ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 2, с. 200–206

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.4

ОБ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ГЛАВНОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОДНОРОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2025 г. Э. Мухамадиев[1], А. Н. Наимов[2]

Вологодский государственный университет

e-mail: [1] *emuhamadiev@rambler.ru*, [2] *naimovan@vogu35.ru*

Поступила в редакцию 19.08.2024 г., после доработки 19.08.2024 г.; принята к публикации 31.10.2024 г.

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с выделенной главной положительно однородной нелинейностью исследована априорная оценка периодических решений фиксированного периода. Найдены новые условия, обеспечивающие априорную оценку, в которых влияние свойств главной нелинейной части, включая её множество нулей, опосредовано функциональными оценками сверху и снизу. Выполнимость новых условий проверена для трёх видов нелинейностей.

Ключевые слова: положительно однородная нелинейность, периодическое решение, априорная оценка

DOI: 10.31857/S0374064125020058, EDN: HWWJHO

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x''(t) = P(x(t), x'(t)) + f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \ \ x(t) \in \mathbb{R}^n, \ \ n \geqslant 2. \tag{1}$$

Здесь $P\colon \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^n$, $f\colon \mathbb{R}^{2n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ — непрерывные отображения, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $P(\lambda y_1, \lambda y_2) \equiv \lambda^m P(y_1, y_2)$ при некотором $m > 1$ и всех $\lambda > 0$;

2) $f(t+\omega, y_1, y_2) \equiv f(t, y_1, y_2)$ при фиксированном $\omega > 0$;

3) $(|y_1| + |y_2|)^{-m} |f(t, y_1, y_2)| \rightrightarrows 0$ при $|y_1| + |y_2| \to \infty$.

Отображение P называем *главной положительно однородной нелинейностью*, а f — возмущением. Решение $x \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ системы уравнений (1) называем *ω-периодическим*, если $x(t+\omega) \equiv x(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Цель статьи — найти новые условия на P, обеспечивающие априорную оценку

$$\max_{t\in\mathbb{R}} (|x'(t)| + |x(t)|) \leqslant M_1 \tag{2}$$

для ω-периодических решений системы уравнений (1) при любом возмущении f с числом M_1, зависящим лишь от P и f. Оценка (2) позволит исследовать существование ω-периодических решений с применением методов вычисления вращения векторных полей [1].

Если выполнены условия 1)–3) и

4) автономная система $y' = P(0, y)$ не имеет ненулевых ограниченных траекторий, то согласно работе [2] имеет место оценка

$$|x'(t)| \leqslant M_2(1 + |x(t)|), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

где M_2 не зависит от ω-периодических решений x.

Условия 1)–4) в общем не обеспечивают оценку (2). Например, она не верна для отображений $P(y_1, y_2) = \nabla V(y_2 - Ay_1)$, $f(t, y_1, y_2) = Ay_2$, где ∇V — градиент функции $V \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, удовлетворяющей условиям $V(\lambda y) \equiv \lambda^{m+1} V(y)$ и $\nabla V(y) \neq 0$ при $y \neq 0$; A — квадратная матрица порядка n, имеющая чисто мнимое собственное значение $i2\pi j_0/\omega$, j_0 — целое число.

В статье [3] выведена априорная оценка (2) и исследовано существование периодических решений периода 1 системы уравнений (1) при условиях 1)–4) и ряда других, в том числе

5) при любом фиксированном $x_0 \in \mathbb{R}^n$ автономная система $y' = P(x_0, y)$ не имеет нестационарных ограниченных траекторий.

Вывод оценки (2) основан на исследовании ω-периодических решений y_k систем уравнений вида

$$\varepsilon_k y_k'' = P(y_k, y_k') + o(1), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \to 0$ и $y_k(t) \rightrightarrows y_0(t)$ при $k \to \infty$, $|y_k(t)| + |y_k'(t)| \leqslant 1$, $y_0(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. При исследовании y_k по аналогии с теорией сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений учитывается структура множества нулей отображения P и возможные переключения точки $(y_k(t), y_k'(t))$ между нулями P при изменении t и для больши́х k. Условие 5) приводится для исключения таких переключений, оно сужает класс рассматриваемых отображений P. Поэтому представляет интерес вопрос об исследовании априорной оценки (2) без условия 5), например, как в работе [4].

