ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 2, с. 162–176

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.984.5+517.927.25

АСИМПТОТИКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА ГРАФЕ–ЗВЕЗДЕ. I

© 2025 г. К. П. Зуев

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: kizuev02@gmail.com

Поступила в редакцию 31.10.2024 г., после доработки 31.10.2024 г.; принята к публикации 28.11.2024 г.

Исследованы спектральные задачи на графе–звезде, состоящем из трёх рёбер, с заданным на каждом из них оператором Штурма–Лиувилля. Изучены спектральные свойства таких операторов, в частности, получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций оператора с краевыми условиями Дирихле в свободных концах и условиями непрерывности и Кирхгофа в общей вершине. Потенциал в задаче Штурма–Лиувилля предполагается сингулярным, а именно, является обобщённой производной квадратично суммируемой функции.

Ключевые слова: дифференциальный оператор на графах, оператор Штурма–Лиувилля, спектральная задача, сингулярный потенциал

DOI: 10.31857/S0374064125020026, EDN: HXKTOT

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе рассматриваются спектральные задачи на квантовых графах — геометрических графах с заданным на них дифференциальным оператором. Функция на графе — вектор-функция, каждая компонента которой является функцией, заданной на определённом ребре. В настоящее время дифференциальные операторы на графах нашли применение в таких областях как квантовая механика, химия, теория волноводов [1, 2]. Математическая теория дифференциальных операторов на графах начала развиваться в конце XX — начале XXI века и сейчас этой тематике посвящено большое количество отечественных и зарубежных работ (см., например, [3–5] и литературу в них). Прямые и обратные спектральные задачи на графах изучались в статьях В.А. Юрко и его учеников [6–8], В.А. Садовничего, Я.Т. Султанаева и А.М. Ахтямова [9], А.П. Жабко, К.Б. Нуртазиной и В.В. Провоторова [10] и других авторов.

Мы будем рассматривать граф–звезду — связный граф, в котором все три ребра исходят из одной вершины, с заданным на каждом из них оператором Штурма–Лиувилля. Потенциал в задаче Штурма–Лиувилля предполагается сингулярным: $q=u'$, где $u\in L_2$. Теория таких операторов берёт своё начало в работах А.М. Савчука и А.А. Шкаликова [11, 12].

Пусть на каждом из трёх рёбер графа–звезды с длинами l_1, l_2 и l_3 задан оператор Штурма–Лиувилля, порождённый дифференциальным выражением $l(h)=-h''+q(x)h$ и краевыми условиями Дирихле. А именно, параметризуем каждое ребро вещественным параметром x_j, изменяющимся от 0 до l_j, причём значения параметров l_j соответствуют вершине, инцидентной всем трём ребрам. В свободных концах поставим условия Дирихле

$h_0(0)=h_2(0)=h_3(0)=0$, а в общей вершине — условие непрерывности $h_1(l_1)=h_2(l_2)=h_3(l_3)$ и условие Кирхгофа $h_1^{[1]}(l_1)+h_2^{[1]}(l_2)+h_3^{[1]}(l_3)=0$. Здесь через $h^{[1]}=h'-uh$ обозначена *квазипроизводная*. В случае нулевого потенциала считаем, что $u=0$, где u — первообразная потенциала, тогда квазипроизводная, очевидно, совпадает с обычной: $h^{[1]}=h'$. Всюду в дальнейшем будем считать, что рёбра имеют одинаковую длину: $l_1=l_2=l_3=l$.

Заметим, что спектральную задачу на графе можно легко свести к системе

$$-\mathbf{h}''+\mathbf{q}(x)\mathbf{h}=\lambda\mathbf{h},$$

где $\mathbf{h}(x)=(h_1(x),\, h_2(x),\, h_3(x))^{\text{т}}$, $\mathbf{q}(x)=\operatorname{diag}\{q_1(x),q_2(x),q_3(x)\}$, с краевыми условиями

$$h_1(0)=h_2(0)=h_3(0)=0,\quad h_1(l)=h_2(l)=h_3(l),\quad h_1^{[1]}(l)+h_2^{[1]}(l)+h_3^{[1]}(l)=0. \tag{1}$$

При этом вектор-функция понимается в следующем смысле: если аргумент функции $\mathbf{h}$ находится на j-м ребре графа, то значение функции $\mathbf{h}$ в этой точке равно $h_j(x_j)$. Для сокращения записи в данной работе всюду в дальнейшем будем использовать вектор-функции.

Отметим, что первообразная u определена с точностью до константы. Поскольку функция u входит в выражение для квазипроизводной, то условие Кирхгофа на самом деле представляет собой условие на правом конце вида $h_1^{[1]}(l)+h_2^{[1]}(l)+h_3^{[1]}(l)=C_1h_1(l)+C_2h_2(l)+C_3h_3(l)$ с произвольной постоянной в правой части. Мы будем рассматривать классическое условие равенства нулю суммы квазипроизводных, а выбор констант включим в определение u_j. Соответственно, при изменении константы будут меняться и полученные в работе асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА. СВЕДЕНИЕ К СИСТЕМЕ

Сделаем в системе уравнений на собственные значения

$$-\mathbf{h}''+\mathbf{q}(x)\mathbf{h}=z^2\mathbf{h} \tag{2}$$

замену $\mathbf{h}^{[1]}=\mathbf{h}'-\mathbf{u}\mathbf{h}$, где

$$\mathbf{u}'=\mathbf{q},\quad \mathbf{q}(x)=\operatorname{diag}\{q_1(x),q_2(x),q_3(x)\},\quad \mathbf{u}(x)=\operatorname{diag}\{u_1(x),u_2(x),u_3(x)\},$$

$u_j\in L_2[0,l]$, $j=1,2,3$, тогда она примет вид $\ell(\mathbf{h})=z^2\mathbf{h}$, где

$$\ell(\mathbf{h})=-(\mathbf{h}^{[1]})'-\mathbf{u}\mathbf{h}^{[1]}-\mathbf{u}^2\mathbf{h}. \tag{3}$$

Такое представление содержит только регулярные функции, что является его преимуществом.

