ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 2, с. 177–189

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.7

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ АМБАРЦУМЯНА

© 2025 г. Х. К. Ишкин

Уфимский университет науки и технологий

e-mail: ishkin62@mail.ru

Поступила в редакцию 07.09.2024 г., после доработки 13.11.2024 г.; принята к публикации 28.11.2024 г.

Для оператора Штурма–Лиувилля на полуоси с комплексным убывающим потенциалом, допускающим аналитическое продолжение в некоторую окрестность нуля, получен и доказан аналог теоремы Амбарцумяна.

Ключевые слова: спектр, теорема Амбарцумяна, оператор Штурма–Лиувилля, комплексный потенциал

DOI: 10.31857/S0374064125020032, EDN: HXKPHP

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть q — вещественная суммируемая на интервале $(0,\pi)$ функция, L — оператор, порождённый в пространстве $L^2(0,\pi)$ выражением $-y''+qy$ и краевыми условиями $y'(0)=y'(\pi)=0$. Теорема Амбарцумяна [1] утверждает, что если спектр оператора L совпадает с последовательностью $\{k^2\}_{k=0}^{\infty}$, то $q=0$ п.в. на $(0,\pi)$. Этот результат явился отправной точкой для развития теории обратных спектральных задач. Позже выяснилось, что случай, рассмотренный В.А. Амбарцумяном, был исключительным: вообще говоря, для определения потенциала необходимы два спектра [2]. Различные обобщения теоремы Амбарцумяна можно найти в работах [3–7], в которых рассматривался только положительный оператор с дискретным спектром, обладающий важным свойством: собственная функция, соответствующая наименьшему собственному значению, реализует минимум квадратичной формы и не имеет нулей [8, гл. 13, § 1]. Именно на этом свойстве основана методика указанных работ, поэтому она не могла быть применима к оператору, который не полуограничен ни снизу, ни сверху. В статье [9] был предложен новый подход, позволивший обобщить теорему Амбарцумяна для самосопряжённого оператора Дирака, который не полуограничен. Что касается несамосопряжённых операторов, автором получен следующий результат.

Теорема 1 [10]. *Пусть $L=H_\theta+V$, где H_θ — оператор, порождённый в $L^2(0,+\infty)$ дифференциальным выражением $-y''+e^{i\theta}x^\alpha y$ $(\alpha>0,\ 0<|\theta|<\pi)$ и краевым условием $y(0)=0$, V — оператор умножения на финитную суммируемую функцию $V(\cdot)$. Далее пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — собственные числа операторов L и H_θ соответственно, пронумерованные в порядке возрастания их модулей с учётом алгебраических кратностей. Тогда если*

$$\mu_n\sim\lambda_n+o(\lambda_n^{1-1/\alpha}),\quad n\to\infty, \tag{1}$$

то $V=0$ п.в. и, следовательно, $\mu_n=\lambda_n$, $n\in\mathbb{N}$.

Отметим, что в утверждении теоремы 1 вместо совпадения спектров возмущённого и невозмущённого операторов предполагается лишь их асимптотическая эквивалентность. Кроме того, из доказательства этой теоремы в [10] видно, что её утверждение верно при любых краевых условиях вида $y'(0)+hy(0)=0$ $(h\in\mathbb{C})$. Поэтому, в отличие от всех перечисленных выше результатов, утверждение теоремы 1 представляется скорее закономерным, чем исключительным. Причина, возможно, кроется в спектральной неустойчивости оператора H_θ. А именно, если f_n и f_n^* $(n\in\mathbb{N})$ — собственные функции операторов H_θ и H_θ^*, отвечающие λ_n и $\overline{\lambda}_n$, то последовательность чисел обусловленности

$$k_n(\theta)=\frac{\|f_n\|\|f_n^*\|}{(f_n,f_n^*)},\quad n\in\mathbb{N},$$

при $0<|\theta|<\pi$ имеет экспоненциальный рост [11]: $k_n(\theta)>C_0e^{C_1n}$, где C_0, C_1 — положительные постоянные, зависящие только от θ. Из-за этого спектр H_θ $(0<|\theta|<\pi)$, лежащий на луче $\arg\lambda=2\theta/(2+\alpha)$ (см. [11, 12]), может сильно меняться при малых возмущениях. В работе [10] показано, что существуют сколь угодно гладкие финитные функции V такие, что спектр оператора L состоит из двух серий: первая имеет такую же асимптотику, что и $\{\lambda_n\}$, а вторая асимптотически локализована около луча $\arg\lambda=0$. По мнению автора именно в этом причина эффекта, описанного в теореме 1: при указанных условиях на оператор V оценка (1) возможна только при $V=0$.

В данной статье на примере оператора Штурма–Лиувилля с убывающим потенциалом показано, что аналогичный эффект может иметь место, когда дискретный спектр имеет конечную предельную точку.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть функция q суммируема на любом отрезке $[\alpha,\beta]$ из $\mathbb{R}_+:=(0,+\infty)$ и удовлетворяет оценкам

$$q(x)\to 0,\quad x\to+\infty, \tag{2}$$

$$\int\limits_0^1 x|q(x)|\,dx<\infty. \tag{3}$$

Рассмотрим оператор H, действующий в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ по правилу

$$Hy=-y''+qy, \tag{4}$$

$$D(H)=\{y\in L^2(\mathbb{R}_+)\colon y'\in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+),\ \ -y''+qy\in L^2(\mathbb{R}_+),\ \ y(0)=0\}. \tag{5}$$

Здесь и всюду далее $AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ — множество функций, абсолютно непрерывных на любом отрезке $[0,\beta]$ $(\beta>0)$.

