ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 2, с. 190–199

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.988.63

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ЧЁТНЫМ ЧИСЛОМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

В. С. Климов

Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова
e-mail: vsk76@list.ru

Поступила в редакцию 26.02.2024 г., после доработки 10.11.2024 г.; принята к публикации 28.11.2024 г.

Выделен класс нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих чётное число ω-периодических решений. Приведены условия существования не менее двух подобных решений.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, периодическое решение

DOI: 10.31857/S0374064125020049, EDN: HXEAXC

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Изучается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\mathscr{A}(x) = f(t, x, \ldots, x^{(l-1)}) + y(t). \tag{1}$$

При определённых предположениях относительно линейного дифференциального оператора $\mathscr{A}$ и правой части уравнения (1) устанавливается чётность числа ω-периодических решений данного уравнения. Формулируются достаточные условия существования не менее двух ω-периодических решений.

В п. 2 статьи рассматривается линейный вариант уравнения (1), возникающий при $f \equiv 0$, записываются обратные функциональные неравенства, позволяющие оценивать нормы старших производных соответствующих решений через аналогичные нормы исходных решений. В п. 3 приводятся основные результаты работы, в частности, доказывается, что типичное число периодических решений уравнения (1) чётно. Полученные результаты обсуждаются в п. 4.

Основой работы являются простейшие свойства пространств Соболева [1, 2], конусные методы исследования дифференциальных неравенств [3–5], некоторые идеи нелинейного функционального анализа [6–8]. Используются следующие обозначения: $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $H = \mathbb{R}^m$ — m-мерное арифметическое пространство вектор-столбцов $u = (u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{т}}$, скалярное произведение двух векторов $u = (u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{т}}$, $v = (v_1, \ldots, v_m)^{\mathrm{т}}$ определяется равенством $(u, v) = u_1 v_1 + \ldots + u_m v_m$, $|u| = \sqrt{(u, u)}$ — евклидова длина вектора u. Здесь и далее символ т означает операцию транспонирования.

Все банаховы пространства рассматриваются над полем действительных чисел. Если Z — банахово пространство и $v \in Z$, то $\|v; Z\|$ — норма в пространстве Z. Замкнутое выпуклое множество $K \subset Z$ называют *конусом*, если из $v \in K$ и $v \neq 0$ вытекает, что $\alpha x \in K$ при $\alpha \geqslant 0$ и $\alpha x \notin K$ при $\alpha < 0$. Например, ортант $H_+ = \mathbb{R}^m_+ = \{z = (z_1, \ldots, z_m)^{\mathrm{т}} \colon z_1 \geqslant 0, \ \ldots, \ z_m \geqslant 0\}$ есть конус в пространстве $H = \mathbb{R}^m$.

Ниже используются терминология и обозначения, принятые в теории линейных фредгольмовых операторов (см., например, [9]). Пусть X, Y — банаховы пространства, $L(X, Y)$ —

пространство линейных непрерывных операторов $A\colon X\to Y$. *Ядром оператора* A *класса* $L(X,Y)$ называется векторное пространство $\operatorname{Ker} A=\{x\in X\colon Ax=\theta\}$, а *образом оператора* A — векторное пространство $\operatorname{Im} A=\{y\in Y\colon Ax=y$ для некоторого $x\in X\}$. Фактор-пространство $\operatorname{Coker} A=Y/\operatorname{Im} A$ называют *коядром оператора* A. Линейный оператор $A\in L(X,Y)$ считается *фредгольмовым*, если размерности ядра $\dim\operatorname{Ker} A$ и коядра $\dim\operatorname{Coker} A$ конечны. *Индексом* фредгольмова оператора A называется число

$$\operatorname{ind} A=\dim\operatorname{Ker} A-\dim\operatorname{Coker} A.$$

Через $\Phi_n(X,Y)$ обозначается совокупность фредгольмовых операторов индекса n.

2. ОБРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Пусть $0<\omega<+\infty$, $J=[0,\omega]$. Введём пространства функций, определённых на отрезке J со значениями в пространстве $H=\mathbb{R}^m$. Через $C(J,H)$ и $L(J,H)$ обозначим пространства, соответственно, непрерывных и суммируемых на отрезке J функций $z\colon J\to H$. Нормы в этих пространствах вводятся стандартным образом:

$$\|z;C\|=\max_{t\in J}\{|x(t)|\},\quad \|z;L\|=\int\limits_0^\omega |z(t)|\,dt.$$

Как обычно, эквивалентные относительно одномерной меры Лебега функции отождествляются. Отрезок J и пространство H далее не меняются, поэтому зависимость функциональных пространств от этих параметров ниже не всегда отмечается, например, вместо $L(J,H)$ будет использоваться обозначение L.