Свяжем с выражением (3) максимальный $L_{\mathbf{u},M}$ и минимальный $L_{\mathbf{u},m}$ операторы. Максимальный определяется следующим образом:

$$\begin{cases} L_{\mathbf{u},M}\mathbf{h}=\ell(\mathbf{h}),\\ \mathfrak{D}(L_{\mathbf{u},M})=\{\mathbf{h}\colon \mathbf{h},\mathbf{h}^{[1]}\in W_1^1[0,l]\oplus W_1^1[0,l]\oplus W_1^1[0,l]\}, \end{cases}$$

а минимальный является сужением максимального на область

$$\mathfrak{D}(L_{\mathbf{u},m})=\{\mathbf{h}\colon \mathbf{h}\in\mathfrak{D}(L_{\mathbf{u},M}),\mathbf{h}(0)=\mathbf{h}^{[0]}(0)=\mathbf{h}(l)=\mathbf{h}^{[0]}(l)=(0,0,0)^{\text{т}}\}.$$

Лемма (формула Лагранжа). *Для любых функций* $\mathbf{f}\in\mathfrak{D}(L_{\mathbf{u},M})$ *и* $g\in\mathfrak{D}(L_{\overline{\mathbf{u}},M})$ *справедливо равенство*

$$\langle L_{\mathbf{u},M}\mathbf{f},\mathbf{g}\rangle=\langle \mathbf{f},L_{\overline{\mathbf{u}},M}\mathbf{g}\rangle+[\mathbf{f},\mathbf{g}]_0^l,$$

где

$$[\mathbf{f},\mathbf{g}]_0^l=\sum_{i=1}^3\Big[f_i^{[1]}(x)\overline{g}(x)\big|_0^l-f_i(x)\overline{g^{[1]}(x)}\big|_0^l\Big].$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем

$$\langle L_{\mathbf{u},M}\mathbf{f},\mathbf{g}\rangle=\sum_{i=1}^3\left[-\int_0^l\overline{g}_i(x)\,df_i^{[1]}(x)-\int_0^l u_i(x)f_i^{[1]}(x)\overline{g}_i(x)\,dx-\int_0^l u_i^2(x)f_i(x)\overline{g}_i(x)\,dx\right]=$$
$$=\sum_{i=1}^3\left[\int_0^l f_i^{[1]}(x)(\overline{g}_i'(x)-u_i(x)\overline{g}_i(x))\,dx-\int_0^l u_i^2(x)f_i(x)\overline{g}_i(x)\,dx-f_i^{[1]}(x)\overline{g}(x)\big|_0^l\right].$$

Аналогично

$$\langle \mathbf{f},L_{\overline{\mathbf{u}},M}\mathbf{g}\rangle=\sum_{i=1}^3\left[-\int_0^l f_i(x)\,d\overline{g_i^{[1]}(x)}-\int_0^l u_i(x)\overline{g_i^{[1]}(x)}f_i(x)\,dx-\int_0^l u_i^2(x)f_i(x)\overline{g}_i(x)\,dx\right]=$$
$$=\sum_{i=1}^3\left[\int_0^l \overline{g_i^{[1]}(x)}(f_i'(x)-u_i(x)f_i(x))\,dx-\int_0^l u_i^2(x)f_i(x)\overline{g}_i(x)\,dx-f_i(x)\overline{g^{[1]}(x)}\big|_0^l\right].$$

Отсюда и из определения квазипроизводной следует утверждение леммы.

Из формулы Лагранжа, в частности, имеем

$$\langle L_{\mathbf{u},M}\mathbf{f},\mathbf{g}\rangle=\langle \mathbf{f},L_{\overline{\mathbf{u}},m}\mathbf{g}\rangle,\quad f\in\mathfrak{D}(L_{\mathbf{u},M}),\ \ g\in\mathfrak{D}(L_{\overline{\mathbf{u}},m}),$$

т.е. операторы $L_{\mathbf{u},M}$ и $L_{\overline{\mathbf{u}},m}$ взаимно сопряжённы, так же как $L_{\mathbf{u},m}$ и $L_{\overline{\mathbf{u}},M}$.

Теорема 1. *При любом значении* $\lambda\in\mathbb{C}$ *операторы* $L_{\mathbf{u},M}-\lambda$ *и* $L_{\overline{\mathbf{u}},m}-\overline{\lambda}$ *фредгольмовы, являются сопряжёнными друг к другу, а их индексы дефекта равны* $\{0,6\}$ *и* $\{6,0\}$ *соответственно.*

Доказательство. Взаимную сопряжённость операторов мы уже отметили. Найдём индексы оператора $L_{\mathbf{u},M}$. Уравнение $L_{\mathbf{u},M}\mathbf{h}=\lambda\mathbf{h}$ с помощью замен для первой координаты

$$h_1(x)=y_1(x)+y_2(x),$$
$$h_1'(x)=\lambda i(y_1(x)-y_2(x))+u_1(x)(y_1(x)+y_2(x)),$$
$$h_1^{[1]}(x)=\lambda i(y_1(x)-y_2(x))$$

(аналогично для h_2 и h_3) сведём к системе размерности 6×6 вида

$$\overline{y}'(x)=\left(A(x)+B+\frac{iu^2(x)}{2\lambda}C\right)\overline{y}(x),$$

где

$$\overline{y}(x)=\begin{pmatrix} y_1(x)\\ y_2(x)\\ y_3(x)\\ y_4(x)\\ y_5(x)\\ y_6(x)\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} 0 & u_1(x) & \dots & 0 & 0\\ u_1(x) & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & u_3(x)\\ 0 & 0 & \dots & u_3(x) & 0\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} i & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -i & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & i & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & -i\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0\\ -1 & -1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1\\ 0 & 0 & \dots & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

По теореме существования и единственности для систем (см., например, [13, теорема 2.1]) получаем, что она имеет шесть линейно независимых решений. Значит, второй индекс равен 6. Далее, для произвольной функции $\mathbf{f}\in\mathbb{H}$ уравнение $L_{\mathbf{u},M}=\lambda\mathbf{y}+\mathbf{f}$ точно так же сводим к системе и видим, что оно всегда имеет решение, т.е. образом оператора $L_{\mathbf{u},M}-\lambda$ является всё пространство, следовательно, первый индекс равен 0.