При выполнении условий (2) и (3) (ниже на q будут наложены два дополнительных ограничения) будет показано (леммы 1, 2), что оператор H является относительно компактным в смысле квадратичных форм возмущением оператора H_0, ассоциированного с полуторалинейной формой h_0, определённой как

$$h_0[f,g]=\int\limits_0^{+\infty} f'\overline{g'}\,dx=(f',g'), \tag{6}$$

$$D(h_0)=Q_0:=\{y\in L^2(\mathbb{R}_+)\colon y\in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+),\ \ y'\in L^2(\mathbb{R}_+),\ \ y(0)=0\}. \tag{7}$$

Оператор H_0 самосопряжён, положителен, его спектр непрерывен и совпадает с $[0,+\infty)$ [13, гл. 6, § 4]. Поэтому H — m-секториальный оператор и $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)=[0,+\infty)$ (см. следствие 2). Кроме существенного спектра оператор H может иметь конечное или счётное множество собственных значений $\sigma_{\rm disc}(H) := \{\lambda_k\}_{k=1}^N$ ($N \leqslant \infty$) и спектральных особенностей $\mathfrak{S} := \{\rho_k\}_{k=1}^K$ ($K \leqslant \infty$), лежащих на полуоси $[0, +\infty)$ [14, § 29]. Известно, что если $N = \infty$, то $\sigma_{\rm disc}(H)$ может сгущаться только к $[0, +\infty)$. При сделанных предположениях относительно потенциала q ничего более определённого о множествах $\sigma_{\rm disc}(H)$ и $\mathfrak{S}$ сказать нельзя. Как показано в работах [15, 16], множество $\mathfrak{S}$ и множество предельных точек дискретного спектра могут иметь достаточно произвольный вид.

Сформулируем первое дополнительное ограничение на q:

$$\sigma_{\rm disc}(H) \text{ бесконечен и имеет хотя бы одну конечную предельную точку.} \tag{8}$$

Замечание 1. Нахождение явных условий на функцию q, при которых выполняется (8), не является целью настоящей статьи (по этому поводу см. работы [15, 16] и библиографию в них). Отметим, что в [17] показано, что если

$$q(x) = -\beta x^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 2, \ \beta \in \mathbb{C},$$

то $\mathfrak{S} = \varnothing$ и

a) при $0 \leqslant |\arg \beta| < (2-\gamma)\pi/2$ множество $\sigma_{\rm disc}(H)$ состоит из бесконечного числа простых (алгебраической кратности 1) собственных чисел, имеющих вид* $\lambda_k(\beta) = -\beta^{2/(2-\gamma)} r_k$, $k \in \mathbb{N}$, где последовательность r_k не возрастает и сходится к нулю;

b) при $(2-\gamma)\pi/2 \leqslant |\arg \beta| \leqslant \pi$ дискретный спектр оператора H пуст.

Определение. Пусть Ω — область, лежащая в нижней полуплоскости так, что $[a, b] \subset \mathbb{R}$ — часть границы Ω. Будем говорить, что функция f, суммируемая на (a, b), допускает аналитическое продолжение в область Ω, если существует функция $\widetilde{f}$, принадлежащая пространству Смирнова $E_1(\Omega)$ [18, гл. 3, § 7], такая, что угловые граничные значения $\widetilde{f}$ на (a, b) п.в. совпадают с f.

Зададим второе дополнительное ограничение на q:

$$\text{существуют числа } R, \delta > 0 \text{ такие, что функция } xq \text{ допускает аналитическое продолжение}$$
$$z\widetilde{q}(z) \text{ в сектор } U = \{z\colon |z| < R, \ -\delta < \arg z < 0\} \quad \text{и} \quad \sup_{0<\alpha<\delta} \int\limits_0^R x|\widetilde{q}(xe^{-i\alpha})|\,dx < \infty. \tag{9}$$

Пусть V — оператор умножения на измеримую функцию $V(\cdot)$, удовлетворяющую условиям

$$\operatorname{supp} V \subset [0, R) \quad \text{и} \quad \int\limits_0^R x|V(x)|\,dx < \infty, \tag{10}$$

где R — постоянная, фигурирующая в условии (9). Введём оператор $T = H + V$, где сумма понимается в смысле квадратичных форм, т.е. T — оператор, ассоциированный с квадратичной формой $t[y] = h[y] + (Vy, y)$, $D(t) = D(h_0)$. В силу этого и условия (10) оператор T описывается явно по формулам, которые получаются из (4) и (5) после замены q на $q + V$.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 2. *Пусть функция q удовлетворяет условиям* (2), (8) *и* (9), *а функция V —* (10). *Тогда если $\sigma_{\rm disc}(T) = \sigma_{\rm disc}(H)$, то $V = 0$ п.в. на $\mathbb{R}_+$.*

Замечание 2. Если в условиях (9) и (10) функции xq и xV заменить на q и V соответственно, то в определении операторов H и T можно рассматривать любые краевые условия вида $y'(0) + hy(0) = 0$ ($h \in \mathbb{C}$). Из доказательства теоремы 2 будет видно, что её утверждение остаётся верным при такой замене.