В настоящей статье найдены новые условия для вывода априорной оценки (2) без учёта условия 5), в них влияние свойств нелинейности P, включая её множество нулей, на априорную оценку опосредовано функциональными оценками сверху и снизу; исследована их выполнимость для трёх видов нелинейностей. Полученные результаты дополняют и обобщают работы [3, 4]. В дальнейшем с их помощью, вероятно, можно сформулировать и доказать новые теоремы о существовании периодических решений для системы уравнений (1).

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введём следующие обозначения:

$$\|y\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} |y(t)|, \quad \langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n,$$

$$\mathbb{Y}_M = \{y(t) \colon y \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n),\ \|y\| + \|y'\| = 1,\ y(t+\omega) = y(t),\ |y'(t)| \leqslant M|y(t)|\},$$

$$\beta_M(P) = \sup_{y \in \mathbb{Y}_M} \int\limits_0^\omega \langle y''(t), P(y(t), y'(t)) \rangle\, dt, \quad \alpha_M(P) = \inf_{y \in \mathbb{Y}_M} \int\limits_0^\omega |P(y(t), y'(t))|^2\, dt,$$

здесь $M > 0$.

Наряду с условиями 1)–5), рассмотрим условия

6) $\inf\{\beta_M(P) \colon M > M_2\} < \infty$,

7) $\sup\{\alpha_M(P) \colon M > M_2\} > 0$,

где M_2 — число из оценки (3).

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1)–4), 7) и одно из условий:5) или 6). Тогда для ω-периодических решений системы уравнений (1) имеет место априорная оценка (2).*

Доказательство. Предположим, что оценка (2) не верна. Тогда существует неограниченная последовательность ω-периодических решений x_k, $k\in\mathbb{N}$, системы уравнений (1)

$$r_k := \|x_k\| + \|x_k'\| \to \infty, \quad k\to\infty.$$

Рассмотрим вектор-функции $y_k(t) = r_k^{-1}x_k(t)$, $k\in\mathbb{N}$, $t\in\mathbb{R}$. Для них

$$r_k^{1-m}y_k''(t) = P(t, y_k(t), y_k'(t)) + r_k^{-m}f(t, r_ky_k(t), r_ky_k'(t)), \tag{4}$$

$$y_k(t+\omega) = y_k(t), \quad |y_k'(t)| \leqslant M_2(r_k^{-1} + |y_k(t)|), \quad \|y_k\| + \|y_k'\| = 1.$$

В силу условия 3) имеет место предел

$$r_k^{-m}\max_{t\in\mathbb{R}}|f(t, r_ky_k(t), r_ky_k'(t))| \to 0, \quad k\to\infty.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\|y_k - y_0\| \to 0$ при $k\to\infty$. Далее, по аналогии с работой [3] можно показать, что при любом $t\in\mathbb{R}$ верно $y_0(t)\neq 0$, а в случае выполнения условия 5) имеет место поточечная сходимость

$$P(y_k(t), y_k'(t)) \to 0, \quad k\to\infty.$$

Из того, что $y_0(t)\neq 0$, $t\in\mathbb{R}$, следует оценка $|y_k'(t)| \leqslant M|y_k(t)|$ при $t\in\mathbb{R}$, $M > M_2$, $k\geqslant k_0(M)$. Поэтому если выполнено условие 6), то, умножив систему (4) скалярно на $P(y_k(t), y_k'(t))$ и проинтегрировав по отрезку $[0,\omega]$, будем иметь

$$\int\limits_0^{\omega} |P(y_k(t), y_k'(t))|^2\,dt \to 0, \quad k\to\infty. \tag{5}$$

Таким образом, (5) верно при выполнении условий 1)–4) и одного из условий: 5) или 6). С другой стороны, учитывая условие 7), при некотором $M > M_2$ и бóльших k получаем

$$\int\limits_0^{\omega} |P(y_k(t), y_k'(t))|^2 dt \geqslant \alpha_M(P) > 0,$$

что приводит к противоречию. Теорема доказана.