Определение 1. Оператор $L_{\mathbf{u}}$ является *сужением* оператора $L_{\mathbf{u},M}$ на область

$$\mathfrak{D}(L_{\mathbf{u}})=\{\mathbf{h}\colon \mathbf{h}\in\mathfrak{D}(L_{\mathbf{u},M}),\ \ell(h)\in\mathbb{H},\ \mathcal{U}\overline{\mathbf{h}}=0\},$$

где

$$\mathcal{U}=(U_1,\,U_2,\,\dots,\,U_6)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1\end{pmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{h}}=\big(h_1(0),\,h_2(0),\,h_3(0),\,h_1^{[1]}(0),\,h_2^{[1]}(0),\,h_3^{[1]}(0),\,h_1(l),\,h_2(l),\,h_3(l),\,h_1^{[1]}(l),\,h_2^{[1]}(l),\,h_3^{[1]}(l)\big)^{\mathrm{T}}.$$

Теорема 2. *Оператор $L_{\mathbf{u}}$ с потенциалом $\mathbf{u}\in\mathbb{H}$ является плотно определённым замкнутым линейным оператором с компактной резольвентой, следовательно, имеет непустое резольвентное множество, а его спектр дискретен.*

Доказательство. Сведём наше уравнение к системе, как описано выше. Пусть $\varphi_i(x,z)$ и $\psi_i(x,z)$ — фундаментальная система решений уравнения $-y''(x)+u_i'(x)y(x)=z^2y(x)$ с начальными условиями $\varphi_i(0,z)=\psi_i^{[1]}(0,z)=1$, $\varphi_i^{[1]}(0,z)=\psi_i(0,z)=0$, $i=1,2,3$. Тогда внутри любой полосы $\{|\operatorname{Im} z|<a\}$ справедливы следующие асимптотические представления при $|z|\to+\infty$ [14, лемма 3.2]:

$$\varphi_i(x,z)=\cos(zx)(1+o(1)),\quad \psi_i(x,z)=z^{-1}\sin(zx)(1+o(1)),$$
$$\varphi_i^{[1]}(x,z)=-z\sin(zx)(1+o(1)),\quad \psi_i^{[1]}(x,z)=\cos(zx)(1+o(1)).\tag{4}$$

Для любой функции $\mathbf{f}\in\mathbb{H}$ существует решение $\eta(x,z)$ уравнения $\ell(\mathbf{h})-z^2\mathbf{h}=\mathbf{f}$, подчинённое условию $\eta(0,z)=\eta^{[1]}(0,z)=0$ [13, теорема 2.1]. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\mathbf{h}=\begin{pmatrix}c_{1,1}\varphi_1\\ c_{1,2}\varphi_2\\ c_{1,3}\varphi_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_{2,1}\psi_1\\ c_{2,2}\psi_2\\ c_{2,3}\psi_3\end{pmatrix}+\eta,$$

где $c_{i,j},\ i=1,2,\ j=1,2,3,$ — произвольные постоянные.

Условие $\mathbf{h}\in\mathfrak{D}(L_{\mathbf{u}})$ влечёт равенства $U_i(\mathbf{h})=0,\ i=\overline{1,6}$, поэтому решение $\mathbf{h}$ находится однозначно, если не равен нулю характеристический определитель

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\varphi_1(0,z) & 0 & 0 & \psi_1(0,z) & 0 & 0\\ 0 & \varphi_2(0,z) & 0 & 0 & \psi_2(0,z) & 0\\ 0 & 0 & \varphi_3(0,z) & 0 & 0 & \psi_3(0,z)\\ \varphi_1(l,z) & -\varphi_2(l,z) & 0 & \psi_1(l,z) & -\psi_2(l,z) & 0\\ \varphi_1(l,z) & 0 & -\varphi_3(l,z) & \psi_1(l,z) & 0 & -\psi_3(l,z)\\ \varphi_1^{[1]}(l,z) & \varphi_2^{[1]}(l,z) & \varphi_3^{[1]}(l,z) & \psi_1^{[1]}(l,z) & \psi_2^{[1]}(l,z) & \psi_3^{[1]}(l,z)\end{vmatrix}.$$

С учётом начальных условий получаем, что

$$\Delta(\lambda)=\psi_1^{[1]}(l,z)\psi_2(l,z)\psi_3(l,z)+\psi_1(l,z)\psi_2^{[1]}(l,z)\psi_3(l,z)+\psi_1(l,z)\psi_2(l,z)\psi_3^{[1]}(l,z). \tag{5}$$

Отсюда и из асимптотических равенств (4) следует, что $\Delta(\lambda)$ не равен тождественно нулю внутри любой параболы $|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|<a$. Так как $\Delta(\lambda)$ есть голоморфная функция от λ во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, то нули $\Delta(\lambda)$ образуют последовательность, не имеющую конечных предельных точек. Если $\Delta(\lambda_0)\neq 0$, то в силу теоремы 2.1 из [13] оператор $(L_{\mathbf{u}}-\lambda_0)^{-1}$ отображает единичный шар пространства $\mathbb{H}$ в ограниченное множество пространства $W_1^1[0,l]\oplus W_1^1[0,l]\oplus W_1^1[0,l]$. Следовательно, оператор $(L_{\mathbf{u}}-\lambda_0)^{-1}$ компактен. Но тогда $L_{\mathbf{u}}$ имеет дискретный спектр, который совпадает с нулями определителя $\Delta(\lambda)$. Теорема доказана.

2.2. НЕВОЗМУЩЁННЫЙ ОПЕРАТОР

Выпишем собственные функции и собственные значения невозмущённого оператора. Для данных краевых условий характеристический определитель имеет вид

$$\Delta_0(\lambda)=\begin{vmatrix}\sin(\sqrt{\lambda}l) & -\sin(\sqrt{\lambda}l) & 0\\ 0 & \sin(\sqrt{\lambda}l) & -\sin(\sqrt{\lambda}l)\\ \cos(\sqrt{\lambda}l) & \cos(\sqrt{\lambda}l) & \cos(\sqrt{\lambda}l)\end{vmatrix}.$$

Отсюда получаем уравнение на собственные значения

$$3\sin^2(\sqrt{\lambda}l)\cos(\sqrt{\lambda}l)=0$$

и находим серию простых собственных значений

$$\lambda_{n,1}^0=\left(\frac{\pi(n+1/2)}{l}\right)^2,\quad n=0,1,\ldots,$$

и серию двукратных собственных значений

$$\lambda_{n,2}^0 = \lambda_{n,3}^0 = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Выпишем соответствующие (нормированные) собственные векторы

$$\mathbf{y}_{n,1}^0 = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{2}{3l}}\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,1}^0}x\right) \\ \sqrt{\dfrac{2}{3l}}\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,1}^0}x\right) \\ \sqrt{\dfrac{2}{3l}}\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,1}^0}x\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_{n,2}^0 = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{1}{l}}\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,2}^0}x\right) \\ 0 \\ -\sqrt{\dfrac{1}{l}}\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,2}^0}x\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_{n,3}^0 = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{1}{3l}}\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,3}^0}x\right) \\ -\sqrt{\dfrac{4}{3l}}\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,3}^0}x\right) \\ \sqrt{\dfrac{1}{3l}}\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,3}^0}x\right) \end{pmatrix}.$$