Если $k\in\mathbb{N}$, то через $C^k(J,H)$ и $L^k(J,H)$ обозначаются соответствующие дифференциальные надстройки над пространствами $C(J,H)$ и $L(J,H)$. В частности, $C^k(J,H)$ состоит из функций $z\colon J\to H$, производные $z^{(i)}$, $i=\overline{0,k}$, которых принадлежат пространству $C(J,H)$. Аналогично пространство $L^k(J,H)$ — совокупность функций $z\colon J\to H$, производные в смысле Соболева [1] которых $z^{(i)}$, $i=\overline{0,k}$, принадлежат пространству $L(J,H)$. Полагаем

$$\|z;C^k\|=\sum_{i=0}^k\|z^{(i)};C\|,\quad \|z;L^k\|=\sum_{i=0}^k\|z^{(i)};L\|.$$

Можно считать [2, с. 140], что $L^k(J,H)$ состоит из функций z, производные которых до порядка $k-1$ включительно являются абсолютно непрерывными на отрезке J функциями.

Существенную роль далее играют замкнутые подпространства $C^k(J,H)$ и $L^k(J,H)$, обозначаемые символами $\mathscr{P}^k(J,H)$ и $V^k(J,H)$ и состоящие из функций $z\colon J\to H$, удовлетворяющих условиям

$$z^{(i)}(0)=z^{(i)}(\omega),\quad i=\overline{0,k-1}. \tag{2}$$

Данные функции будем называть *ω-периодическими.* Функции класса $V^k(J,H)$ допускают продолжение по периодическому закону ($z(t+\omega)=z(t)$ для любого $t\in\mathbb{R}$) на всю действительную ось. Продолженная таким образом функция имеет абсолютно непрерывные производные до порядка $k-1$ включительно на каждом отрезке $J_1\subset\mathbb{R}$.

Пусть $l\in\mathbb{N}$. На пространстве $V^l(J,H)$ определим дифференциальный оператор

$$\mathscr{A}(x)=\sum_{i=0}^l a_i x^{(i)}. \tag{3}$$

Коэффициенты a_i, $i<l$, оператора (3) — это квадратные матрицы порядка $m\times m$, столбцы которых принадлежат пространству $L(J,H)$. Квадратная матрица $a_l(t)$ обратима при каждом t из J, столбцы матриц $a_l(t)$ и $a_l^{-1}(t)$ принадлежат $C(J,H)$ и $a_l(0)=a_l(\omega)$. Оператор $\mathscr{A}$ действует из пространства $V^l(J,H)$ в пространство $L(J,H)$ и непрерывен.

Будем далее считать, что ядро $\operatorname{Ker}\mathscr{A}=\{z\in V^l(J,H)\colon \mathscr{A}(z)=0\}$ оператора $\mathscr{A}$ тривиально, т.е. однородное уравнение $\mathscr{A}(x)=0$ имеет лишь нулевое решение, удовлетворяющее периодическим краевым условиям (2) с $k=l$. При этом предположении оператор $\mathscr{A}$ является изоморфизмом пространств $V^l(J,H)$ и $L(J,H)$. Равенство $\|z\|_{\mathscr{A}}=\|\mathscr{A}(z);L\|$ определяет в $V^l(J,H)$ норму, эквивалентную норме $\|z;V^l\|$. Обратный к $\mathscr{A}\colon V^l(J,H)\to L(J,H)$ оператор $\mathscr{A}^{-1}\colon L(J,H)\to V^l(J,H)$ непрерывен. Справедлива оценка

$$k_1\|x;V^l\|\leqslant\|\mathscr{A}(x);L\|\leqslant k_2\|x;V^l\|, \tag{4}$$

где k_1, k_2 — константы, не зависящие от x из пространства V^l. Левое из неравенств (4) называют *неравенством коэрцитивности.* Сохраним обозначение $\mathscr{A}^{-1}$ и для сужения этого оператора на пространство $C(J,H)$. Тривиальность ядра $\operatorname{Ker}(\mathscr{A})$ влечёт за собой непрерывность оператора $\mathscr{A}^{-1}\colon C(J,H)\to\mathscr{P}^l(J,H)$.

Остановимся на усилении неравенства коэрцитивности, возникающем при дополнительном предположении типа положительности векторной функции $z=\mathscr{A}(x)$. Пусть δ — положительное число, $e\in H$ и $|e|>\delta$. Множество $K(e,\delta)=\{h\in H\colon (e,h)\geqslant\delta|h|\}$ содержит внутренние точки, его называют эллиптическим конусом. Элемент e задаёт осевое направление конуса $K(e,\delta)$. Любой конус в H есть часть некоторого эллиптического конуса, например, ортант $H_+\subset K(\vec{1},1)$, где $\vec{1}=(1,\ldots,1)^{\mathrm{т}}$.