---

*Здесь и всюду далее, если не оговорено иное, ветвь функции z^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) или $\sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$, выбираем так, что $z^\alpha > 0$ ($\sqrt[n]{z} > 0$) при $z > 0$.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Всюду в этом пункте считаем, что $q\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ (т.е. функция q суммируема на любом отрезке $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}_+$) и удовлетворяет оценкам (2) и (3).

Согласно (7) $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)\subset D(h_0)$, поэтому форма h_0 плотно определена. Кроме того (см. [13, гл. 6, § 4]), h_0 симметрична, неотрицательна, замкнута, оператор H_0, ассоциированный с h_0, действует по правилу

$$H_0y=-y'',$$
$$D(H_0)=\{y\in L^2(\mathbb{R}_+):\, y'\in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+),\ \ y''\in L^2(\mathbb{R}_+),\ \ y(0)=0\}$$

и $\sigma(H_0)=\sigma_{\mathrm{ess}}(H_0)=[0,+\infty)$.

Обозначим через Q оператор умножения на функцию q.

Лемма 1. *Оператор* $K=(H_0+1)^{-1/2}Q(H_0+1)^{-1/2}$ *компактен.*

Доказательство. Пусть число $\delta>0$, χ_1, χ_2, χ_3 — характеристические функции промежутков $(0,\delta)$, $[\delta,1/\delta]$ и $(1/\delta,+\infty)$ соответственно. Обозначим через Q_i $(i=\overline{1,3})$ операторы умножения на функции $q\chi_i$. Тогда $K=K_1+K_2+K_3$, где $K_i=(H_0+1)^{-1/2}Q_i(H_0+1)^{-1/2}$. Поскольку ядро резольвенты $(H_0+1)^{-1}$ имеет вид

$$G(x,t)=\begin{cases}e^{-t}\operatorname{sh}x, & 0\leqslant x<t,\\ e^{-x}\operatorname{sh}t, & 0\leqslant t\leqslant x,\end{cases}$$

то $A:=|Q_2|^{1/2}(H_0+1)^{-1}|Q_2|^{1/2}$ — оператор Гильберта–Шмидта. Если $B=(H_0+1)^{-1/2}|Q_2|^{1/2}$, то $B^*B=A$, откуда, пользуясь полярным разложением $B=U\sqrt{A}$ с подходящей частичной изометрией U, убеждаемся, что оператор B компактен. Имеем $K_2=BJB^*$, где J — оператор умножения на ограниченную измеримую функцию j, удовлетворяющую равенству $q=j|q|$ п.в. на $\mathbb{R}_+$, следовательно, оператор K_2 также компактен.

Далее, $\|K_3\|<M(\delta)$, где
$$M(\delta):=\sup_{x\geqslant 1/\delta}|q(x)|.$$

Учитывая (2), отсюда получаем
$$\|K_3\|\to 0,\quad \delta\to 0,$$

поэтому для доказательства леммы достаточно убедиться, что

$$\|K_1\|\to 0,\quad \delta\to 0.$$

Пусть $y=(H_0+1)^{-1/2}u$, $u\in L^2(\mathbb{R}_+)$. Имеем

$$(K_1u,u)=\int\limits_0^\delta q(x)|y(x)|^2\,dx=\int\limits_0^\delta\Biggl(\int\limits_x^\delta tq(t)\,dt\,\bigl(x^{-1}|y(x)|^2\bigr)'\Biggr)dx,$$

откуда, используя принцип неопределённости

$$\frac14(x^{-2}y,y)<\int\limits_0^\infty|y'|^2\,dx=\bigl\|H_0^{1/2}y\bigr\|^2,\quad y\in Q_0,$$

заключаем, что

$$|(K_1u,u)|<5F(\delta)\bigl\|H_0^{1/2}(H_0+1)^{-1/2}u\bigr\|^2<5F(\delta)\|u\|^2,\quad F(\delta)=\int\limits_0^\delta x|q(x)|\,dx.$$

Далее, с учётом равенства

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=1} |(Au, u)|$$

имеем $\|K_1\| < 5F(\delta) \to 0,\ \delta \to 0$. Лемма доказана.

Линейное подмножество Q' множества Q называется *ядром* полуторалинейной формы τ, если замыкание сужения τ на Q' совпадает с τ [13, гл. 6, § 1].

Следствие 1. *$C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ — ядро формы h.*

Доказательство. Замыкание $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ по норме $W_2^1(\mathbb{R}_+)$ есть Q_0, поэтому $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ является ядром для формы h_0. Согласно лемме 1 квадратичная форма (qy, y) ограничена относительно формы $h_0[y, y]$ с нулевой гранью (см. [8, гл. 13, задача 39]), поэтому $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ является ядром формы h.

Введём форму

$$h'[f, g] = (qf, g),$$
$$D(h') = \{f \in L^2(\mathbb{R}_+) \colon (|q|f, f) < \infty\}.$$

По доказанной лемме форма h' ограничена относительно формы h_0 и её h_0-грань равна нулю. Следовательно, форма

$$h = h_0 + h', \quad D(h) = Q_0$$

плотно определена, замкнута и секториальна. Согласно теореме о представлении [13, гл. 6, § 2] существует m-секториальный оператор $\widetilde{H}$, ассоциированный с формой h.

Лемма 2. *Оператор $\widetilde{H}$ совпадает с оператором H.*

Доказательство. Обозначим через D_0 правую часть (5) и докажем, что $D(\widetilde{H}) \subset D_0$.