Проверим, что в пространстве $\mathbb{H} = L_2[0,l] \oplus L_2[0,l] \oplus L_2[0,l]$ полученная система является базисом. Действительно,

$$\langle \mathbf{y}_{n,1}^0, \mathbf{y}_{n,2}^0 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}l}\int_0^l \left[\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,1}^0}x\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,2}^0}x\right) - \sin\left(\sqrt{\lambda_{n,1}^0}x\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,2}^0}x\right)\right]dx = 0,$$

$$\langle \mathbf{y}_{n,1}^0, \mathbf{y}_{n,3}^0 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{3l}\int_0^l \left[2\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,1}^0}x\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,3}^0}x\right) - 2\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,1}^0}x\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,3}^0}x\right)\right]dx = 0,$$

$$\langle \mathbf{y}_{n,2}^0, \mathbf{y}_{n,3}^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}l}\int_0^l \left[\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,2}^0}x\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,3}^0}x\right) - \sin\left(\sqrt{\lambda_{n,2}^0}x\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,3}^0}x\right)\right]dx = 0.$$

Значит, эта система является ортогональной, а с учётом коэффициентов — ортонормированной.

Проверим систему на полноту, т.е. покажем, что из того, что некоторый вектор $\mathbf{f} \in \mathbb{H}$ ортогонален всем векторам системы, следует, что $\mathbf{f} = 0$. Действительно, пусть

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{y}_{n,2}^0 \rangle = \sqrt{\frac{2}{3l}}\int_0^l \left[f_1\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,2}^0}x\right) - f_3\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,2}^0}x\right)\right]dx = 0.$$

Из полноты системы $\{\sin(\pi n/l)\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2[0,l]$ имеем тогда, что $f_1 = f_3$. Аналогично находим

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{y}_{n,3}^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}l}\int_0^l (f_1 - 2f_2 + f_3)\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,3}^0}x\right)dx = \int_0^l (f_1 - f_2)\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,3}^0}x\right)dx = 0,$$

следовательно, $f_1 = f_2$. Наконец,

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{y}_{n,1}^0 \rangle = \int_0^l (f_1 + f_2 + f_3)\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,1}^0}x\right)dx = \int_0^l 3f_1\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,1}^0}x\right)dx = 0,$$

значит, $f_1 = 0$, поскольку система $\{\sin(\pi(n+1/2)/l)\}$ является базисом в пространстве $L_2[0,l]$. Следовательно, $\mathbf{f} = 0$.

Таким образом, получили полную ортонормированную систему, по теореме Рисса–Фишера она является базисом в пространстве $\mathbb{H}$.

2.3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Перейдём к рассмотрению оператора с потенциалом. Далее будем придерживаться обозначений, введённых в [14]. Пусть индексы $j,k,l=\overline{1,6}$. Символом $(\pm)_{jk}$ будем обозначать величину, равную -1 при $j<k$ и 1 при $j\geqslant k$. Для записи остатков в асимптотических формулах определим функции: если $(j,l)\in\{(1,2),(3,4),(5,6)\}$, то

$$\upsilon_{jkl}(s,x,z)=\begin{cases}(\pm)_{jk}(\pm)_{lk}\int\limits_{t_1}^{t_2}u(t)e^{2iz(x-t)}\,dt & \text{при } k=l,\\ (\pm)_{jk}(\pm)_{lk}\int\limits_{t_1}^{t_2}u(t)e^{-2iz(t-s)}\,dt & \text{при } k=j;\end{cases}$$

в остальных случаях $\upsilon_{jkl}(s,x,z)=0$.

Пределы интегрирования выбираются следующим образом (считаем, что интеграл равен нулю, если $t_1>t_2$):

$$\begin{cases}t_1=x,\ t_2=s & \text{при } j,l<k,\\ t_1=\max\{x,s\},\ t_2=l & \text{при } j<k\leqslant l,\\ t_1=0,\ t_2=\min\{x,s\} & \text{при } l<k\leqslant j,\\ t_1=s,\ t_2=x & \text{при } k\leqslant j,l.\end{cases}$$

Введём функцию

$$\Upsilon(u;z)=\Upsilon(z)=\max_{j,k,l,s,x}|\upsilon_{jkl}(s,x,z)|. \tag{6}$$

Определение 2. Назовём последовательность $z_n\in\Pi_{\alpha_1,\alpha_2}=\{z\in\mathbb{C}\colon \alpha_1<\operatorname{Im}z<\alpha_2\}$, $n\in\mathbb{N}$, *несгущающейся*, если найдётся такое число $\beta>0$, что в любом прямоугольнике $\operatorname{Re}z\in[x,x+1]$, $\operatorname{Im}z\in[\alpha_1,\alpha_2]$ заключено не более β элементов этой последовательности.

Непосредственно из определения 2 следует оценка

$$C_1n\leqslant|z_n|\leqslant C_2n,\quad n\in\mathbb{N},\ \ C_1,C_2>0.$$

В данной работе нам потребуется

Предложение [13, следствие 7.1]. *Пусть $\{z_n\}$ — некоторая несгущающаяся последовательность, $z_n\in\Pi_{\alpha_1,\alpha_2}$. Тогда справедлива оценка*

$$\|\Upsilon(u;z_n)\|_{l_2}\leqslant C\|u\|_{L_2},$$

где константа C зависит только от последовательности $\{z_n\}$.

При выводе асимптотических формул для собственных функций и собственных значений нам понадобится утверждение об асимптотиках фундаментальной системы решений уравнения Штурма–Лиувилля на отрезке, доказанное в работе [14].

Теорема 3 [14, теорема 3.13]. *Пусть $\varphi(x,z)$ и $\psi(x,z)$ — фундаментальная система решений уравнения*

$$-y''(x)+u'(x)y(x)=z^2y(x)$$

с начальными условиями

$$\varphi(0,z)=\psi^{[1]}(0,z)=1,\quad \varphi^{[1]}(0,z)=\psi(0,z)=0.$$

Тогда для любой полосы $\Pi_\alpha=\{|\operatorname{Im} z|<\alpha\}$ *найдётся число* $k=k(\|u\|,\alpha)$ *такое, что при всех* $\{z\in\Pi_\alpha:\Upsilon(z)+|z|^{-1}<k\}$ *справедливы представления*

$$\varphi(x,z)=\cos(zx)+\int_0^x u(t)\cos(z(2t-x))\,dt-\frac{\sin(zx)}{2z}\int_0^x u^2(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{2z}\int_0^x u^2(t)\sin(z(2t-x))\,dt+\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(z(2s-2t+x))\,ds\,dt+\zeta_1(x,z),$$

