ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 2, с. 147–161

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.911.5+517.927.21

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ И РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

© 2025 г. О. В. Басков[1], Д. К. Потапов[2]

Санкт-Петербургский государственный университет

e-mail: [1] o.baskov@spbu.ru, [2] d.potapov@spbu.ru

Поступила в редакцию 01.02.2024 г., после доработки 19.10.2024 г.; принята к публикации 28.11.2024 г.

Для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с положительным параметром и разрывной правой частью, меняющей знак в точке скачка, исследованы различные краевые задачи, в том числе со смешанными и периодическими краевыми условиями. Доказаны теоремы о существовании периодических решений изучаемых краевых задач. Полученные результаты проиллюстрированы на примерах.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, краевая задача, разрывная правая часть, периодическое решение

DOI: 10.31857/S0374064125020016, EDN: HXOCSX

ВВЕДЕНИЕ

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями имеет достаточно богатую историю. В настоящее время изучению таких уравнений также уделяется значительное внимание. Отметим работы [1–15] последнего десятилетия, посвящённые проблеме существования различных типов решений (в том числе периодических) для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными правыми частями (в том числе с параметрами).

Дифференциальные уравнения с разрывными нелинейностями и смешанными краевыми условиями вызывают особый интерес. Они возникают во многих прикладных задачах, например, при изучении плазмы [16], тороидальных вихрей в идеальных жидкостях [17], в климатических моделях [18]. В статьях [4, 19] исследовались уравнения с кусочно-постоянной положительной правой частью, а в [20] рассматривался вопрос о существовании трёх решений дифференциального включения со смешанными краевыми условиями и неотрицательной правой частью.

В настоящей статье изучается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с параметром и разрывной правой частью, меняющей знак в точке разрыва, когда могут возникать периодические решения задач с краевыми условиями различных видов. В п. 1 рассмотрены задачи с краевыми условиями на линии, где правая часть терпит разрыв, п. 2 посвящён задачам, в которых решения начинаются не в точках смены знака правой части. Примеры, иллюстрирующие полученные результаты, приведены в п. 3.

1. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЯМИ, ЗАДАННЫМИ В ТОЧКЕ СМЕНЫ ЗНАКА

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$-u'' = \lambda f(u). \tag{1}$$

Здесь λ — положительный параметр, функция $f(u)$ определена и кусочно-непрерывна на некотором отрезке $[-\bar{u}, \bar{u}]$ $(\bar{u} > 0)$, существует константа $\gamma > 0$ такая, что $f(u) \leqslant -\gamma$ при $-\bar{u} \leqslant u < 0$ и $f(u) \geqslant \gamma$ при $0 < u \leqslant \bar{u}$, $f(0) = 0$. Таким образом, функция $f(u)$ терпит разрыв при $u = 0$, причём при переходе через эту точку она меняет знак с минуса на плюс. Возможно, что $f(u)$ имеет ещё некоторое конечное число точек разрыва первого рода. Также будем требовать, чтобы на участках непрерывности эта функция была липшицевой.

Решением уравнения (1) будем называть дважды дифференцируемую функцию $u(x)$, удовлетворяющую уравнению (1) в точках непрерывности правой части, а в точках разрыва первого рода функции $f(u)$ должно иметь место включение

$$-u''(x) \in \lambda[f(u-0), f(u+0)],$$

где

$$f(u \pm 0) = \lim_{\eta \to u \pm 0} f(\eta).$$

Отметим, что уравнение (1) имеет тривиальное решение $u = 0$. В дальнейшем нас будут интересовать лишь нетривиальные решения.

При указанных выше ограничениях справедлива

Лемма 1. *Задача Коши для уравнения* (1) *с начальными данными вида*

$$u(\hat{x}) = \hat{u}, \quad u'(\hat{x}) = \hat{u}', \quad \hat{u} \in (-\bar{u}, \bar{u}),$$

имеет единственное решение в некоторой окрестности точки $\hat{x}$.

Доказательство. Не умаляя общности, будем считать, что $\hat{u} > 0$. Обозначим точки разрыва функции $f(u)$ на интервале $(0, \bar{u})$ через $u_2, \ldots, u_k$ и дополнительно положим $u_1 = 0$, $u_{k+1} = \bar{u}$.

Если $\hat{u}$ является точкой непрерывности $f(u)$, то она попадает в некоторый отрезок $[u_i, u_{i+1}]$, на котором можно определить функцию $g(u) = f(u)$, $u \in (u_i, u_{i+1})$, $g(u_i) = f(u_i + 0)$, $g(u_{i+1}) = f(u_{i+1} - 0)$ так, чтобы она удовлетворяла условиям теоремы существования и единственности решения уравнения $-u'' = \lambda g(u)$ при $u \in [u_i, u_{i+1}]$.

Если $\hat{u} = u_i$ является точкой разрыва правой части, то при $\hat{u}' > 0$ аналогично поступаем на отрезке $[u_i, u_{i+1}]$, а при $\hat{u}' < 0$ — на отрезке $[u_{i-1}, u_i]$.