Пусть $y \in D(\widetilde{H})$ и $\widetilde{H}y = f$. По теореме о представлении из [13, гл. 6, § 2]

$$(f, v) = \int_0^\infty \left(y'\overline{v'} + qy\overline{v}\right) dx, \quad v \in Q_0. \tag{11}$$

Пусть $(a, b) \subset (0, +\infty)$. Тогда равенство (11) верно для всех v, принадлежащих множеству $Q'_{ab} = \{y \in Q_0 \colon y(x) \equiv 0 \ \text{при}\ x \notin (a, b)\}$.

Обозначим через h первообразную функции $-f + qy$ на интервале (a, b), т.е.

$$h' = -f + qy \quad \text{п.в. на } (a, b).$$

В этом случае при всех $v \in Q'_{ab}$

$$\int_0^\infty (f - qy)\overline{v}\, dx = -\int_a^b h'\overline{v}\, dx = \int_a^b h\overline{v}'\, dx.$$

С другой стороны, из (11) имеем

$$\int_a^b (f - qy)\overline{v}\, dx = \int_a^b y'\overline{v}'\, dx.$$

Следовательно,

$$\int_a^b (h - y')\overline{v}' dx = 0 \quad \text{для всех } v \in Q'_{ab}. \tag{12}$$

Обозначим через φ_{ab} сужение $h-y'$ на (a,b). Тогда (12) означает, что

$$\varphi_{ab} \perp \operatorname{Ran} T_{ab}, \tag{13}$$

где T_{ab} — оператор, действующий по правилу

$$T_{ab}y = y',$$
$$D(T_{ab}) = \{v \in W_2^1(a,b)\colon v(a) = v(b) = 0\},$$

$W_2^1(a,b)$ — соболевское пространство — замыкание $C_0^\infty(a,b)$ по норме

$$\|f\|_{W_2^1(a,b)} = \left(\int\limits_a^b (|f'|^2 + |f|^2)\,dt\right)^{1/2}.$$

В свою очередь (13) равносильно утверждению $\varphi_{ab} \in \operatorname{Ker}(T_{ab}^*)$. Имеем $T_{ab}^* = -d/dx$, $D(T_{ab}^*) = W_2^1(a,b)$, так что $\varphi_{ab} = c = \mathrm{const}$ п.в. на (a,b), откуда в силу произвольности a и b $y' = h - c$ п.в. на $\mathbb{R}_+$. Следовательно, $y' \in AC[0,b]$ для любого $b > 0$ и $-y'' = f - qy$, т.е. $\widetilde{H}y = -y'' + qy$.

Докажем теперь, что $D_0 \subset D(\widetilde{H})$. По определению оператора, ассоциированного с квадратичной формой (см. [13, гл. 6, § 2]), если $y \in Q_0$, $w \in L^2(\mathbb{R}_+)$ и равенство

$$h[y,v] = (w,v) \tag{14}$$

справедливо для всех v, принадлежащих ядру формы h, то $y \in D(\widetilde{H})$ и $\widetilde{H}y = w$.

Согласно следствию 1 $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ является ядром для формы h.

Пусть $y \in D_0$ и $f = -y'' - qy$. Тогда в силу (14)

$$h[y,v] = \int\limits_0^\infty (y'\overline{v}' - qy)\overline{v}\,dx = (f,v) \quad \text{для любого } v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+).$$

Далее, интегрируя по частям, получаем

$$h[y,v] = \int\limits_0^\infty (-y'' - qy)\overline{v}\,dx = (f,v),$$

отсюда $(f-w,v) = 0$ для любого $v \in C_0^\infty(0,+\infty)$. Но замыкание $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ всюду плотно в $L^2(\mathbb{R}_+)$, а значит, $w = f$ п.в. на (a,b). Отсюда в силу произвольности a и b следует, что $y \in D(\widetilde{H})$ и $\widetilde{H}y = -y'' - qy$. Лемма доказана.

Замечание 3. Изложенная выше схема восстановления оператора по квадратичной форме применима в гораздо более общей ситуации [19].

Из известной теоремы Вейля о существенном спектре (см. следствие 2 из теоремы XIII.14 и задачу 39 в [8, гл. 13, § 4]) вытекает

Следствие 2. $\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = [0,+\infty)$.

Лемма 3. *При любом* $\lambda \in \mathbb{C}$ *уравнение*

$$-y'' + (q+V)y = \lambda^2 y \tag{15}$$

имеет два линейно независимых, непрерывных на любом отрезке $[0,b]$, $b>0$, *решения.*

Доказательство. Эти решения хорошо известны, они строятся как решения интегральных уравнений

$$S(x,\lambda) = x + \int_0^x (x-t)(q+V-\lambda^2)S(t,\lambda)\,dt,$$

$$Y(x,\lambda) = 1 - \int_x^\delta x(q+V-\lambda^2)Y(t,\lambda)\,dt - \int_0^x t(q+V-\lambda^2)Y(t,\lambda)\,dt.$$

Если $Z = S/x$, то первое уравнение равносильно уравнению

$$Z(x,\lambda) = 1 + \int_0^x (1-t/x)t(q+V-\lambda^2)Z(t,\lambda)\,dt,$$

которое в силу вольтерровости интегрального оператора однозначно разрешимо в пространстве $C[0,b]$ при любом $b>0$.

Интегральный оператор во втором уравнении не вольтерров, но является сжимающим в $C[0,\delta]$, если постоянная $\delta=\delta(\lambda)$ достаточно мала. Разрешив это уравнение, продолжим Y на любой отрезок $[\delta,b]$ как решение уравнения (15) с суммируемым на этом отрезке потенциалом. Лемма доказана.