$$\varphi^{[1]}(x,z)=z\biggl[-\sin(zx)+\int_0^x u(t)\sin(z(2t-x))\,dt-\frac{\cos(zx)}{2z}\int_0^x u^2(t)\,dt-$$

$$-\frac{1}{2z}\int_0^x u^2(t)\cos(z(2t-x))\,dt-\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\sin(z(2s-2t+x))\,ds\,dt+\zeta_2(x,z)\biggr],$$

$$\psi(x,z)=\frac{1}{z}\biggl[\sin(zx)+\int_0^x u(t)\sin(z(2t-x))\,dt+\frac{\cos(zx)}{2z}\int_0^x u^2(t)\,dt-$$

$$-\frac{1}{2z}\int_0^x u^2(t)\cos(z(2t-x))\,dt+\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\sin(z(2s-2t+x))\,ds\,dt+\zeta_3(x,z)\biggr],\tag{7}$$

$$\psi^{[1]}(x,z)=\cos(zx)-\int_0^x u(t)\cos(z(2t-x))\,dt-\frac{\sin(zx)}{2z}\int_0^x u^2(t)\,dt-$$

$$-\frac{1}{2z}\int_0^x u^2(t)\sin(z(2t-x))\,dt+\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(z(2s-2t+x))\,ds\,dt+\zeta_4(x,z),\tag{8}$$

где остаточные члены подчинены оценке

$$\sum_{j=1}^4\max_{x\in[0,\pi]}|\zeta_j(x,z)|\leqslant C(\Upsilon(z)+|z|^{-1})^2,\quad C=C(\|u\|,\alpha).\tag{9}$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим сначала случай, когда на всех трёх рёбрах графа заданы равные потенциалы $u_1=u_2=u_3=u$. Для упрощения записи договоримся обозначать через $\{\zeta_n\}$ любую последовательность, члены которой удовлетворяют оценке

$$|\zeta_n|\leqslant C(\Upsilon(u(x);\xi_n)+\Upsilon(xu(x);\xi_n)+|\xi_n|^{-1})^2\tag{10}$$

для некоторой константы C и некоторой несгущающейся последовательности $\{\xi_n\}$.

Из определения (6) функции $\Upsilon(u;z)$ и предложения следует, что для любой последовательности, удовлетворяющей оценке (10), справедливо $\{\zeta_n\}_{n=1}^{+\infty}\in l_1$, поскольку $u\in L_2[0,l]$.

Теорема 4. *Пусть* λ_n *— собственные значения оператора* $L_{\mathbf{u}}$, *порождённого дифференциальным выражением* (3) *и краевыми условиями* (1), *причём* $u_1=u_2=u_3=u$. *Тогда существует номер* $N\in\mathbb{N}$ *такой, что для любого* $n\geqslant N$ *их можно разбить на серию простых* *собственных значений* $\{\lambda_{n,1}\}$ *и серию собственных значений* $\{\lambda_{n,2}=\lambda_{n,3}\}$ *алгебраической кратности* 2, *причём справедливы асимптотические равенства*

$$(\lambda_{n,1})^{1/2}=\frac{\pi+2\pi n}{2l}-\frac{1}{l}\int\limits_0^l u(t)\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{l}t\right)dt-$$

$$-\frac{1}{\pi+2\pi n}\int\limits_0^l u^2(t)\,dt+\frac{1}{\pi+2\pi n}\int\limits_0^l u^2(t)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{l}t\right)dt-$$

$$-\frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^t u(t)u(s)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{l}t\right)\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{l}s\right)ds\,dt+\zeta_n, \tag{11}$$

$$(\lambda_{n,2})^{1/2}=\frac{\pi n}{l}-\frac{1}{l}\int\limits_0^l u(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{l}t\right)dt-\frac{1}{2\pi n}\int\limits_0^l u^2(t)\,dt+\frac{1}{2\pi n}\int\limits_0^l u^2(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{l}t\right)dt-$$

$$-\frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^t u(t)u(s)\cos\left(\frac{2\pi n}{l}t\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{l}s\right)ds\,dt+\zeta_n, \tag{12}$$

где последовательность $\{\zeta_n\}$ *удовлетворяет оценке* (10).

Доказательство. Заметим, что уравнения системы (2) отличаются друг от друга только потенциалом, причём каждое из них удовлетворяет условиям теоремы 2. Поскольку потенциалы взяты равными, уравнения системы совпадают друг с другом. Значит, мы можем воспользоваться асимптотическими формулами (7), (8) для каждого из уравнений в отдельности. Обозначим через $\psi_1(x,z)$, $\psi_2(x,z)$, $\psi_3(x,z)$, соответственно, решения для каждого уравнения системы, удовлетворяющие начальным условиям $\psi_j(0,z)=0$, $\psi_j^{[1]}(0,z)=1$, $j=1,2,3$. Так как у нас потенциалы на всех рёбрах совпадают, то $\psi_1=\psi_2=\psi_3=\psi$, следовательно, в силу соотношения (5) уравнение на собственные значения примет вид

$$\Delta(\lambda)=3\psi^2(l,z)\psi^{[1]}(l,z)=0.$$

Обозначим $z_{n,1}^0=\sqrt{\lambda_{n,1}^0}=\pi(n+1/2)/l$; $\lambda_{n,1}=z_{n,1}^2$, $n=0,1,2,\ldots$, где $z_{n,1}$ — корни уравнения $\psi^{[1]}(l,z)=0$. Пусть $\mu_{n,1}=z_{n,1}-z_{n,1}^0$. Из теоремы 3.6 в [14] следует тогда, что $\mu_{n,1}^2=\zeta_n$. Кроме того, несложно проверить, что имеют место соотношения

$$\sin(z_{n,1}\xi)=\sin(z_{n,1}^0\xi)+\cos(z_{n,1}^0\xi)\mu_{n,1}\xi+\zeta_n,\quad \cos(z_{n,1}\xi)=\cos(z_{n,1}^0\xi)-\sin(z_{n,1}^0\xi)\mu_{n,1}\xi+\zeta_n,$$

$$\frac{\mu_{n,1}}{z_{n,1}^0}=\zeta_n,\quad \frac{1}{z_{n,1}}=\frac{1}{z_{n,1}^0}+\zeta_n. \tag{13}$$

Из (8) с учётом (13) получаем

$$\psi^{[1]}(l,z_{n,1})=(-1)^n\left[-\mu_{n,1}l-\int\limits_0^l u(t)\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{l}t\right)dt-\frac{l}{\pi+2\pi n}\int\limits_0^l u^2(t)\,dt+\right.$$

$$\left.+\frac{l}{\pi+2\pi n}\int\limits_0^l u^2(t)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{l}t\right)dt-\int\limits_0^l\int\limits_0^t u(t)u(s)\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{l}(s-t)\right)ds\,dt+\zeta_n\right].$$