Условия 6) и 7) являются функциональными оценками сверху и снизу для отображения P. В них опосредовано выражены свойства P, влияющие на априорную оценку (2). Условие 6) можно интерпретировать как обобщённое условие существования направляющей функции для семейства отображений $P(x_0,\cdot)$ с параметром $x_0\in\mathbb{R}^n$. В доказательстве теоремы 1 этим условием обеспечивается приближение $(y_k(t), y_k'(t))$ к множеству нулей P при $k\to\infty$ в смысле сходимости последовательности интегралов $\int_0^{\omega}|P(y_k(t), y_k'(t))|^2\,dt$ к нулю. При такой сходимости находить предельные объекты для y_k, через которые можно было бы сформулировать условия априорной оценки как в работе [3], пока не представляется возможным. Вместо этого условием 7) исключаются ω-периодические колебания $(y_k(t), y_k'(t))$ в окрестности множества нулей P, что и приводит к априорной оценке. Таким образом, влияние множества нулей нелинейности P на априорную оценку (2) опосредовано условием 7).

3. ПРИМЕРЫ

Исследуем выполнимость условий теоремы 1 для трёх видов нелинейностей, являющихся положительно однородными отображениями порядка $m>1$, задаваемых следующими формулами:

$$P(y_1,y_2)=\sum_{l=1}^{q}\left(\prod_{j=1,\,j\neq l}^{q} V_j(y_2-B_j(y_1))\right)\nabla V_l(y_2-B_l(y_1)),\quad y_1,y_2\in\mathbb{R}^n, \tag{6}$$

где $q\geqslant 2$, $V_j\in C^1(\mathbb{R}^n\setminus\{0\};\mathbb{R})$, $B_j\in C(\mathbb{R}^n\setminus\{0\};\mathbb{R}^n)$, $V_j(\lambda y)\equiv\lambda^{m_j}V_j(y)$, $B_j(\lambda y)\equiv\lambda B_j(y)$, $m_j>0$, $j=\overline{1,q}$, $m_1+\ldots+m_q=m+1$, ∇V_l — градиент функции V_l;

$$P(y_1,y_2)=\sum_{l=1}^{q}\left(\prod_{j=1,\,j\neq l}^{q}|y_2-A_jy_1|^2\right)(y_2-A_ly_1),\quad y_1,y_2\in\mathbb{R}^n, \tag{7}$$

где $q\geqslant 2$, $m=2q-1$, A_1, $\ldots$, A_q — квадратные матрицы порядка n;

$$P(y_1,y_2)=\prod_{j=1}^{q}\overline{(y_2-c_jy_1)^{m_j}},\quad y_1,y_2\in\mathbb{C}, \tag{8}$$

где $q\geqslant 2$, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $c_j\in\mathbb{C}$, $j=\overline{1,q}$, m_1, $\ldots$, m_q — натуральные числа, сумма которых равна m, черта сверху означает комплексное сопряжение.

Для нелинейностей (6)–(8) условие 5) в общем не выполняется, например для (7) при $q=2$, $A_1=I$, $A_2=2I$, где I — единичная матрица. Для нелинейности вида (8) выполнение условия 5) исследовано в работе [5].

Проверим сначала выполнимость условий 4)–7) для нелинейности

$$P(y_1,y_2)=\nabla V(y_2-B(y_1)),\quad y_1,y_2\in\mathbb{R}^n, \tag{9}$$

где ∇V — градиент функции $V\in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, $V(\lambda y)\equiv\lambda^{m+1}V(y)$, $B\in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $B(\lambda y)\equiv\lambda B(y)$. В этом примере условия 4) и 5) идентичны и равносильны условию $\nabla V(y)\neq 0$ при $y\neq 0$, а условие 6) можно обеспечить, дополнительно предположив, что $B\in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$.

