu}^\alpha_\bullet(x_f) = \hat{\nu}^\alpha_\bullet(x_f) = \check{\nu}^\alpha_\circ(x_f) = \hat{\nu}^\alpha_\circ(x_f) = \theta, \quad \alpha = -, \sim, 0, +, *. \tag{13}$$

1.3.1. Для всех $u \in \mathcal{A}_1$ и любого $m \in \mathbb{R}^2_*$ при каждом $\alpha = -, \sim, 0, +, *$ верна (см. п. 3 доказательства леммы) оценка $\nu^\alpha(u, m, 2\pi) \geqslant 2$. Поэтому для любого момента времени $t > 0$ на основании соотношений (12) будем иметь

$$\nu^\alpha(x_f, m, t) \geqslant \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \nu^\alpha(x^i_f, m, 2\pi) \geqslant 2 \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(0,\theta)}(\theta_i),$$

откуда, используя замечание 2, выведем оценку снизу

$$\check{\nu}^\alpha_\circ(x_f) = \varliminf_{t \to +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}^2_*} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x_f, m, t) \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{t \to +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}^2_*} \frac{2\pi}{t} \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(0,\theta)}(\theta_i) = \varliminf_{t \to +\infty} \frac{2\pi}{t} \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(0,\theta)}(\theta_i) =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{2\pi[t/2\pi]}{t} \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{[t/2\pi]} \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(0,\theta)}(\theta_i) = \theta.$$

1.3.2. Для всех функций x^i_f, $i \in \mathbb{N}$, найдётся (см. пп. 2 и 3 доказательства леммы) такой вектор $m' \in \mathbb{R}^2_*$, что при любом $\alpha = -, \sim, 0, +, *$ верно соответствующее равенство

$$\nu^\alpha(x^i_f, m', 2\pi) = \begin{cases} 0, & x^i_f \in \mathcal{A}_0, \\ 2, & x^i_f \in \mathcal{A}_1. \end{cases}$$

Опираясь на соотношения (12), для любого $t > 0$ получим представление

$$\nu^\alpha(x_f, m', t) = 2 \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(0,\theta)}(\theta_i) + \nu^\alpha\left(x^{[t/2\pi]+1}_f, m', \left\{\frac{t}{2\pi}\right\} 2\pi\right),$$

а затем, снова использовав замечание 2, вычислим предел

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x_f, m', t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{2\pi}{t} \sum_{i=1}^{[t/2\pi]} \chi_{(0,\theta)}(\theta_i) = \theta, \quad \alpha = -, \sim, 0, +, *.$$

Из оценки снизу для нижних показателей колеблемости и последнего равенства получим цепочку соотношений

$$\theta \leqslant \check{\nu}^{\alpha}_{\circ}(x_f) \leqslant \hat{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(x_f) = \inf_{m\in\mathbb{R}^2_*} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(x_f,m,t) \leqslant \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(x_f,m',t) = \theta,$$

в которой все нестрогие неравенства являются равенствами (см. замечание 1). Тем самым справедливость цепочки равенств (13) установлена, а значит, равенства (5) также выполняются, и при любых $\alpha = -, \sim, 0, +, *$ и $\varepsilon > 0$ множество $\{\nu^{\alpha}(x_f(\cdot,x_0)) : x_0 \in G_{0,\varepsilon}\}$ имеет мощность континуума.

2. Теперь фиксируем произвольный интервал $(a,b)\subset[0,1]$.

2.1. Если $0=a<b<1$, то выбираем систему $\dot{x}=f(t,x)$ с правой частью

$$f(t,x)\equiv\begin{cases} \psi_-(|x|,0,\theta_i)f_{\prime}(t,x), & 0\leqslant|x|\leqslant\theta_i<b,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_+(|x|,\theta_i,b)f_{\prime}(t,x), & \theta_i<|x|\leqslant b,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_-(|x|,0,b)f_{\prime}(t,x), & 0\leqslant|x|<b\leqslant\theta_i,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_-(|x|,b,\theta_i)f_{\prime}(t,x), & b<|x|\leqslant\theta_i,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_-(|x|,\theta_i,1)f_{\prime}(t,x), & b<\theta_i<|x|<1,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_+(|x|,b,1)f_{\prime}(t,x), & \theta_i<b<|x|<1,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ f_{\prime}(t,x), & |x|\geqslant1,\ \ t\in\mathbb{R}_+, \end{cases}\qquad i\in\mathbb{N}.$$