Пусть $\psi\in C(J,H)$, $\delta>0$ и выполнены условия

$$\psi(0)=\psi(\omega),\quad |\psi(t)|>\delta\quad \text{для любого } t\in J. \tag{5}$$

Продолжим векторную функцию ψ на всю действительную прямую по ω-периодическому закону и за продолженной функцией сохраним то же обозначение. Таким образом, функция ψ определена и непрерывна на $\mathbb{R}$ и $\psi(t+\omega)=\psi(t)$, $|\psi(t)|>\delta$, $t\in\mathbb{R}$. Параметрам $\psi(t)$ и δ можно сопоставить переменный эллиптический конус $K(\psi(t),\delta)=\{h\in H\colon (\psi(t),h)\geqslant\delta|h|\}$ в H, конус $\mathscr{K}(\psi,\delta)=\{z\in L(J,H)\colon z(t)\in K(\psi(t),\delta)$ почти всюду в $J\}$ в пространстве $L(J,H)$ и конус $K(\mathscr{A},\psi,\delta)=\{x\in V^l(J,H)\colon \mathscr{A}(x)\in\mathscr{K}(\psi,\delta)\}$ в пространстве $V^l(J,H)$. Предположение $x\in K(\mathscr{A},\psi,\delta)$ означает, что функция $z=\mathscr{A}(x)$ принадлежит $L(J,H)$ и почти при всех t из J удовлетворяет оценке $(\psi(t),z(t))\geqslant\delta|z(t)|$ — условию типа положительности функции $z(t)$. Не оговаривая каждый раз особо, считаем далее, что $\psi\in C(J,H)$, $\delta>0$ и выполнены условия (5).

Предложение 1. *Существует такая положительная постоянная $k_0=k_0(\psi,\delta,\mathscr{A})$, что для всех функций x класса $K(\mathscr{A},\psi,\delta)$ верно неравенство*

$$k_0\|\mathscr{A}x;L\|\leqslant\|x;L\|. \tag{6}$$

Предложение 1 следует из результатов работы [5], в которой устанавливаются аналогичные (6) оценки интегрально ограниченных на всей прямой функций. Объединение соотношений (6) и (4) приводит к обратному неравенству

$$k_0k_1\|x;V^l\|\leqslant\|x;L\|\quad \text{для любого } x\in K(\mathscr{A},\psi,\delta). \tag{7}$$

Если $z\in L(J,H)$, $w\in C(J,H)$, то функция $(z(t),w(t))$ суммируема на J; положим

$$\langle z,w\rangle=\int\limits_J(z(t),w(t))\,dt.$$

Из неравенства (6) следует, что

$$\langle \mathscr{A}(x), \psi\rangle \leqslant \lambda\|x;L\| \quad \text{для любого } x\in K(\mathscr{A},\psi,\delta). \tag{8}$$

Действительно, справедливы соотношения

$$\langle \mathscr{A}(x), \psi\rangle \leqslant \max_{t\in J}\{|\psi(t)|\}\|Ax;L\| \leqslant k_0^{-1}\max_{t\in J}\{|\psi(t)|\}\|x;L\|.$$

Оценка (8) верна с $\lambda = k_0^{-1}\max_{t\in J}\{|\psi(t)|\}$.

3. ОЦЕНКИ ЧИСЛА ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ (1)

Далее изучается нелинейное дифференциальное уравнение (1). Сохраняются введённые в п. 2 предположения относительно оператора $\mathscr{A}$, функции ψ и числа δ. Постоянные k_i, $i=0,1,2$, λ таковы, что имеют место оценки (6)–(8). Функция $f(t,\xi_0,\ldots,\xi_{l-1})$ определена и непрерывна по совокупности переменных $t\in J$, $\xi_i\in H$, $i=\overline{0,l-1}$, $y\in L(J,H)$. Для краткости введём более простые обозначения: $X=V^l(J,H)$, $Y=L(J,H)$. Определим операторы $\mathscr{F},\mathscr{D}\colon X\to Y$ равенствами

$$\mathscr{F}(x) = f(t,x,\ldots,x^{l-1}), \quad \mathscr{D}(x) = \mathscr{A}(x) - \mathscr{F}(x).$$

Введём дополнительные условия на функцию f:

I. $f(t,\xi)\in K(\psi(t),\delta)$ для любого $t\in J$, $\xi=(\xi_0,\ldots,\xi_{l-1})\in H^l$;

II. $|f(t,\xi)|\geqslant \mu|\xi_0| - r_0(t)$ для любого $t\in J$, $\xi\in H^l$, где $\mu\delta>\lambda$, $r_0\in L(J)$.

Теорема 1. *Пусть однородное уравнение $\mathscr{A}(x)=0$ имеет лишь нулевое решение, удовлетворяющее периодическим краевым условиям (2) с $k=l$. Пусть функция $f(t,\xi)$ удовлетворяет условиям I, II. Тогда*

1) *для ω-периодических решений уравнения (1) справедлива оценка*

$$\|x;X\| \leqslant \varphi(\|y;Y\|), \tag{9}$$

где φ — возрастающая на $[0,+\infty)$ функция;

2) *если $y\in Y$, $y(t)\in K(\psi(t),\delta)$ и*

$$\langle y,\psi\rangle > \delta\int\limits_J r_0(t)\,dt, \tag{10}$$

то уравнение (1) не имеет ω-периодических решений.