Лемма 1. *Для нелинейности (9) при любом $M>0$ верна оценка $\alpha_M(P)>0$, если $\nabla V(y)\neq 0$ при $y\neq 0$ и система $y'=B(y)$ не имеет ненулевых ω-периодических решений.*

Доказательство. Пусть $\alpha_M(P)=0$ при некотором $M>0$. Тогда существует последовательность $y_k\in\mathbb{Y}_M$, $k\in\mathbb{N}$, такая, что

$$\int_0^{\omega}|\nabla V(y_k'(t)-B(y_k(t)))|^2\,dt\to 0,\quad k\to\infty.$$

Без ограничения общности можно считать, что при $k\to\infty$ имеют место сходимости $\|y_k-y_0\|\to 0$ и $|\nabla V(y_k'(t)-B(y_k(t)))|\to 0$ почти при всех $t\in\mathbb{R}$. Из условий $|y_k'(t)|\leqslant M|y_k(t)|$, $\|y_k\|+\|y_k'\|=1$ вытекает, что $\|y_0\|\neq 0$. Учитывая условие $\nabla V(y)\neq 0$ при $y\neq 0$, имеем $y_k'(t)\to$ $\to B(y_0(t))$, $k\to\infty$, почти при всех $t\in\mathbb{R}$. Переходя к пределу в равенстве

$$y_k(t)=y_k(\omega)+\int_0^{t}y_k'(s)\,ds,\quad t\in\mathbb{R},$$

получаем, что y_0 является ненулевым ω-периодическим решением системы $y'=B(y)$. Лемма доказана.

Для нелинейности (6) условие 4) равносильно следующему условию:

8) множества $\{y\in\mathbb{R}^n\colon |y|=1, V_j(y)=0\}$, $j=\overline{1,q}$, попарно не пересекаются и $\nabla V_j(y)\neq 0$ при всех $y\neq 0$, $j=\overline{1,q}$.

Равносильность доказывается с помощью леммы 2 из работы [6, с. 41]. Условие 6) выполняется, если дополнительно предполагать

9) $B_j\in C^1(\mathbb{R}^n\setminus\{0\};\mathbb{R}^n)$, $j=\overline{1,q}$.

В этом можно убедиться, составив по $y\in\mathbb{Y}_M$ сложную функцию $V_1(y'(t)-B_1(y(t)))\times\ldots$ $\ldots\times V_q(y'(t)-B_q(y(t)))$ и вычислив её производную. Для проверки условия 7) заметим, что если все B_j, $j=\overline{1,q}$, совпадают, то нелинейность (6) представима в виде (9), где $V=V_1\ldots V_q$ и $B=B_1$. В данном случае, согласно лемме 1, условие 7) вытекает из условий 8) и

10) система $y'=B_1(y)$ не имеет ненулевых ω-периодических решений.

Справедлива следующая

Лемма 2. *При условиях 8) и 10) существует такое $\sigma>0$, не зависящее от B_2, $\ldots$, B_q, что если*

11) $\max\{|B_j(y)-B_1(y)|\colon |y|=1\}<\sigma$, $j=\overline{2,q}$,

то условие 7) выполнено.

Доказательство. По аналогии с работой [2] можно доказать существование $\sigma_0>0$ такого, что если $\max\{|B_j(y)-B_1(y)|\colon |y|=1\}<\sigma_0$, $j=\overline{2,q}$, то для ω-периодических решений системы уравнений (1) с нелинейностью (6) имеет место оценка (3) с константой M_2, не зависящей от B_2, $\ldots$, B_q. Возьмём $M>M_2$. Для нелинейности P_0, которая получается из (6) при $B_j=B_1$, $j=\overline{2,q}$, согласно лемме 1 имеем $\alpha_M(P_0)>0$. Отсюда, выбирая $\sigma\in(0,\sigma_0)$ малым и полагая условие 11) выполненным, получаем $\alpha_M(P)>0$. Лемма доказана.

Таким образом, нелинейность (6) удовлетворяет условиям 4), 6), 7), если выполнены условия 8)–11). Отсюда, применяя теорему 1, выводим следующее утверждение.