Для решений $x_f(\cdot,x_0)$ этой системы при каждом $\theta\in(0,b)$ выполнено включение

$$x^i_f(\cdot,x_0)\in\begin{cases}\mathcal{A}_1, & \theta_i\in(0,\theta),\\ \mathcal{A}_0, & \theta_i\in(\theta,b)\cup(b,1),\end{cases}\qquad i\in\mathbb{N}.$$

2.2. Если $0<a<b=1$, то выбираем систему $\dot{x}=f(t,x)$ с правой частью

$$f(t,x)\equiv\begin{cases} \psi_+(|x|,0,\theta_i)f_{\prime}(t,x), & 0\leqslant|x|\leqslant\theta_i<a,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_+(|x|,\theta_i,a)f_{\prime}(t,x), & \theta_i<|x|\leqslant a,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_-(|x|,0,a)f_{\prime}(t,x), & 0\leqslant|x|<a\leqslant\theta_i,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_-(|x|,a,\theta_i)f_{\prime}(t,x), & a<|x|\leqslant\theta_i,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_+(|x|,\theta_i,1)f_{\prime}(t,x), & a<\theta_i<|x|<1,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_+(|x|,a,1)f_{\prime}(t,x), & \theta_i<a<|x|<1,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ f_{\prime}(t,x), & |x|\geqslant1,\ \ t\in\mathbb{R}_+, \end{cases}\qquad i\in\mathbb{N}.$$

Для решений $x_f(\cdot,x_0)$ этой системы при каждом $\theta\in(a,1)$ выполнено включение

$$x^i_f(\cdot,x_0)\in\begin{cases}\mathcal{A}_1, & \theta_i\in(0,a)\cup(a,\theta),\\ \mathcal{A}_0, & \theta_i\in(\theta,1),\end{cases}\qquad i\in\mathbb{N}.$$

2.3. Если $0<a<b<1$, то выбираем систему $\dot{x}=f(t,x)$ с правой частью

$$f(t,x)\equiv\begin{cases}\psi_+(|x|,0,\theta_i)f_\prime(t,x), & 0\leqslant|x|\leqslant\theta_i<a,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_+(|x|,\theta_i,a)f_\prime(t,x), & \theta_i<|x|\leqslant a,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_-(|x|,0,a)f_\prime(t,x), & 0\leqslant|x|<a\leqslant\theta_i,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_-(|x|,a,\theta_i)f_\prime(t,x), & a<|x|\leqslant\theta_i,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_+(|x|,\theta_i,b)f_\prime(t,x), & a<\theta_i<|x|\leqslant b,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_+(|x|,a,b)f_\prime(t,x), & \theta_i<a<|x|<b,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_-(|x|,a,b)f_\prime(t,x), & a<|x|<b<\theta_i,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_-(|x|,b,\theta_i)f_\prime(t,x), & b<|x|\leqslant\theta_i,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_-(|x|,\theta_i,1)f_\prime(t,x), & b<\theta_i<|x|<1,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_+(|x|,b,1)f_\prime(t,x), & \theta_i<b<|x|<1,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ f_\prime(t,x), & |x|\geqslant 1,\ \ t\in\mathbb{R}_+,\end{cases}\qquad i\in\mathbb{N},$$

для решений $x_f(\cdot,x_0)$ которой при каждом $\theta\in(a,b)$ выполнено включение

$$x_f^i(\cdot,x_0)\in\begin{cases}\mathcal{A}_1, & \theta_i\in(0,a)\cup(a,\theta),\\ \mathcal{A}_0, & \theta_i\in(\theta,b)\cup(b,1),\end{cases}\qquad i\in\mathbb{N}.$$

2.4. Если $a=0$, $b=1$, то выбираем систему $\dot{x}=f(t,x)$, где

$$f(t,x)\equiv\begin{cases}\psi_-(|x|,0,\theta_i)f_\prime(t,x), & 0<|x|\leqslant\theta_i,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ \psi_+(|x|,\theta_i,1)f_\prime(t,x), & \theta_i<|x|<1,\ \ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],\\ f_\prime(t,x), & |x|\geqslant 1,\ \ t\in\mathbb{R}_+,\end{cases}\qquad i\in\mathbb{N}.$$

Для решений $x_f(\cdot,x_0)$ этой системы при каждом $\theta\in(0,1)$ выполнено включение (12).

Таким образом, каждый из рассмотренных четырёх случаев на основании рассуждений, проведённых в п. 1 настоящего доказательства, приводит к равенствам (4) и (5).