Преобразуем двойной интеграл в последнем выражении, обозначив $\alpha_n=(\pi+2\pi n)/l$ для краткости:

$$\int_0^l\int_0^t u(t)u(s)\sin(\alpha_n(s-t))\,ds\,dt=$$

$$=\int_0^l\int_0^t u(t)u(s)\sin(\alpha_n s)\cos(\alpha_n t)\,ds\,dt-\int_0^l\int_0^t u(t)u(s)\sin(\alpha_n t)\cos(\alpha_n s)\,ds\,dt=$$

$$=\int_0^l\int_0^t u(t)u(s)\sin(\alpha_n s)\cos(\alpha_n t)\,ds\,dt-\int_0^l\int_s^l u(t)u(s)\sin(\alpha_n s)\cos(\alpha_n t)\,ds\,dt=$$

$$=2\int_0^l\int_0^t u(t)u(s)\sin(\alpha_n s)\cos(\alpha_n t)\,ds\,dt-\int_0^l\int_0^l u(t)u(s)\sin(\alpha_n s)\cos(\alpha_n t)\,ds\,dt=$$

$$=2\int_0^l\int_0^t u(t)u(s)\sin(\alpha_n s)\cos(\alpha_n t)\,ds\,dt+\zeta_n.$$

Тогда

$$\psi^{[1]}(l,z_{n,1})=(-1)^n\Bigg[-\mu_{n,1}l-\int_0^l u(t)\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{l}t\right)dt-\frac{l}{\pi+2\pi n}\int_0^l u^2(t)\,dt+$$

$$+\frac{l}{\pi+2\pi n}\int_0^l u^2(t)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{l}t\right)dt-\int_0^l\int_0^t u(t)u(s)\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{l}s\right)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{l}t\right)ds\,dt+\zeta_n\Bigg].\quad(14)$$

Подставив (14) в краевые условия, получим

$$-\mu_{n,1}l-\int_0^l u(t)\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{l}t\right)dt-\frac{l}{\pi+2\pi n}\int_0^l u^2(t)\,dt+$$

$$+\frac{l}{\pi+2\pi n}\int_0^l u^2(t)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{l}t\right)dt-\int_0^l\int_0^t 2u(t)u(s)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{l}t\right)\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{l}s\right)ds\,dt+\zeta_n=0.$$

Отсюда, с учётом того что $(\lambda_{n,1})^{1/2}=z_{n,1}=z^0_{n,1}+\mu_{n,1}$, сразу следует равенство (11).

Чтобы доказать соотношение (12), обозначим $z^0_{n,2}=\sqrt{\lambda^0_{n,2}}=\pi n/l$; $\lambda_{n,2}=z^2_{n,2}$, $n=1,2,\ldots$, где $z_{n,2}$ — корни уравнения $\psi^2(l,z)=0$. Пусть $\mu_{n,2}=z_{n,2}-z^0_{n,2}$. Проделаем выкладки, аналогичные приведённым выше, и из (7) найдём

$$\psi(l,z_{n,2})=\frac{l}{\pi n}\Bigg[(-1)^n\mu_{n,2}l+\int_0^l u(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}(2t-l)\right)dt+$$

$$+\mu_{n,2}\int_0^l u(t)\cos\left(\frac{\pi n}{l}(2t-l)\right)(2t-l)dt+\frac{(-1)^n l}{2\pi n}\int_0^l u^2(t)\,dt-$$

$$-\frac{l}{2\pi n}\int\limits_0^l u^2(t)\cos\left(\frac{\pi n}{l}(2t-l)\right)dt+\int\limits_0^l\int\limits_0^t u(t)u(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}(2s-2t+l)\right)ds\,dt+$$

$$+\mu_{n,2}\int\limits_0^l\int\limits_0^t u(t)u(s)(2s-2t+l)\cos\left(\frac{\pi n}{l}(2s-2t+l)\right)ds\,dt+\zeta_n\Bigg].$$

В силу неравенств

$$\left|\int\limits_0^l u(t)(2t-l)\cos\left(\frac{\pi n}{l}(2t-l)\right)dt\right|\leqslant l\Upsilon\left(u(x);\frac{2\pi n}{l}\right)+2\Upsilon\left(xu(x);\frac{2\pi n}{l}\right);$$

$$\left|\int\limits_0^l\int\limits_0^t u(t)u(s)(2s-2t+l)\cos\left(\frac{\pi n}{l}(2s-2t+l)\right)ds\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant C\|u\|_{L_2}\left(\Upsilon\left(u(x);\frac{2\pi n}{l}\right)+\Upsilon\left(xu(x);\frac{2\pi n}{l}\right)\right)$$

получаем, что

$$\psi(l,z_n)=\frac{(-1)^n l}{\pi n}\Bigg[\mu_{n,2}l+\int\limits_0^l u(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{l}\right)dt+\frac{l}{2\pi n}\int\limits_0^l u^2(t)\,dt-$$

$$-\frac{l}{2\pi n}\int\limits_0^l u^2(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{l}\right)dt+\int\limits_0^l\int\limits_0^t 2u(t)u(s)\cos\left(\frac{2\pi nt}{l}\right)\sin\left(\frac{2\pi ns}{l}\right)ds\,dt+\zeta_n\Bigg]. \tag{15}$$

Подставив (15) в краевые условия, получим

$$\mu_{n,2}l+\int\limits_0^l u(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{l}\right)dt+\frac{l}{2\pi n}\int\limits_0^l u^2(t)\,dt-\frac{l}{2\pi n}\int\limits_0^l u^2(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{l}\right)dt+$$

$$+\int\limits_0^l\int\limits_0^t 2u(t)u(s)\cos\left(\frac{2\pi nt}{l}\right)\sin\left(\frac{2\pi ns}{l}\right)ds\,dt+\zeta_n=0,$$

откуда следует равенство (12). Теорема доказана.