Теорема 2. *Если нелинейность P задана формулой (6) и выполнены условия 8)–11), то для ω-периодических решений системы уравнений (1) имеет место априорная оценка (2).*

В случае формулы (7), являющейся частным случаем (6), верна

Теорема 3. *Для ω-периодических решений системы уравнений (1) с нелинейностью (7) имеет место априорная оценка (2), если матрицы A_1, $\ldots$, A_q таковы, что*

12) $\det(A_{j_1}-A_{j_2})\neq 0$ *или* $A_{j_1}=A_{j_2}$ *при любых* $j_1\neq j_2$, $j_1,j_2=\overline{1,q}$;

13) *перестановочны, т.е.* $A_{j_1}A_{j_2}=A_{j_2}A_{j_1}$ *при любых* $j_1,j_2=\overline{1,q}$;

14) *любая выпуклая комбинация $\mu_1A_1+\ldots+\mu_qA_q$ имеет спектр, не содержащий числа вида $i2\pi j/\omega$, где j — целое число, i — мнимая единица.*

Доказательство. Для нелинейности (7) условия 4) и 6) выполнены. Если матрицы A_1, $\ldots$, A_q совпадают, то в силу леммы 1 верна оценка $\alpha_M(P)>0$ при любом $M>0$. Покажем, что она имеет место и в случае несовпадения матриц. Предположим, что $\alpha_M(P)=0$ при некотором $M>0$. Тогда существует последовательность $y_k\in\mathbb{Y}_M$, $k\in\mathbb{N}$, такая, что выполняется (5).

Без ограничения общности можно считать, что при $k\to\infty$ имеют место сходимости $\|y_k-y_0\|\to 0$ и $|P(y_k(t),y_k'(t))|\to 0$ почти при всех $t\in[0,\omega]$. Для $y_k\in\mathbb{Y}_M$ имеем $\|y_k\|+\|y_k'\|=1$, $|y_k'(t)|\leqslant M|y_k(t)|$. Отсюда следует, что $y_0(t)\neq 0$ при всех $t\in\mathbb{R}$.

Обозначим

$$a_{k,l}(t)=\prod_{j=1,\, j\neq l}^{q}|y_k'(t)-A_jy_k(t)|^2,\quad l=\overline{1,q},\quad a_k(t)=\sum_{l=1}^{q}a_{k,l}(t).$$

Из $y_0(t)\neq 0$, $t\in\mathbb{R}$, несовпадения матриц A_1, $\ldots$, A_q и условия 12) следует неравенство

$$\inf_{k\geqslant k_0}\min_{t\in\mathbb{R}}a_k(t)>0,$$

начиная с некоторого k_0. Для $k \geqslant k_0$ обозначим

$$d_{k,l}(t) = \frac{a_{k,l}(t)}{a_k(t)}, \quad l = \overline{1,q}, \quad g_k(t) = \frac{1}{a_k(t)} P(y_k(t), y_k'(t)), \quad D_k(t) = \sum_{l=1}^{q} d_{k,l}(t) A_l.$$

С учётом введённых обозначений при $k \geqslant k_0$ имеем

$$y_k'(t) = D_k(t) y_k(t) + g_k(t), \quad t \in [0, \omega], \quad y_k(0) = y_k(\omega).$$

Отсюда, учитывая условие 13), выводим

$$y_k(0) = \exp\left\{ \int_0^\omega D_k(t)\,dt \right\} y_k(0) + \int_0^\omega \exp\left\{ -\int_s^\omega D_k(t)\,dt \right\} g_k(s)\,ds,$$

$$\left(I - \exp\left\{ \int_0^\omega D_k(t)\,dt \right\} \right) y_k(0) \to 0, \quad k \to \infty,$$

$$\det\left(I - \exp\left\{ \int_0^\omega D_k(t)\,dt \right\} \right) \to 0, \quad k \to \infty.$$

С другой стороны, интеграл $\omega^{-1} \int_0^\omega D_k(t)\,dt$ равен выпуклой комбинации матриц $A_1, \ldots, A_q$. Согласно условию 14) на множестве выпуклых комбинаций $\mu_1 A_1 + \ldots + \mu_q A_q$ множество значений $\det\big(I - \exp\{\omega(\mu_1 A_1 + \ldots + \mu_q A_q)\}\big)$ должно быть отделено от нуля. Пришли к противоречию. Теорема доказана.