Теорема 2 доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученный результат показывает отсутствие непосредственной связи между мощностями спектров показателей колеблемости нелинейной системы и системы её первого приближения. В работе [18] доказано существование такой двумерной нелинейной дифференциальной системы с линейным приближением, имеющим произвольно заданные отрицательные характеристические показатели Ляпунова, и нелинейностью произвольно заданного высшего порядка малости в окрестности начала координат, что все её нетривиальные решения бесконечно продолжимы вправо и множество их показателей Ляпунова совпадает с заданным ограниченным суслинским множеством положительной полуоси. Открытым остаётся вопрос о возможности перенесения аналогичного свойства и на показатели колеблемости.

Автор благодарен И.Н. Сергееву за ценные замечания, а также В.В. Быкову за обсуждение результатов статьи.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 075-03-2024-074 по проекту "Исследование асимптотических характеристик колеблемости дифференциальных уравнений и систем, а также оптимизационных методов".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергеев, И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения / И.Н. Сергеев // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2006. — № 25. — С. 249–294.
2. Сергеев, И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Изв. РАН. Сер. матем. — 2012. — Т. 76, № 1. — С. 149–172.
3. Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Мат. сб. — 2013. — Т. 204, № 1. — С. 119–138.
4. Сергеев, И.Н. Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. — 2015. — № 2 (46). — С. 171–183.
5. Сергеев, И.Н. Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2021. — № 3. — С. 41–46.
6. Сергеев, И.Н. Исследование показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости по первому приближению / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 726–734.
7. Сташ, А.Х. Сравнение спектров показателей колеблемости нелинейной системы и системы первого приближения / А.Х. Сташ // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 8. — С. 1139–1142.
8. Бурлаков, Д.С. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы / Д.С. Бурлаков, С.В. Цой // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2014. — № 30. — С. 75–93.
9. Сташ, А.Х. Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем / А.Х. Сташ // Вестн. Удмурт. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. — 2019. — Т. 29, № 4. — С. 558–568.
10. Сташ, А.Х. Существование двумерной линейной системы с континуальными спектрами полных и векторных частот / А.Х. Сташ // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 1. — С. 143–144.
11. Шишлянников, Е.М. Существование двумерной ограниченной системы с континуальными и совпадающими спектрами частот и показателей блуждаемости / Е.М. Шишлянников // Мат. сб. — 2018. — Т. 209, № 12. — С. 149–164.
12. Сташ, А.Х. О континуальных спектрах показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных систем / А.Х. Сташ // Вестн. рос. ун-тов. Математика. — 2023. — Т. 28, № 141. — С. 60–67.
13. Сташ, А.Х. О существенных значениях показателей колеблемости решений линейной однородной двумерной дифференциальной системы / А.Х. Сташ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2023. — Т. 29, № 2. — С. 157–171.
14. Сташ, А.Х. О существенных значениях показателей колеблемости решений линейной однородной двумерной дифференциальной системы / А.Х. Сташ // Владикавказ. мат. журн. — 2023. — Т. 25, № 2. — С. 136–143.
15. Perron, O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen / O. Perron // Math. Zeitschr. — 2023. — Bd. 32, Hf. 1. — S. 703–728.
16. Леонов, Г.А. Об одной модификации контрпримера Перрона / Г.А. Леонов // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 11. — С. 1566–1567.
17. Изобов, Н.А. Континуальный вариант эффекта Перрона смены значений характеристических показателей / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 11. — С. 1427–1439.

18. Изобов, Н.А. Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 4. — С. 464–472.
19. Барабанов, Е.А. Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности / Е.А. Барабанов, В.В. Быков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2019. — Т. 25, № 4. — С. 31–43.
20. Сергеев, И.Н. Дифференциальные уравнения: учебник для студентов учреждений высш. проф. образования / И.Н. Сергеев. — М. : Издательский центр “Академия”, 2013. — 288 с.