Перейдём к выводу асимптотических формул для собственных функций оператора $L_{\mathbf{u}}$. Следуя работе [14], введём обозначения

$$b_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l u(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}t\right)dt,\quad A_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^l u^2(t)\cos\left(\frac{\pi n}{l}t\right)dt,$$

$$w_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^t u(t)u(s)\cos\left(\frac{\pi n}{l}t\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds\,dt,\quad U(l)=\int\limits_0^l u^2(t)\,dt.$$

Теорема 5. *Пусть* $L_{\mathbf{u}}$ *— оператор, порождённый дифференциальным выражением* (3) *и краевыми условиями* (1), *причём* $u_1=u_2=u_3=u$. *Тогда найдётся номер* $N\in\mathbb{N}$ *такой, что при всех* $n\geqslant N$ *оператор* $L_{\mathbf{u}}$ *имеет серию простых собственных значений* $\lambda_{n,1}$ *и* *серию собственных значений* $\lambda_{n,2}=\lambda_{n,3}$ *алгебраической и геометрической кратности* 2. *Обозначим через* $\mathbf{y}_{n,j}$, $n\geqslant N$, *собственные функции оператора* $L_{\mathbf{u}}$, *отвечающие собственным значениям* $\lambda_{n,j}$, $j=1,2,3$, *и нормированные начальным условием* $\mathbf{y}^{[1]}_{n,1}(0)=(1,1,1)^{\text{т}}$, $\mathbf{y}^{[1]}_{n,2}(0)=(1,0,-1)^{\text{т}}$, $\mathbf{y}^{[1]}_{n,3}(0)=(1,-2,1)^{\text{т}}$. *Тогда* $\mathbf{y}_{n,1}=(y_{n,1},y_{n,1},y_{n,1})^{\text{т}}$, $\mathbf{y}_{n,2}=(y_{n,2},0,-y_{n,2})^{\text{т}}$, $\mathbf{y}_{n,3}=(y_{n,3},-2y_{n,3},y_{n,3})^{\text{т}}$, *где*

$$y_{n,1}(x)=\frac{2l}{\pi+2\pi n}\left[\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}x\right)+\mu_n x\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}x\right)+\right.$$
$$+\frac{l}{\pi+2\pi n}\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}x\right)\int\limits_0^x u^2(t)\,dt+\int\limits_0^x u(t)\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}(2t-x)\right)dt-$$
$$-\frac{l}{\pi+2\pi n}\int\limits_0^x u^2(t)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}(2t-x)\right)dt+$$
$$\left.+\int\limits_0^x\int\limits_0^t u(t)u(s)\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}(2s-2t+x)\right)ds\,dt+r_{n,1}(x)\right]; \tag{16}$$

$$y_{n,2}(x)=y_{n,3}(x)=\frac{l}{\pi n}\left[\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)+\nu_n x\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)+\int\limits_0^x u(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}(2t-x)\right)dt+\right.$$
$$+\frac{l}{2\pi n}\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\int\limits_0^x u^2(t)\,dt-\frac{l}{2\pi n}\int\limits_0^x u^2(t)\cos\left(\frac{\pi n}{l}(2t-x)\right)dt+$$
$$\left.+\int\limits_0^x\int\limits_0^t u(t)u(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}(2s-2t+x)\right)ds\,dt+r_{n,2}(x)\right]. \tag{17}$$

Здесь

$$\mu_n=-\frac{1}{2}b_{2n+1}+\frac{1}{2(2n+1)}A_{2n+1}-\frac{1}{\pi(2n+1)}U(l)-w_{2n+1}, \tag{18}$$
$$\nu_n=-\frac{1}{2}b_{2n}+\frac{1}{4n}A_{2n}-\frac{1}{2\pi n}U(l)-w_{2n},$$

а функции $r_{n,j}$ *подчинены оценке*

$$\max_{j=1,2}\sum_{n=N}^{+\infty}\max_{x\in[0,l]}|r_{n,j}(x)|\leqslant C<+\infty.$$

Доказательство. Заметим, что $y_{n,j}(x)=\psi(x,z_{n,j})$, где $z_{n,j}=\sqrt{\lambda_{n,j}}$, $j=1,2$, а функция ψ определена в (7).

Перейдём к доказательству равенства (16). Пользуясь доказанным выше соотношением (11), подставим в представление (7) $z_{n,1}=\pi(n+1/2)/l+\mu_n+\zeta_n$, где μ_n определены в (18), а $\{\zeta_n\}$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая оценке (10). Для краткости обозначим $\mu'_n=\mu_n+\zeta_n$. Из утверждения 3.4 в [14] следует, что $\{\mu'_n\}\in l_2$. Увеличивая при необходимости номер N, можем считать, что $|\mu'_n|<1/2$. Несложно проверить, что при $n\geqslant N$ имеют место следующие соотношения:

$$\sin(z_{n,1}x)=\sin\left(\frac{\pi(n+1/2)}{l}x\right)+\mu'_n x\cos\left(\frac{\pi(n+1/2)}{l}x\right)+O((\mu'_n)^2),$$

$$\sin(z_{n,1}(2t-x))=\sin\left(\frac{\pi(n+1/2)}{l}(2t-x)\right)+\mu_n'(2t-x)\cos\left(\frac{\pi(n+1/2)}{l}(2t-x)\right)+O((\mu_n')^2),$$

$$\frac{1}{z_{n,1}}=\frac{l}{\pi(n+1/2)}+O\left(\frac{\mu_n'}{n}\right),$$

$$\cos(z_{n,1}x)=\cos\left(\frac{\pi(n+1/2)}{l}x\right)-\mu_n'x\sin\left(\frac{\pi(n+1/2)}{l}x\right)+O((\mu_n')^2),$$

$$\cos(z_{n,1}(2t-x))=\cos\left(\frac{\pi(n+1/2)}{l}(2t-x)\right)-\mu_n'(2t-x)\sin\left(\frac{\pi(n+1/2)}{l}(2t-x)\right)+O((\mu_n')^2),$$

$$\sin(z_{n,1}(2s-2t+x))=\sin\left(\frac{\pi(n+1/2)}{l}(2s-2t+x)\right)+$$

$$+\mu_n'(2s-2t+x)\cos\left(\frac{\pi(n+1/2)}{l}(2s-2t+x)\right)+O((\mu_n')^2).$$

Подставив эти соотношения в $\psi(x,z_{n,1})$, получим выражение (16).