Доказательство. Пусть $y\in Y$, $\|y;Y\|\leqslant R$, x — ω-периодическое решение уравнения (1), $u=\mathscr{A}^{-1}\mathscr{F}(x)$, $v=\mathscr{A}^{-1}y$. Тогда $x=u+v$, $\mathscr{A}(u)=\mathscr{F}(u+v)$, поэтому $u\in K(\mathscr{A},\psi,\delta)$. Из (8) следует оценка

$$\langle \mathscr{A}(u),\psi\rangle \leqslant \lambda\|u;L\|. \tag{11}$$

С другой стороны, $\mathscr{A}(u)=\mathscr{F}(u+v)\in K(\mathscr{A},\psi,\delta)$, поэтому

$$(\mathscr{A}(u),\psi) = (\mathscr{F}(u+v),\psi) \geqslant \delta|\mathscr{F}(u+v)| \geqslant \delta\mu(|u(t)|-|v(t)|) - \delta r_0(t).$$

Интегририруя последнее неравенство по отрезку J, получаем оценку снизу

$$\langle \mathscr{A}(u),\psi\rangle \geqslant \delta\mu(\|u;L\|-\|v;L\|) - \delta\|r_0;L\|. \tag{12}$$

Объединение (11) и (12) влечёт за собой неравенство

$$\lambda\|u;L\| \geqslant \mu\delta\|u;L\| - R_1, \tag{13}$$

в котором R_1 — постоянная, зависящая лишь от R.

В условиях теоремы $\mu\delta > \lambda$, поэтому из (13) вытекает оценка $\|u;L\| \leqslant R_2$, где постоянная R_2 зависит лишь от R. В свою очередь, из этой оценки в силу обратного неравенства (7) следует оценка $\|u;V^l\| \leqslant R_3$, которая вместе с очевидным неравенством $\|v;V^l\| \leqslant \leqslant \|\mathscr{A}^{-1}\|\|y;L\| \leqslant \|\mathscr{A}^{-1}\|R$ влечёт за собой оценку $\|x;V^l\| \leqslant R_4$, где R_4 зависит лишь от R. Полученная оценка доказывает утверждение 1) теоремы.

Утверждение 2) теоремы докажем от противного. Предположим, что для некоторого y, удовлетворяющего условиям теоремы, уравнение (1) имеет ω-периодическое решение x. Таким образом, $\mathscr{A}(x) = \mathscr{F}(x) + y$. Поскольку $y \in K(\psi,\delta)$, то $x \in K(\mathscr{A},\psi,\delta)$. Из (8) следует аналогичная (11) оценка

$$\langle \mathscr{A}(x), \psi\rangle \leqslant \lambda\|x;L\|. \tag{14}$$

С другой стороны,

$$(\mathscr{A}(x),\psi) = (\mathscr{F}(x),\psi) + (y,\psi) \geqslant \delta|\mathscr{F}(x)| + (y,\psi) \geqslant \delta(\mu|x| - r_0(t)) + (y,\psi) = \delta\mu|x| + (y,\psi) - \delta r_0(t).$$

Интегрируя это неравенство, приходим к соотношению

$$\langle \mathscr{A}(x),\psi\rangle \geqslant \delta\mu\|x;L\| + \int\limits_J ((y(t),\psi(t)) - \delta r_0(t))\,dt. \tag{15}$$

Объединение (14) и (15) даёт неравенство

$$\lambda\|x;L\| \geqslant \delta\mu\|x;L\| + \int\limits_J ((y(t),\psi(t)) - \delta r_0(t))\,dt,$$

противоречащее (10) и условию $\delta\mu > \lambda$. Теорема доказана.

Обозначим через E банахово пространство $E = C^{l-1}(J,H)$. Поскольку пространство $X = V^l(J,H)$ непрерывно вложено в пространство $E = C^{l-1}(J,H)$, то для ω-периодических решений x уравнения (1) из (9) следует оценка

$$\|x;E\| \leqslant \varphi_1(\|y;Y\|), \tag{16}$$

здесь φ_1 — возрастающая на $[0,+\infty)$ функция.

Если $u \in E$, то $\mathscr{F}(u) \in C(J,H)$ и оператор $\mathscr{F}\colon E \to C(J,H)$ непрерывен. Оператор $\mathscr{A}^{-1}$ действует из $C(J,H)$ в $C^l(J,H)$ и непрерывен, а пространство $C^l(J,H)$ компактно вложено в E. Отсюда следует, что оператор $\mathscr{G} = \mathscr{A}^{-1}\mathscr{F}$ действует и вполне непрерывен в пространстве E. Равенство $x = \mathscr{G}(x) + \mathscr{A}^{-1}(y)$ эквивалентно тому, что x — ω-периодическое решение уравнения (1). Множество неподвижных точек вполне непрерывного в пространстве E оператора $\mathscr{G}_y(x) = \mathscr{G}(x) + \mathscr{A}^{-1}(y)$ совпадает с множеством ω-периодических решений уравнения (1).