Для нелинейности (8) условия 4) и 6) выполняются. Для выполнения условия 7) достаточно, чтобы выпуклая оболочка чисел $c_1, \ldots, c_q$ не содержала чисто мнимые комплексные числа вида $i2\pi j/\omega$, где j — целое число. Это можно доказать от противного (по схеме рассуждений из работы [4]). Таким образом, из теоремы 3 вытекает

Следствие. *В случае нелинейности* (8) *для ω-периодических решений системы уравнений* (1) *имеет место априорная оценка* (2), *если выпуклая оболочка чисел $c_1, \ldots, c_q$ не содержит чисто мнимые комплексные числа вида $i2\pi j/\omega$, где j — целое число.*

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00032).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский, М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 512 с.
2. Наимов, А.Н. Оценка производных периодических решений одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / А.Н. Наимов, Р.И. Хакимов // Вестн. Таджик. нац. ун-та. Сер. естеств. наук. — 2017. — № 1/5. — С. 12–16.
3. Мухамадиев, Э. О разрешимости периодической задачи для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / Э. Мухамадиев, А.Н. Наимов // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 3. — С. 312–321.

4. Мухамадиев, Э. О разрешимости периодической задачи для двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / Э. Мухамадиев, А.Н. Наимов // Дифференц. уравнения и процессы управления. — 2024. — № 2. — С. 46–58.
5. Наимов А.Н. О числе нестационарных ограниченных траекторий одного класса автономных систем на плоскости / А.Н. Наимов // Дифференц. уравнения. — 2008. — Т. 44, № 8. — С. 1050–1055.
6. Мухамадиев, Э. Об априорной оценке и существовании периодических решений для одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев, А.Н. Наимов // Изв. вузов. Математика. — 2022. — № 4. — С. 37–48.

ON A PRIORI ESTIMATE OF PERIODIC SOLUTIONS OF THE SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER WITH THE MAIN POSITIVELY HOMOGENEOUS NONLINEARITY

© 2025 / E. Mukhamadiev[1], A. N. Naimov[2]

Vologda State University, Russia
e-mail: [1]emuhamadiev@rambler.ru, [2]naimovan@vogu35.ru

For the system of ordinary differential equations of the second order with the main positively homogeneous nonlinearity, an a priori estimate of periodic solutions of a fixed period is investigated. New conditions of a priori estimate are found, in which the influence of the properties of the main nonlinear part, including its set of zeros, is mediated by functional estimates from above and below. The feasibility of the new conditions is investigated for three types of nonlinearities.

Keywords: positively homogeneous nonlinearity, periodic solution, a priori estimate

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00032).

REFERENCES

1. Krasnoselsky, M.A. and Zabreiko, P.P., *Geometric Methods of Non-Linear Analysis*, Berlin: Springer-Verlag, 1984.
2. Naimov, A.N. and Khakimov, R.I., Estimation of derivatives of periodic solutions of one class of systems of nonlinear ordinary differential equations of the second order, *Vestnik Tadzhikskogo natsional'nogo universiteta. Seriya yestestvennykh nauk*, 2017, no. 1/5, pp. 12–16.
3. Mukhamadiev, E. and Naimov, A.N., On the solvability of a periodic problem for a system of non-linear ordinary differential equations of second order, *Differ. Equat.*, 2024, vol. 60, no. 3, pp. 286–295.
4. Mukhamadiev, E. and Naimov, A.N., On the solvability of a periodic problem for a two-dimensional system of ordinary differential equations of the second order, *Differ. Equat. Contr. Process.*, 2024, no. 2, pp. 46–58.
5. Naimov, A.N., On the number of nonstationary bounded trajectories of a class of autonomous systems on the plane, *Differ. Equat.*, 2008, vol. 44, no. 8, pp. 1082–1087.
6. Mukhamadiev, E. and Naimov, A.N., On a priori estimate and the existence of periodic solutions for a class of systems of nonlinear ordinary differential equations, *Russ. Math.*, 2022, vol. 66, no. 4, pp. 32–42.