Равенства (17) проверяются аналогично с использованием представлений (7) и (12). При этом все константы в оценках $O((\nu_n')^2)\leqslant C|\nu_n'|^2$ и $O((\mu_n')^2)\leqslant C|\mu_n'|^2$ абсолютны. В выражениях (16) и (17) занесены в остаток функции, нормы которых в пространстве $C[0,l]$ оцениваются величинами $C|\zeta_n|$, $C|\nu_n^2|$, $C|\nu_n/n|$, $C|\mu_n^2|$, $C|\mu_n/n|$. Теорема доказана.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ruedenberg, K. Free-electron network model for conjugated systems. I. Theory / K. Ruedenberg, W.S. Scherr // J. Chem. Physics. — 1953. — V. 21, № 9. — P. 1565–1581.
2. Kuchment, P. Graph models for waves in thin structures / P. Kuchment // Waves in Random Media. — 2002. — V. 12, № 4. — P. R1–R24.
3. Kuchment, P. Quantum graphs: I. Some basic structures / P. Kuchment // Waves in Random Media. — 2004. — V. 14, № 1. — P. 107–128.
4. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. V. 77. Analysis of Graphs and its Applications / Eds. P. Exner, J.P. Keating, P. Kuchment [et al.]. — Cambridge : Amer. Math. Soc., 2007. — 718 p.
5. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев [и др.]. — М. : Физматлит, 2005. — 272 с.
6. Yurko, V. Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators on graphs / V. Yurko // Inverse Problems. — 2005. — V. 21, № 3. — P. 1075–1086.
7. Bondarenko, N. Inverse problems for the differential operator on the graph with a cycle with different orders on different edges / N. Bondarenko // Tamkang J. Math. — 2015. — V. 46, № 3. — P. 229–243.
8. Бурлуцкая, М.Ш. Краевая задача на геометрическом графе–звезде с нелинейным условием в узле / М.Ш. Бурлуцкая, М.Б. Зверева, М.И. Каменский // Мат. заметки. — 2023. — Т. 114, № 2. — С. 316–320.
9. Садовничий, В.А. Обратная задача Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями на геометрическом графе / В.А. Садовничий, Я.Т. Султанаев, А.М. Ахтямов // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 2. — С. 193–202.
10. Zhabko, A.P. Uniqueness solution to the inverse spectral problem with distributed parameters on the graph–star / A.P. Zhabko, K.B. Nurtazina, V.V. Provotorov // Vestnik of Saint Petersburg University. Appl. Math. Comput. Sci. Control Proc. — 2020. — V. 16, № 2. — P. 129–143.

11. Савчук, А.М. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами / А.М. Савчук, А.А. Шкаликов // Мат. заметки. — 1999. — Т. 66, № 6. — С. 897–912.
12. Савчук, А.М. Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами–распределениями / А.М. Савчук, А.А. Шкаликов // Тр. Моск. мат. об-ва. — 2003. — Т. 64. — С. 159–212.
13. Савчук, А.М. Спектральный анализ одномерной системы Дирака с суммируемым потенциалом и оператора Штурма–Лиувилля с коэффициентами–распределениями / А.М. Савчук, И.В. Садовничая // Соврем. математика. Фунд. направления. — 2020. — Т. 66, № 3. — С. 373–530.
14. Савчук, А.М. Прямые и обратные спектральные задачи для оператора Штурма–Лиувилля и системы Дирака : дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А.М. Савчук. — М., 2019. — 334 с.

ASYMPTOTICS OF EIGENVALUES AND EIGENFUNCTIONS OF THE STURM–LIOUVILLE OPERATOR WITH SINGULAR POTENTIAL ON A STAR GRAPH. I

 K. P. Zuev

Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: kizuev02@gmail.com

Spectral problems on a star-graph consisting of three edges with a Sturm–Liouville operator defined on each of them are investigated. The spectral properties of such operators have been studied, in particular, asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of the operator with Dirichlet boundary conditions at free ends and continuity and Kirchhoff conditions at a common vertex have been obtained. The potential in the Sturm–Liouville problem is assumed to be singular, it is a derivative of a quadratically summable function in sense of distributions.

Keywords: differential operator on graphs, Sturm–Liouville operator, spectral problem, singular potential

REFERENCES

1. Ruedenberg, K. and Scherr, W.S., Free-electron network model for conjugated systems. I. Theory, *J. Chem. Physics*, 1953, vol. 21, no. 9, pp. 1565–1581.
2. Kuchment, P., Graph models for waves in thin structures, *Waves in Random Media*, 2002, vol. 12, no. 4, pp. R1–R24.
3. Kuchment, P., Quantum graphs: I. Some basic structures, *Waves in Random Media*, 2002, vol. 14, no. 1, pp. 107–128.
4. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Vol. 77. Analysis of Graphs and its Applications*, eds. P. Exner, J.P. Keating, P. Kuchment [et al.], Cambridge: Amer. Math. Soc., 2007.
5. Pokorny, Yu.V., Penkin, O.M., Pryadiev, V.L. [et al.], *Differentsial'nyye uravneniya na geometricheskikh grafakh* (Differential Equations on Geometrical Graphs), Moscow: Fizmatlit, 2005.
6. Yurko, V., Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators on graphs, *Inverse Problems*, 2005, vol. 21, no. 3, pp. 1075–1086.
7. Bondarenko, N., Inverse problems for the differential operator on the graph with a cycle with different orders on different edges, *Tamkang J. Math.*, 2015, vol. 46, no. 3, pp. 229–243.
8. Burlutskaya, M.Sh., Zvereva, M.B., and Kamenskii, M.I., Boundary value problem on a geometric star-graph with a nonlinear condition at a node, *Math. Notes*, 2023, vol. 114, no. 2, pp. 275–279.
9. Sadovnichiy, V.A., Sultanaev, Y.T., and Akhtyamov, A.M., Inverse Sturm–Liouville problem with nonseparated boundary conditions on a geometric graph, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 194–204.
10. Zhabko, A.P., Nurtazina, K.B., and Provotorov, V.V., Uniqueness solution to the inverse spectral problem with distributed parameters on the graph-star, *Vestnik of Saint Petersburg University. Appl. Math. Comput. Sci. Control Proc.*, 2020, vol. 16, no. 2, pp. 129–143.

11. Savchuk, A.M. and Shkalikov, A.A., Sturm–Liouville operators with singular potentials, *Math. Notes*, 1999, vol. 66, no. 6, pp. 741–753.
12. Savchuk, A.M. and Shkalikov, A.A., Sturm–Liouville operators with distribution potentials, *Transactions of the Moscow Math. Soc.*, 2003, vol. 64, pp. 143–192.
13. Savchuk, A.M. and Sadovnichaya, I.V., Spectral analysis of one-dimensional Dirac system with summable potential and Sturm–Liouville operator with coefficient–distributions, *Sovrem. matematika. Fynd. napravlenia*, 2020, vol. 66, no. 3, pp. 373–530.
14. Savchuk, A.M., *Pryamyye i obratnyye spektral'nyye zadachi dlya operatora Shturma–Liuvillya i sistemy Diraka* (Direct and Inverse Spectral Problems for the Sturm–Liouville Operator and the Dirac System), Dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, 2019.