Рассмотрим семейство вполне непрерывных в E векторных полей $\Phi_y(x) = x - \mathscr{G}_y(x)$. Данные поля зависят от выбора параметра $y \in Y$, но если рассматривать y из шара $\mathbf{B}_r = \|y;Y\| \leqslant r$, то все неподвижные точки отображения $\mathscr{G}_y$ содержатся в шаре $\|x;E\| \leqslant R$, где $R = \varphi_1(r)$ согласно (16). При некотором y из $\mathbf{B}_r$ (r достаточно велико) отображение $\mathscr{G}_y$ не имеет неподвижных точек. Установленные свойства неподвижных точек приводят к равенству

$$\operatorname{ind}(\Phi_y,\infty) = 0. \tag{17}$$

Это означает, что если $\rho > R$, то вращение векторного поля Φ_y на границе шаров $\|x; E\| \leqslant \rho$ одинаково и равно нулю.

По известным схемам [7, гл. 6] равенство (17) может быть использовано для доказательства не менее двух периодических решений уравнения (1). Например, если существует изолированное ω-периодическое решение x_0 уравнения (1) ненулевого индекса $\operatorname{ind}(x_0; \Phi_y)$, то можно гарантировать существование отличного от x_0 ω-периодического решения.

Остановимся на реализации этого подхода в одном частном, но важном случае. Отметим дополнительные свойства оператора $\mathscr{D}\colon X \to Y$.

Лемма 1. *Пусть $x_n \in X$ и последовательность $y_n = \mathscr{D}(x_n)$ сходится к y в метрике пространства Y. Тогда некоторая подпоследовательность последовательности x_n сходится к элементу $x \in X$ в метрике X и $\mathscr{D}(x) = y$.*

Доказательство. Так как $\mathscr{D}(x_n) = y_n$ и $y_n \to y$, то последовательность x_n ограничена в пространствах X и E. Положим $u_n = \mathscr{A}^{-1}\mathscr{F}(x_n)$, $v_n = \mathscr{A}^{-1}y_n$, тогда $x_n = \mathscr{A}^{-1}(\mathscr{F}(x_n) + y_n) = u_n + v_n$. Последовательность v_n сходится к $v = \mathscr{A}^{-1}y$ в пространствах X и E. Последовательности $\mathscr{F}(x_n)$ и $u_n = \mathscr{A}^{-1}\mathscr{F}(x_n)$ ограничены в пространствах $C(J, H)$ и $C^l(J, H)$ соответственно. Поскольку $C^l(J, H)$ компактно вложено в $E = C^{l-1}(J, H)$, то, не нарушая общности, можно считать, что u_n сходится в E. Но тогда и последовательность $x_n = u_n + v_n$ сходится в E. Из равенства $u_n = \mathscr{A}^{-1}\mathscr{F}(x_n)$ следует сходимость u_n в пространстве $C^l(J, H)$ и $X = V^l(J, H)$. Таким образом, последовательность $x_n = u_n + v_n$ сходится в пространстве X к элементу x. Равенство $\mathscr{D}(x) = y$ следует из отмеченных свойств последовательностей x_n и y_n. Лемма доказана.

Лемма 2. *Оператор $\mathscr{D}\colon X \to Y$ собственный, т.е. для любого компактного множества $\mathscr{M} \subset Y$ его прообраз $\mathscr{D}^{-1}(\mathscr{M})$ есть компакт в X.*

Утверждение леммы 2 является простым следствием леммы 1.

Рассмотрим случай, когда функция $f(t, \xi)$ имеет непрерывную производную по переменной ξ. Это предположение гарантирует гладкость отображения $\mathscr{D}\colon X \to Y$. При каждом $x \in X$ производная $\mathscr{D}'(x)$ есть линейный фредгольмов оператор нулевого индекса: размерности ядра и коядра оператора $\mathscr{D}'(x)$ одинаковы [9]. Множество гладких фредгольмовых отображений нулевого индекса обозначают символом $\Phi_0 C^1(X, Y)$. Непрерывная дифференцируемость функции f по переменной ξ гарантирует включение $\mathscr{D} \in \Phi_0 C^1(X, Y)$. Для отображения $\mathscr{D}$ можно обычным образом ввести понятия регулярной точки и регулярного значения. Именно, элемент u, принадлежащий X, для которого линейный оператор $\mathscr{D}'(u)$ отображает X на Y, называют *регулярной точкой отображения* $\mathscr{D}$. Элемент y из Y называют *регулярным значением отображения* $\mathscr{D}$, если прообраз $\mathscr{D}^{-1}(y)$ этого элемента либо пуст, либо состоит из регулярных точек. Обозначим через $\mathscr{R}(\mathscr{D})$ множество регулярных значений отображения $\mathscr{D}$. В рассматриваемом случае $\mathscr{D}\colon X \to Y$ — собственное отображение класса $\Phi_0 C^1(X, Y)$. Из теоремы С. Смейла [8] тогда следует, что $\mathscr{R}(\mathscr{D})$ является открытым всюду плотным в пространстве Y множеством; для любого регулярного значения y множество $\mathscr{D}^{-1}(y)$ конечно (возможно и пустое). Специфика рассматриваемого случая позволяет усилить данный результат. Ниже $\operatorname{Im}(\mathscr{D})$ — область значений оператора $\mathscr{D}\colon X \to Y$.