Замечание 4. Из доказательства леммы следует, что решение S удовлетворяет начальным условиям

$$S(0,\lambda)=0, \quad S'(0,\lambda)=1 \tag{16}$$

и при каждом фиксированном $x>0$ решения S и S' — целые функции от λ.

Нам понадобится более точная информация об этих функциях.

Введём обозначения

$$\rho(r) = \int_0^{1/r} x|q(x)|\,dx, \quad r>0,$$

$$m_0(x,\lambda) = \begin{cases} x & \text{при } 0<x\leqslant 1/|\lambda|, \\ \lambda^{-1}e^{-i\lambda x} & \text{при } x>1/|\lambda|, \end{cases}$$

$$m_1(x,\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0<x\leqslant 1/|\lambda|, \\ e^{-i\lambda x} & \text{при } x>1/|\lambda|, \end{cases}$$

$$\Lambda_R = \{\lambda = re^{i\alpha}:\, r>R,\ 0\leqslant\alpha\leqslant\pi\}, \quad R>0.$$

Лемма 4. *Существует такое число $R>0$, что при любом $b>0$ для функций S и S' справедливы представления*

$$S(x,\lambda) = \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda} + \rho(|\lambda|)m_0(x,\lambda)r_0(x,\lambda), \tag{17}$$

$$S'(x,\lambda) = \cos(\lambda x) + \rho(|\lambda|)m_1(x,\lambda)r_1(x,\lambda), \tag{18}$$

$$\sup_{0<x\leqslant b,\ \lambda\in\Lambda_R} |r_k(x,\lambda)| < \infty, \quad k=0,1.$$

Доказательство. Функция S является решением интегрального уравнения

$$S(x,\lambda)=\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^x \sin(\lambda(x-t))(q(t)+V(t))S(t,\lambda)\,dt. \tag{19}$$

Положим

$$\widetilde{S}(x,\lambda)=\frac{S(x,\lambda)}{m_0(x,\lambda)},\quad \widetilde{S}_0(x,\lambda)=\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda m_0(x,\lambda)}. \tag{20}$$

Тогда уравнение (19) преобразуется к виду

$$\widetilde{S}=\widetilde{S}_0+A\widetilde{S}, \tag{21}$$

где A — интегральный оператор, действующий по формуле

$$(Af)(x,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda x}\displaystyle\int\limits_0^x \sin(\lambda(x-t))t(q(t)+V(t))f(t)\,dt, & 0<x\leqslant 1/|\lambda|,\\ e^{i\lambda x}\displaystyle\int\limits_0^{1/|\lambda|} \sin(\lambda(x-t))t(q(t)+V(t))f(t)\,dt+ & \\ +\dfrac{1}{2i\lambda}\displaystyle\int\limits_{1/|\lambda|}^x (e^{2i\lambda(x-t)}-1)(q(t)+V(t))f(t)\,dt, & x>1/|\lambda|.\end{cases}$$

Выберем произвольное положительное число $b>0$ и обозначим через $X(b,\lambda)$ $(\lambda\neq 0)$ множество функций, ограниченных на $[0,b]$ и непрерывных всюду, кроме, быть может, точки $1/|\lambda|$, в которой возможен разрыв только первого рода. Ясно, что $X(b,\lambda)$ — банахово пространство относительно нормы

$$\|f\|_X=\sup_{0\leqslant x\leqslant b}|f(x)|.$$

В силу (20) $\widetilde{S}_0\in X(b,\lambda)$. Далее непосредственными вычислениями убеждаемся, что норма оператора A в пространстве $X(b,\lambda)$ допускает оценку

$$\|A(\lambda)\|\leqslant C(b)\rho(|\lambda|),\quad \lambda\in\Lambda_R,$$

где $C(b)$ — постоянная, зависящая только от b. Следовательно, можно подобрать $R>0$ так, что уравнение (21) однозначно разрешимо при всех $\lambda\in\Lambda_R$ и

$$\widetilde{S}=\widetilde{S}_0+O(\rho(|\lambda|)),\quad \lambda\in\Lambda_R,$$

равномерно по x из $[0,b]$. Отсюда, переходя по формуле (20) обратно к S, получаем оценку (17).

Чтобы найти оценку (18), продифференцируем (19) по x:

$$S'(x,\lambda)=\cos(\lambda x)-\int\limits_0^x \cos(\lambda(x-t))(q(t)+V(t))S(t,\lambda)\,dt. \tag{22}$$

Отсюда, пользуясь уже доказанной оценкой (17), получим (18). Лемма доказана.

Замечание 5. Оценки (17) и (18) показывают, что при каждом фиксированном $x>0$ $S(x,\cdot)$ и $S'(x,\cdot)$ — целые функции экспоненциального типа.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Зафиксируем произвольное число a из интервала (b,R), где b — правый конец носителя функции V и R — постоянная, фигурирующая в условии (9). Пусть $C(x,\lambda)$ — решение уравнения (15), удовлетворяющее условиям

$$C(a,\lambda)=1,\quad C'(a,\lambda)=0.$$

Далее пусть

$$S_0(x,\lambda)=S(x,\lambda)|_{V\equiv 0},\quad C_0(x,\lambda)=C(x,\lambda)|_{V\equiv 0}.$$