Наконец, если $\hat{u}' = 0$, то в силу требования положительности $f(u)$ при $u > 0$ производная решения должна убывать и, значит, решение должно переходить в отрезок $[u_{i-1}, u_i]$, на котором проводятся те же рассуждения. Если $\hat{u} = 0$, то в случае $\hat{u}' \neq 0$ мы вновь рассматриваем соответствующий отрезок, а в случае $\hat{u}' = 0$ в силу условия на знак правой части решение не может выйти ни в область $u > 0$, поскольку тогда в окрестности $\hat{x}$ нашлась бы точка x, в которой $u''(x) > 0$, ни в область $u < 0$ по аналогичной причине, и единственным решением в этом случае является тривиальное решение $u(x) = 0$. Лемма доказана.

Поставим для уравнения (1) задачу Коши с начальными условиями

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = s. \tag{2}$$

Лемма 2. *При каждом* $\lambda > 0$ *есть такое число* $s_\lambda > 0$, *что для каждого* $s \in (0, s_\lambda)$ *существует такое* $x_0 > 0$, *непрерывно зависящее от* s, *что решение* $u(x)$ *задачи Коши* (1), (2) *монотонно возрастает при* $x \in (0, x_0)$, *монотонно убывает при* $x \in (x_0, 2x_0)$, $u'(x_0) = 0$, $u(2x_0) = 0$ *и* $u'(2x_0) = -s$. *При этом* $\lim_{s \to +0} x_0 = 0$.

Доказательство. Из уравнения (1) имеем $-2u'u''=2\lambda f(u)u'$, т.е. $-(u'^2)'=2\lambda f(u)u'$, $-d(u'^2)=2\lambda f(u)du$.

Введём первообразную $F(u)=\int_0^u f(u)\,du$. В силу того, что $f(u)\geqslant\gamma$ при $0<u\leqslant\bar u$, $F(u)$ монотонна и непрерывна на $[0,\bar u]$, а значит, существует обратная функция F^{-1}, которая монотонна и непрерывна на $[0,F(\bar u)]$.

Интегрируя, получаем $-u'^2=2\lambda F(u)+C_1$, где C_1 — произвольная постоянная. При $x=0$ имеем $F(0)=0$, $C_1=-s^2$. Тогда $s^2-u'^2=2\lambda F(u)$, откуда находим $u'=\pm\sqrt{s^2-2\lambda F(u)}$.

Положим $s_\lambda=\sqrt{2\lambda F(\bar u)}>0$. Если $s\in(0,s_\lambda)$, то при малых $x>0$ решение $u>0$, правая часть $f(u)\geqslant\gamma>0$ и u'' отрицательна, так что u' убывает. Будем рассматривать часть решения при $x\in(0,x_0)$, где $u'(x)>0$. Обозначим $u_0=u(x_0)$. Тогда

$$u'=\sqrt{s^2-2\lambda F(u)},\quad \frac{du}{\sqrt{s^2-2\lambda F(u)}}=dx,\quad \int\limits_0^u\frac{du}{\sqrt{s^2-2\lambda F(u)}}=x+C_2,$$

где C_2 — произвольная постоянная. Из начальных данных находим $C_2=0$, поэтому

$$x=\int\limits_0^u\frac{du}{\sqrt{s^2-2\lambda F(u)}}.$$

Поскольку при $u\in(0,\bar u)$ функция $F(u)$ монотонно возрастает, уравнение $2\lambda F(u)=s^2$ имеет единственное решение $u_0=F^{-1}(s^2/(2\lambda))$. При $x\in(0,x_0)$ мы требовали выполнения условия $u'(x)>0$, а значит, $2\lambda F(u)<s^2$. Если $2\lambda F(u(x))=s^2$, то $u'(x)=0$. Тогда

$$u'(x_0)=0\quad\text{и}\quad x_0=\int\limits_0^{u_0}\frac{du}{\sqrt{s^2-2\lambda F(u)}}.$$

Поскольку $f(u)\geqslant\gamma$, то имеем

$$\gamma x_0=\int\limits_0^{u_0}\frac{\gamma\,du}{\sqrt{s^2-2\lambda F(u)}}\leqslant\int\limits_0^{u_0}\frac{f(u)du}{\sqrt{s^2-2\lambda F(u)}}=-\frac{1}{\lambda}\sqrt{s^2-2\lambda F(u)}\Big|_0^{u_0}=\frac{s}{\lambda},$$

так что $x_0\leqslant s/(\lambda\gamma)$, и $\lim_{s\to+0}x_0=0$.