Теорема 2. *Пусть однородное уравнение $\mathscr{A}(x) = 0$ имеет лишь нулевое решение, удовлетворяющее периодическим краевым условиям (2) с $k = l$. Пусть функция f удовлетворяет условиям I, II и непрерывно дифференцируема по переменной $\xi \in H^l$. Тогда при любом y из $\mathscr{R}(\mathscr{D})$ уравнение (1) имеет чётное число ω-периодических решений, а для y из $\operatorname{Im}(\mathscr{D}) \cap \mathscr{R}(\mathscr{D})$ число подобных решений уравнения (1) не менее двух.*

Доказательство. Пусть $y \in \operatorname{Im}(\mathscr{D}) \cap \mathscr{R}(\mathscr{D})$ и $\mathscr{D}(u) = y$. Тогда $\mathscr{D}'(u)$ — обратимый оператор. Это эквивалентно тому, что число 1 не является собственным значением оператора $\mathscr{A}^{-1}\mathscr{F}'(u)$. Следовательно, индекс особой точки u вполне непрерывного поля $\Phi_y(x) =$

$=x-\mathscr{A}^{-1}(\mathscr{F}(x)+y)$ равен ± 1 [6; 7, с. 148]. Из равенства (17) и теоремы об алгебраическом числе особых точек [7, с. 139] вытекает, что уравнение $\mathscr{D}(x)=y$ имеет чётное число решений, которое, очевидно, не меньше двух. Если $y\notin \mathrm{Im}(\mathscr{D})$, то периодических решений уравнения (1) не существует. Следовательно, утверждение теоремы верно для всех y из $\mathscr{R}(\mathscr{D})$. Теорема доказана.

Таким образом, при выполнении условий теоремы 2 уравнение (1) имеет, как правило, чётное число периодичеких решений.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Существенным для результатов пп. 2, 3 требованием является условие положительности в некотором смысле функции $z=\mathscr{A}(x)$. Это требование заведомо выполняется, если $z(t)$ принадлежит фиксированному (не зависящему от t) конусу $K\subset H$. В этом случае в качестве $\psi(t)$ можно взять некоторую постоянную вектор-функцию. Например, если $z(t)\in\mathbb{R}^m_+$ (все компоненты вектор-функции $z(t)$ неотрицательны), то можно положить $\psi(t)=\vec{1}=(1,\ldots,1)^{\mathrm{т}}$.

Приведём более "геометричный" вариант предложения 1. Введём обозначения: $Kv(H)$ — совокупность непустых выпуклых компактных подмножеств H; $\mathbb{B}=\{v\in H\colon |v|\leqslant 1\}$ — шар единичного радиуса с центром в нуле θ; если $Q_1,Q_2\in Kv(H)$, то $h_0(Q_1,Q_2)=\min_{t\geqslant 0}\{Q_2\subset Q_1+t\mathbb{B}\}$ — уклонение множества Q_2 от множества Q_1. Если $v_0\in H$, $Q\in Kv(H)$, то

$$h_0(Q,v_0)=\min_{v\in Q}|v-v_0|,\quad h_0(v_0,Q)=\max_{v\in Q}|v-v_0|.$$

Число $h(Q_1,Q_2)=\max\{h_0(Q_1,Q_2),\ h_0(Q_2,Q_1)\}$ называют *расстоянием* (по Хаусдорфу) между Q_1 и Q_2. Относительно метрики Хаусдорфа $Kv(H)$ есть полное метрическое пространство.

Метрической проекцией нуля θ на множество Q класса $Kv(H)$ называют такой элемент $v=Pr(Q)$ из Q, что $|v|=\min_{z\in Q}\{|z|\}$. Проекция определяется однозначно и непрерывно зависит от Q. Если $Q\in Kv(H)$, $\theta\notin Q$, $\psi=Pr(Q)$, $r=|\psi|$, $R=\max_{z\in Q}\{|z|\}$, то имеет место неравенство $(\psi,z)\geqslant r^2R^{-1}|z|$ для всех $z\in Q$ [5]. Отсюда следует, что коническая оболочка $K=\mathrm{con}(Q)$ множества Q принадлежит более широкому эллиптическому конусу $K(\psi,\delta)$ при $\delta=r^2R^{-1}$.

Обозначим через $Q(t)$ мультиотображение из $\mathbb{R}$ в $Kv(H)$, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) отображение $Q\colon\mathbb{R}\to Kv(H)$ непрерывно и периодично: $Q(t+\omega)=Q(t)$;

(ii) справедливо неравенство

$$0<r\leqslant h_0(Q(t),\theta), \tag{18}$$

постоянная r не зависит от t.