Из результатов работы [12] (см. лемму 2 и теорему 1) следует, что при выполнении оценки (2) уравнение (15) при всех $\lambda\notin[0,+\infty)$ имеет единственное (с точностью до постоянного множителя) решение $u(x,\lambda)$ из $L^2(1,+\infty)$. Согласно лемме 3 функция $u(\cdot,\lambda)$, будучи продолженной как решение уравнения (15) на отрезок $[0,1]$, квадратично суммируема на нём, а значит, и на всём луче $\mathbb{R}_+$. Тогда собственные числа оператора T совпадают с корнями уравнения

$$\langle S,u\rangle(a,\lambda):=(Su'-S'u)(a,\lambda)=0. \tag{23}$$

Положим $u_0=u|_{V\equiv 0}$. Тогда $u\equiv u_0$ на $[a,+\infty)$, поэтому уравнение (23) можно записать в виде

$$\langle S,u_0\rangle(a,\lambda)=0. \tag{24}$$

Введём функцию

$$\Delta(\lambda)=\langle C_0,S_0\rangle(a,\lambda)=S_0'(a,\lambda).$$

Функция $S_0(x,0)$ является решением уравнения $-y''+qy=0$, которое удовлетворяет условиям (17), так что отлична от тождественного нуля. Поэтому, меняя при необходимости a на некоторое $a'\in(a,R)$, можно считать, что $\Delta(0)\neq 0$. В силу непрерывности функции Δ (см. замечание 5) найдётся окрестность V нуля, в которой Δ не имеет нулей. Следовательно,

$$S(x,\lambda)=a_1(\lambda)S_0(x,\lambda)-a_2(\lambda)C_0(x,\lambda),\quad x\geqslant a,\ \ \lambda\in V, \tag{25}$$

где

$$a_k(\lambda)=\frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta(\lambda)},\quad k=1,2,$$

$$\Delta_1(\lambda)=S'(a,\lambda),\quad \Delta_2(\lambda)=\langle S_0,S\rangle(a,\lambda).$$

Подставляя (25) в (24) и учитывая, что

$$\langle S_0,u_0\rangle(a,\lambda)=\langle S_0,u_0\rangle(0,\lambda)=-u_0(0,\lambda),\quad \langle C_0,u_0\rangle(a)=u_0'(a,\lambda),$$

получаем для собственных чисел оператора T следующее уравнение:

$$\Delta_1(\lambda)u_0(0,\lambda)+\Delta_2(\lambda)u_0'(a,\lambda)=0,\quad \lambda\in V.$$

По условию (8) $\sigma_{\rm disc}(T)=\sigma_{\rm disc}(H)=\{\lambda_k\}_1^\infty$ и некоторая подпоследовательность $\mu_j:=\lambda_{k_j}$ $(j\in\mathbb{N})$ имеет конечный предел. Тогда $u_0'(a,\mu_j)\neq 0$ при достаточно больши́х j. Действительно, если бы это было не так, то спектр задачи

$$-y''-qy=\lambda^2y,\quad 0<x<a,$$

$$y(0)=y'(a)=0$$

имел бы конечную предельную точку, что невозможно в силу дискретности спектра этой задачи. Следовательно, $\Delta_2(\mu_j)=0$, начиная с некоторого номера. Но Δ_2 — целая функция (см. замечание 5), поэтому $\Delta_2(\lambda)\equiv 0$, так что (25) принимает вид

$$S(x,\lambda)=a_1(\lambda)S_0(x,\lambda), \quad x\geqslant a, \;\; \lambda\in V. \tag{26}$$

Обозначим через Λ множество нулей функции $\Delta=S_0'(a,\lambda)$. Равенство (26) верно при всех $\lambda\notin\Lambda$. Поскольку $S_0(a,\lambda)\neq 0$ на Λ, то функция a_1 в каждой точке λ из Λ имеет конечный предел, равный $S(a,\lambda)/S_0(a,\lambda)$. Потому функция a_1, доопределённая на Λ по непрерывности, становится целой. Соответственно равенство (26) распространяется (по λ) на всю плоскость $\mathbb{C}$. Так как $S\not\equiv 0$, то функция a_1 не имеет нулей, так что $a_1(\lambda)=e^{P(\lambda)}$, где P — целая функция. По лемме 4 Δ_1 и Δ — целые функции экспоненциального типа, поэтому P — многочлен не выше первой степени. Согласно (22) функции Δ_1 и Δ чётные, так что $P(\lambda)\equiv\mathrm{const}$. Таким образом,

$$S(x,\lambda)=KS_0(x,\lambda), \quad x\geqslant a, \;\; K=\mathrm{const},$$

при всех $\lambda\in\mathbb{C}$. Далее, согласно (17)

$$S(a,iy), S_0(a,iy)\sim\frac{e^{ay}}{2y}, \quad y\to+\infty,$$

следовательно, $K=1$, т.е.

$$S(x,\lambda)\equiv S_0(x,\lambda), \quad x\geqslant a, \;\; \lambda\in\mathbb{C}. \tag{27}$$

Выберем любую точку A из сектора U, фигурирующего в условии (9), и обозначим через Γ ломаную с вершинами в точках 0, a, A. Далее рассмотрим краевую задачу

$$-y''(z)+p(z)y(z)=\lambda^2y(z), \quad z\in\Gamma, \tag{28}$$

$$y(0)=y(A)=0, \tag{29}$$

где

$$p(z)=\begin{cases} q(z)+V(z) & \text{при } z\in(0,a], \\ \widetilde{q}(z) & \text{при } z\in[a,A]. \end{cases}$$

В силу условия (9) при каждом $\lambda\in\mathbb{C}$ функция $S_0(\cdot,\lambda)$ допускает аналитическое продолжение в сектор U и удовлетворяет там уравнению

$$-y''(z)+\widetilde{q}(z)y(z)=\lambda^2y(z). \tag{30}$$

Следовательно, равенство (27) верно при всех $z\in U$, в частности, на отрезке $[0,A]$. Это означает, что спектр задачи (28), (29) совпадает с нулями функции $S_0(A,\lambda)$.