ON THE SPECTRA OF OSCILLATION EXPONENTS OF A TWO-DIMENSIONAL NONLINEAR SYSTEM AND ITS FIRST APPROXIMATION SYSTEM

 A. Kh. Stash

Adyghe State University, Maykop, Russia
e-mail: aidamir.stash@gmail.com

The sets of values (spectra) of the exponents of oscillation of strict signs, non-strict signs, zeros, roots and hyperroots of solutions of differential systems are studied. Two-dimensional nonlinear systems are constructed, all of whose solutions are infinitely extendable to the right and any of the spectra of their oscillation exponents can coincide with both the segment $[0,1]$ and with any pre-defined non-empty subset of rational numbers of this segment, while the spectra of linear systems of their first approximation consist of only one element. Moreover, the spectra of the exponents of the original system coincide with the corresponding spectra of the exponents of oscillation of the narrowing of the constructed nonlinear two-dimensional systems to the direct product of any open neighborhood of the zero of the phase plane and the time semi-axis. In addition, the existence of a nonlinear system has been proven, the spectrum of any of the oscillation exponents under consideration of which coincides with an arbitrary predetermined interval of the segment $[0,1]$, and the corresponding spectra of the system of its first approximation consist of one non-negative number.

Keywords: differential equation, linear system, nonlinear system, oscillation, number of zeros, exponents of oscillation, Lyapunov exponent

FUNDING

This work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of state task no. 075-03-2024-074 according to the project “Study of asymptotic characteristics of oscillation of differential equations and systems, as well as optimization methods”.

REFERENCES

1. Sergeev, I.N., Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation, *J. Math. Sci.*, 2006, vol. 135, no. 1, pp. 2764–2793.
2. Sergeev, I.N., Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential systems, *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 139–162.
3. Sergeev, I.N., The remarkable agreement between the oscillation and wandering characteristics of solutions of differential systems, *Sbornik: Mathematics*, 2013, vol. 204, no. 1, pp. 114–132.
4. Sergeev, I.N., The complete set of relations between the oscillation, rotation and wandering indicators of solutions of differential systems, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2015, iss. 2 (46), pp. 171–183.
5. Sergeev, I.N., The definition of the indices of oscillation, rotation, and wandering of nonlinear differential systems, *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2021, vol. 76, no. 3, pp. 129–134.
6. Sergeev, I.N., Studying the oscillation, rotation, and wandering indicators by the first approximation, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 6, pp. 741–750.

7. Stash, A.Kh., Comparing the spectra of oscillation exponents of a nonlinear system and the first approximation system, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 8, pp. 1147–1150.
8. Burlakov, D.S. and Tsoii, S.V., Coincidence of complete and vector frequencies of solutions of a linear autonomous system, *J. Math. Sci.*, 2015, vol. 210, no. 2, pp. 155–167.
9. Stash, A.Kh., Properties of exponents of oscillation of linear autonomous differential system solutions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, iss. 4, pp. 558–568.
10. Stash, A.Kh., Existence of a two-dimensional linear system with continual spectra of total and vector frequencies, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 1, pp. 146–148.
11. Shishlyannikov, E.M., The existence of a two-dimensional bounded system with continual and coinciding spectra of frequencies and of wandering exponents, *Sbornik: Mathematics*, 2018, vol. 209, no. 12, pp. 1812–1826.
12. Stash, A.Kh., On the continuum spectra of the exponents of linear homogeneous differential systems, *Russ. Univ. Reports. Mathematics*, 2023, vol. 28, no. 141, pp. 60–67.
13. Stash, A.Kh., On essential values of oscillation exponents for solutions of a linear homogeneous two-dimensional differential system, *Proc. of the Steklov Institute of Math.*, 2023, vol. 321, no. 1, pp. 216–229.
14. Stash, A.Kh., Spectra of oscillation and rotatability exponents of solutions of homogeneous differential systems, *Vladikavkazskii Matematicheskii Jurnal*, 2023, vol. 25, no. 2, pp. 136–143.
15. Perron, O., Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen, *Math. Zeitschr.*, 2023, Bd. 32, Hf. 1, S. 703–728.
16. Leonov, G.A., A modification of Perron's counterexample, *Differ. Equat.*, 2003, vol. 39, no. 11, pp. 1651–1652.
17. Izobov, N.A. and Il'in, A.V., Continual version of the perron effect of change of values of the characteristic exponents, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 11, pp. 1393–1405.
18. Izobov, N.A. and Il'in, A.V., Construction of an arbitrary suslin set of positive characteristic exponents in the Perron effect, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 4, pp. 449–457.
19. Barabanov, E.A. and Bykov, V.V., Description of the linear Perron effect under parametric perturbations exponentially vanishing at infinity, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 31–43.
20. Sergeev, I.N., *Differentsial'nyye uravneniya* (Differential Equations), Moscow: Izdatel'skiy tsentr "Akademiya", 2013.