В силу (18) при любом t нуль θ отстоит от выпуклого компакта $Q(t)$ на расстояние не меньшее, чем $r>0$. Вместе с тем $Q(t)$ содержится в шаре $R\mathbb{B}=\{z\in H\colon |z|\leqslant R\}$, где $R=\max_{t\in J}\{h_0(\theta,Q(t))\}$. Введём в рассмотрение функцию $\psi(t)=Pr(Q(t))$ — метрическую проекцию θ на $Q(t)$. Функция $\psi\colon\mathbb{R}\to H$ непрерывна, ω-периодична и $|\psi(t)|\geqslant r$.

Пусть $K(Q(t))=\mathrm{con}(Q(t))$ — коническая оболочка множества $Q(t)$. Тогда справедливо неравенство

$$(\psi(t),z)\geqslant\frac{r^2}{R}|z|\quad\text{для любого } z\in K(Q(t)),$$

эквивалентное включению $\mathrm{con}(Q(t))\subset K(\psi(t),\delta)$ при $\delta=r^2R^{-1}$. Таким образом, при выполнении условий (i), (ii) переменный конус $K(Q(t))$ составляет часть переменного эллиптического конуса $K(\psi(t),\delta)$.

Обозначим через $\mathscr{K}(\mathscr{A},Q)$ совокупность функций класса $V^l(J,H)$, для которых $\mathscr{A}(x)(t)\in$ $\in K(Q(t))$ почти всюду в J.

Предложение 2. *Пусть мультиотображение Q удовлетворяет условиям (i), (ii). Тогда найдётся такая постоянная $c(\mathscr{A},Q)$, что для всех функций x класса $\mathscr{K}(\mathscr{A},Q)$ верно неравенство*

$$\|x;V^l\| \leqslant c(\mathscr{A},Q)\|x;L\|.$$

Предложение 2 вытекает из теоремы 3 работы [5]. Им удобно пользоваться в тех случаях, когда условие положительности функции $z=\mathscr{A}(x)$ задаётся в виде $z(t)\in K(Q(t))=\operatorname{con}(Q(t))$. Такого рода предположение используется часто (см., например, [3]). Условие I на функцию f может быть записано в виде $f(t,\xi)\in K(Q(t))$. Для выполнения условия II достаточно, например, чтобы функция f удовлетворяла неравенству $|f(t,\xi_0,\ldots,\xi_{l-1})|\geqslant g(|\xi_0|)$, где $g\colon [0,+\infty)\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция, для которой $s^{-1}g(s)\to\infty$ при $s\in\infty$. Данным замечанием удобно пользоваться, когда точное значение постоянной λ, фигурирующей в оценке (8), неизвестно. В общем случае условие II — это предположение сильного роста функции f по переменной ξ_0.

В ряде ситуаций одно из ω-периодических решений уравнения (1) известно и представляют интерес другие его периодические решения. Приведём один из результатов в данном направлении, считая функцию f непрерывно дифференцируемой по переменным ξ_i, $i=\overline{0,l-1}$. Пусть x_* — ω-периодическое решение уравнения (1) при некотором y;

$$b_i(t)=f'_{\xi_i}\big(t,x_*(t),\ldots,x_*^{(l-1)}(t)\big),\quad i=\overline{0,l-1}.$$

Определим дифференциальный оператор $\mathscr{A}_1$ равенством

$$\mathscr{A}_1(v)=\sum_{i=0}^{l-1}b_i(t)v^{(i)}.$$

Теорема 3. *Если однородное дифференциальное уравнение*

$$(\mathscr{A}+\mathscr{A}_1)(u)=0 \tag{19}$$

имеет лишь нулевое ω-периодическое решение, то существует отличное от x_* ω-периодическое решение уравнения (1).

Доказательство. В условиях теоремы x_* — особая точка вполне непрерывного в нормированном пространстве $E=C^{l-1}(J,H)$ векторного поля $\Phi_y(x)=x-\mathscr{A}^{-1}(\mathscr{F}(x)+y)$. Поскольку уравнение (19) не имеет ненулевых ω-периодических решений, то $\operatorname{ind}(x_*,\Phi_y)=\pm1$ [7, с. 144]. В силу теоремы об алгебраическом числе особых точек и равенств $\operatorname{ind}(\Phi_y,\infty)=0$, $\operatorname{ind}(x_*,\Phi_y)=\pm1$ векторное поле Φ_y имеет отличные от x_* особые точки. Теорема доказана.

В качестве x_* часто фигурирует нулевое решение. Например, если $y=0$ и $f(t,0,\ldots,0)=0$, то уравнение (1) имеет нулевое периодическое решение. В этом случае можно применить теорему 3 для доказательства существования ненулевого ω -периодического решения уравнения (1). В частности, если

$$b_i(t)=f'_{\xi_i}(t,0,\ldots,0)=0,\quad i=\overline{0,l-1},$$

то существует ненулевое ω-периодическое решение уравнения (1).