Уравнение (30) вместе с условиями (16) эквивалентно уравнению

$$S_0(z,\lambda)=\frac{\sin(\lambda z)}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^z\sin(\lambda(x-t))\widetilde{q}(t)S(t,\lambda)\,dt, \quad z\in U.$$

Из условия (9) следует, что если заменить функцию $q+V$ на $\widetilde{q}$ и отрезок $[0,b]$ на $[0,A]$, то можно полностью повторить доказательство оценки (17). В результате получим аналогичную оценку на отрезке $[0,A]$:

$$S_0(A,\lambda)=\frac{1}{\lambda}\big[\sin(\lambda A)+O\big(\lambda^{-1}e^{|\operatorname{Im}(\lambda A)|}\big)\big], \quad \lambda\to\infty,$$

равномерно по $\arg\lambda$. Значит, собственные числа $\{\mu_n\}_1^\infty$ задачи (28), (29) имеют асимптотику

$$\mu_n \sim \pi n/A, \quad n\to\infty. \tag{31}$$

Обозначим через Ω область, ограниченную ломаной Γ и отрезком $[0,A]$. Согласно теореме 3 из [20] если функция p суммируема на Γ и спектр задачи (28), (29) имеет асимптотику (31), то существует мероморфная в области Ω функция $\widetilde{p}$ такая, что полюса $\widetilde{p}$ могут скапливаться только к отрезку $[0,A]$ и для любой подобласти ω, свободной от полюсов $\widetilde{p}$ и примыкающей к Γ (т.е. $\Gamma\subset\partial\omega$), функция $\widetilde{p}$ принадлежит пространству Смирнова $E_1(\omega)$ и её угловые граничные значения почти всюду на Γ совпадают с p. Из доказательства теоремы 3 в [20] видно, что её утверждение остаётся верным, если вместо суммируемости p потребовать только суммируемость xp. Следовательно, угловые граничные значения функции $\widetilde{p}$ равны q п.в. на $[a,A]$. Отсюда в силу свойства единственности функций из $E_1(\omega)$ [18, гл. 4, § 2] заключаем, что $\widetilde{p}=q$. Тогда $q=p$ п.в. на $[0,a]$, так что $V=0$ п.в. на $[0,a]$. Теорема доказана.

Полученный результат показывает, что теоремы типа теоремы Амбарцумяна могут иметь место для достаточно широкого класса операторов, дискретный спектр которых имеет конечную предельную точку.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа по соглашению № 075-02-2024-1444.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ambarzumian, V.A. Überline Frage der Eigenwerttheorie / V.A. Ambarzumian // Zeitschrift für Physik. — 1929. — Bd. 53. — S. 690–695.
2. Borg, G. Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe / G. Borg // Acta Math. — 1946. — Bd. 78. — S. 1–96.
3. Кузнецов, Н.В. Обобщение одной теоремы В.А. Амбарцумяна / Н.В. Кузнецов // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 146, № 6. — С. 1259–1262.
4. Harrel, E.M. On the extension of Ambarzumian's inverse spectral theorem to compact symmetric spaces / E.M. Harrel // Amer. J. Math. — 1987. — V. 109, № 5. — P. 787–795.
5. Chakravarty, N.K. On an extension of the theorem of V.A. Ambarzumyan / N.K. Chakravarty, S.K. Acharyya // Proc. R. Soc. Edinb. — 1988. — V. 110A. — P. 79–84.
6. Chern, H.-H. On the n-dimensional Ambarzumyan's theorem / H.-H. Chern, C.-L. Shen // Inverse Problems. — 1997. — V. 13. — P. 15–18.
7. Левитан, Б.М. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам / Б.М. Левитан, М.Г. Гасымов // Успехи мат. наук. — 1964. — Т. 19, № 2 (116). — С. 3–63.
8. Рид, М. Методы современной математической физики. Т. 4: Анализ операторов / М. Рид, Б. Саймон ; пер. с англ. А.К. Погребкова, В.Н. Сушко ; под ред. М.К. Поливанова. — М. : Мир, 1982. — 428 с.
9. Horváts, M. On a theorem of Ambarzumyan / M. Horváts // Proc. R. Soc. Edinb. — 2001. — V. 131A. — P. 899–907.
10. Ишкин, Х.К. О спектральной неустойчивости оператора Штурма–Лиувилля с комплексным потенциалом / Х.К. Ишкин // Дифференц. уравнения. — 2009. — Т. 45, № 4. — С. 480–495.