Покажем это на простом примере. Рассмотрим следующую задачу:

$$-x''+x=(2+\sin t)x^2g_1(x')+y(t),\quad x(0)=x(2\pi),\quad x'(0)=x'(2\pi). \tag{20}$$

Здесь $m=1$, $l=2$, дифференциальный оператор $\mathscr{A}(x)=-x''+x$, $\omega=2\pi$. Ядро оператора $\mathscr{A}$ тривиально. Если g_1 — гладкая функция и $g_1(s)\geqslant1$, то функция $f(t,\xi_0,\xi_1)=(2+\sin t)\xi_0^2g_1(\xi_1)$

удовлетворяет условиям теорем 1, 2. Действительно, $f(t,\xi_0,\xi_1)\geqslant\xi_0^2$, а это гарантирует выполнение условий I, II теоремы 1. Гладкость функции g_1 обеспечивает гладкость функции f. Как правило, задача (20) имеет чётное число решений. Если $y(t)$ — неотрицательная функция и норма $\|y;L\|$ достаточно велика, то задача (20) не имеет решений. При $y=0$ существует не менее двух решений задачи (20), одно из которых тривиально. В рассматриваемом примере функция f может сколь угодно быстро расти по переменной ξ_1.

Развитый в работе подход, основанный на обратных неравенствах, применим и к краевым задачам для нелинейных эллиптических уравнений (см., например, [10]). Достаточно полный список публикаций, посвящёных приложениям нелинейного анализа к граничным задачам, приведён в обзоре [9].

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. — М. : Наука, 1988. — 333 с.
2. Никольский, С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский. — М. : Наука, 1977. — 455 с.
3. Красносельский, М.А. Нелинейные почти периодические колебания / М.А. Красносельский, В.Ш. Бурд, Ю.С. Колесов. — М. : Наука, 1970. — 351 с.
4. Красносельский, М.А. Позитивные линейные системы / М.А. Красноселький, Е.А. Лифшиц, А.В. Соболев. — М. : Наука, 1985. — 255 с.
5. Климов, В.С. Оценки интегрально ограниченных решений линейных дифференциальных неравенств / В.С. Климов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 9. — С. 1157–1171.
6. Лере, Ж. Топология и функциональные уравнения / Ж. Лере, Ю. Шаудер // Успехи мат. наук. — 1946. — Т. 1, № 3–4. — С. 71–95.
7. Красносельский, М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 511 с.
8. Smale, S. An infinite dimentional of Sard's theorem / S. Smale // Amer. J. Math. — 1965. — V. 87. — P. 861–867.
9. Звягин, В.Г. Ориентированная степень фредгольмовых отображений. Метод конечномерной редукции / В.Г. Звягин, Н.М. Ратинер // Соврем. математика. Фунд. направления. — 2012. — Т. 44. — С. 3–171.
10. Климов, В.С. Обратные функциональные неравенства и их приложения к нелинейным краевым задачам / В.С. Климов, А.Н. Павленко // Сиб. мат. журн. — 2001. — Т. 42, № 4. — С. 781–795.

ON DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH EVEN NUMBER OF PERIODIC SOLUTIONS

© 2025 / **V. S. Klimov**

P.G. Demidov Yaroslavl State University, Russia
e-mail: vsk76@list.ru

We distingulshed a class of nonlinear ordinary differential equations having even number of periodic solutions. The conditions of existing of at least two such soluitions are given.

Keywords: nonlinear differential equation, periodic solution

REFERENCES

1. Sobolev, S.L., *Nekotorye primeneniya funcionalnogo analiza v matematicheskoi fizike* (Some Applications of Functional Analysis to Mathematical Physics), Moscow: Nauka, 1988.
2. Nikolskii, S.M., *Priblizhenie funcii mnogih peremennyh i teoremy vlozheniya* (Approximation of Multivariable Functions and Embedding Theorems), Moscow: Nauka, 1977.
3. Krasnoselsky, M.A., Burd, V.Sh., and Kolesov, Yu.S., *Nelineinye pochti periodicheskie kolebaniya* (Nonlinear Almost-Periodic Oscillations), Moscow: Nauka, 1970.
4. Krasnoselsky, M.A., Lifshitz, E.A., and Sobolev, A.V., *Pozitivnye lineinye sistemy* (Positive Linear Systems), Moscow: Nauka, 1985.
5. Klimov, V.S., Estimates of integrally bounded solutions of linear differential inequalities, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 9, pp. 1151–1165.
6. Lere, Zh. and Shauder, Yu., Topology and functional equations, *Usp. Mat. Nauk*, 1946, vol. 1, no. 3–4, pp. 71–95.
7. Krasnoselsky, M.A. and Zabreiko, P.P., *Geometricheskie metody nelineinogo analiza* (Geometric Methods of Non-Linear Analysis), Moscow: Nauka, 1975.
8. Smale, S., An infinite dimensional version of Sard's theorem, *Amer. J. Math.*, 1965, vol. 87, pp. 861–867.
9. Zvyagin, V.G. and Ratiner, N.M., Oriented degree of Fredholm maps: finite-dimensional reduction method, *J. Math. Sci.*, 2015, vol. 204, pp. 543–714.
10. Klimov, V.S. and Pavlenko, A.N., Reverse functional inequalities and their applications to nonlinear elliptic boundary value problems, *Siberian Math. J.*, 2001, vol. 42, no. 4, pp. 656–667.