11. Davies, E.B. Wild spectral behaviour on anharmonic oscillators / E.B. Davies // Bull. London Math. Soc. — 2000. — V. 32, № 4. — P. 432–438.
12. Лидский В.Б. Несамосопряжённый оператор типа Штурма–Лиувилля с дискретным спектром / В.Б. Лидский // Тр. Моск. мат. об-ва. — 1960. — Т. 9. — С. 45–79.
13. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като ; пер. с англ. Г.А. Воропаевой, А.М. Степина, И.А. Шишмарева ; под ред. В.П. Маслова. — М. : Мир, 1972. — 740 с.
14. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.
15. Павлов, Б.С. О несамосопряжённом операторе $-y''+q(x)y$ на полуоси / Б.С. Павлов // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 141, № 4. — С. 807–810.
16. Павлов, Б.С. К спектральной теории несамосопряжённых дифференциальных операторов / Б.С. Павлов // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 146, № 6. — С. 1267–1270.
17. Ишкин, Х.К. Об аналитических свойствах функции Вейля оператора Штурма–Лиувилля с комплексным убывающим потенциалом / Х.К. Ишкин // Уфимск. мат. журн. — 2013. — Т. 5, № 1. — С. 36–55.
18. Привалов, И.И. Граничные свойства аналитических функций / И.И. Привалов. — М.–Л. : ГИТТЛ, 1950. — 336 с.
19. Ishkin, Kh.K. On continuity of the spectrum of a singular quasi-differential operator with respect to a parameter / Kh.K. Ishkin // Eurasian Math. J. — 2011. — V. 2, № 3. — P. 67–81.
20. Ишкин, Х.К. Критерий локализации спектра оператора Штурма–Лиувилля на кривой / Х.К. Ишкин // Алгебра и анализ. — 2016. — Т. 28, № 1. — С. 52–88.

ON AN ANALOGUE OF AMBARZUMYAN THEOREM

© 2025 / **Kh. K. Ishkin**

Ufa University of Science and Technology, Russia
e-mail: ishkin62@mail.ru

For the Sturm–Liouville operator on the half-axis with a complex decreasing potential that allows analytical continuation to some neighborhood of zero, an analogue of Ambarzumyan's theorem is obtained.

Keywords: spectrum, Ambarzumyan theorem, Sturm–Liouville operator, complex potential

FUNDING

This work was carried out within the framework of the implementation of the development program of the Scientific and Educational Mathematical Center of the Volga Federal District under agreement no. 075-02-2024-1444.

REFERENCES

1. Ambarzumian, V.A., Überline Frage der Eigenwerttheorie, *Zeitschrift für Physik.*, 1929, Bd. 53, S. 690–695.
2. Borg, G., Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe, *Acta Math.*, 1946, Bd. 78, S. 1–96.
3. Kuznetsov, N.V., A generalization of a theorem stated by V.A. Ambartsumyan, *Sov. Math., Dokl.*, 1963, vol. 3, pp. 1475–1478.
4. Harrel, E.M., On the extension of Ambarzumian's inverse spectral theorem to compact symmetric spaces, *Amer. J. Math.*, 1987, vol. 109, no. 5, pp. 787–795.
5. Chakravarty, N.K. and Acharyya, S.K., On an extension of the theorem of V.A. Ambarzumyan, *Proc. R. Soc. Edinb.*, 1988, vol. 110A, pp. 79–84.
6. Chern, H.-H. and Shen, C.-L., On the n-dimensional Ambarzumyan's theorem, *Inverse Problems*, 1997, vol. 13, pp. 15–18.
7. Levitan, B.M. and Gasymov, M.G., Determination of a differential equation by two of its spectra, *Russ. Math. Surv.*, 1964, vol. 19, no. 2, pp. 1–63.

8. Rid, M. and Simon, B., *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 4: Operators Theory*, New York; San Francisco; London: Academic Press, 1978.
9. Horváts, M., On a theorem of Ambarzumyan, *Proc. R. Soc. Edinb.*, 2001, vol. 131A, pp. 899–907.
10. Ishkin, Kh.K., On the spectral instability of the Sturm–Liouville operator with a complex potential, *Differ. Equat.*, 2009, vol. 45, no. 4, pp. 494–509.
11. Davies, E.B., Wild spectral behaviour on anharmonic oscillators, *Bull. London Math. Soc.*, 2000, vol. 32, no. 4, pp. 432–438.
12. Lidskii, V.B., A non-self-adjoint operator of Sturm–Liouville type with discrete spectrum, *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 1960, vol. 9, pp. 45–79.
13. Kato, T., *Perturbation Theory for Linear Operators*, Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1966.
14. Naimark, M.A., *Linear Differential Operators. Vol. I, II*, New York: Frederick Ungar Publishing Co., 1967, 1968.
15. Pavlov, B. S., The non-selfadjoint operator $-y''+q(x)y$ on a half-line, *Sov. Math., Dokl.*, 1962, vol. 2, pp. 1565–1568.
16. Pavlov, B.S., On the spectral theory of non-selfadjoint differential operators, *Sov. Math., Dokl.*, 1962, vol. 3, pp. 1483–1487.
17. Ishkin, Kh.K., On analytic properties of Weyl function of Sturm–Liouville operator with a decaying complex potential, *Ufa Math. J.*, 2013, vol. 5, no. 1, pp. 36–55.
18. Privalov, I.I., *Granichnyye svoystva analiticheskikh funktsiy* (Boundary Properties of Analytic Functions), Moscow; Leningrad: GITTL, 1950.
19. Ishkin, Kh.K., On continuity of the spectrum of a singular quasi-differential operator with respect to a parameter, *Eurasian Math. J.*, 2011, vol. 2, no. 3, pp. 67–81.
20. Ishkin, Kh.K., A localization criterion for the spectrum of the Sturm–Liouville operator on a curve, *St. Petersburg Math. J.*, 2017, vol. 28, no. 1, pp. 37–63.