Покажем, что выбор x_0 непрерывно зависит от s. Преобразуем интеграл

$$\int\limits_0^{u_0}\frac{du}{\sqrt{s^2-2\lambda F(u)}}=\int\limits_0^{u_0}\frac{du}{\sqrt{2\lambda F(u_0)-2\lambda F(u)}}=$$

$$=\int\limits_0^{u_0}\left[2\lambda\int\limits_u^{u_0}f(u)\,du\right]^{-1/2}du=\int\limits_0^{1}\left[2\lambda\int\limits_{u_0v}^{u_0}f(u)\,du\right]^{-1/2}u_0\,dv$$

и оценим подынтегральную функцию

$$\left[2\lambda\int\limits_{u_0v}^{u_0}f(u)\,du\right]^{-1/2}u_0\leqslant\sqrt{\frac{\bar u}{2\lambda\gamma(1-v)}}.$$

Эта оценка не зависит от s, и сходится интеграл

$$\int\limits_0^1\sqrt{\frac{\bar u}{2\lambda\gamma(1-v)}}\,dv=\sqrt{\frac{2\bar u}{\lambda\gamma}}.$$

Следовательно, интеграл, дающий x_0, сходится равномерно и x_0 непрерывно зависит от s.

Наконец, в уравнении (1) сделаем замену переменной $t=2x_0-x$. Обозначив $\dot{u}=du/dt$, получим $-\ddot{u}=\lambda f(u)$. Поставим условия Коши $u|_{t=0}=0$, $\dot{u}|_{t=0}=s$. Тогда по доказанному выше имеем решение $u(t)$ при $t\in(0,x_0)$, которое удовлетворяет условиям $u|_{t=x_0}=u_0$, $\dot{u}|_{t=x_0}=0$. Поскольку $\dot{u}=-u'$, то, возвращаясь к прежней переменной, получим решение при $x\in(x_0,2x_0)$, причём $u(x_0)=u_0$, $u'(x_0)=0$. Решение при $x\in(0,x_0)$ также удовлетворяет этим условиям, поэтому их можно “склеить” в одно решение при $x\in(0,2x_0)$. Очевидно, что $u(2x_0)=0$. При этом условие $\dot{u}|_{t=0}=s$ даёт $u'(2x_0)=-s$. Лемма доказана.

Лемма 3. *При каждом $\lambda>0$ найдётся такое число $s^\lambda>0$, что для каждого $s\in(-s^\lambda,0)$ существует такое $x_1>0$, непрерывно зависящее от s, что решение $u(x)$ задачи Коши (1), (2) монотонно убывает при $x\in(0,x_1)$, монотонно возрастает при $x\in(x_1,2x_1)$, $u'(x_1)=0$, $u(2x_1)=0$ и $u'(2x_1)=-s$. При этом $\lim_{s\to-0}x_1=0$.*

Доказательство. Сделаем в уравнении (1) замену $v=-u$ и дополнительно обозначим $p=-s>0$. Тогда задача преобразуется к виду $-v''=-\lambda f(-v)$, $v(0)=0$, $v'(0)=p$. В силу положительности p при малых $x>0$ решение $v(x)>0$, тогда $-f(-v)\geqslant\gamma$. Так что выполнены условия леммы 2, из которой получаем существование точки x_1, для которой $v'(x_1)=0$, $v(2x_1)=0$, $v'(2x_1)=-p$, $\lim_{p\to+0}x_1=0$. Возвращаясь к прежним обозначениям, получаем требуемое. Лемма доказана.

Приведённые леммы 1–3 помогают доказать основные результаты, сформулированные в виде утверждений теорем.

Теорема 1. *При всех $\lambda>0$ уравнение (1) с краевыми условиями $u(a)=u(b)=0$ $(a<b)$ имеет бесконечно много периодических решений, удовлетворяющих оценке $|u(x)|\leqslant\bar{u}$.*

Доказательство. Пусть $c\in\mathbb{R}$. Сделаем замену переменной $t=x-c$, $v(t)=u(x-c)$, тогда уравнение (1) преобразуется к виду $-v''=\lambda f(v)$. Пусть $\check{s}=\min\{s_\lambda,s^\lambda\}$, где s_λ и s^λ найдены из лемм 2 и 3. Задав начальные условия $v(0)=0$, $v'(0)=s\in(0,\check{s})$, по лемме 2 получим существование решения $v(t)$, удовлетворяющего условиям $v(2x_0)=0$, $v'(2x_0)=-s$. Возвращаясь к прежним обозначениям, получим существование решения $u(x)$, удовлетворяющего условиям $u(c)=0$, $u'(c)=s>0$, $u(c+2x_0)=0$, $u'(c+2x_0)=-s$. При этом в точке максимума $u(c+x_0)=u_0\leqslant\bar{u}$. Аналогично в случае $s<0$ получим решение, для которого $u(c)=0$, $u'(c)=s<0$, $u(c+2x_1)=0$, $u'(c+2x_1)=-s$. Это решение также удовлетворяет неравенству $|u(x)|\leqslant\bar{u}$.

Возьмём произвольное число $s\in(0,\check{s})$. Пусть $c=a$. Тогда найдётся решение, удовлетворяющее условиям $u(a)=0$, $u'(a)=s$, $u(a+2x_0)=0$, $u'(a+2x_0)=-s$. Теперь пусть $c=a+2x_0$, тогда это решение можно будет “склеить” с решением, для которого $u(a+2x_0)=0$, $u'(a+2x_0)=-s$, $u(a+2x_0+2x_1)=0$, $u'(a+2x_0+2x_1)=s$. Пусть $T=2x_0+2x_1$. Полагая $c=a+nT$ и $c=a+nT+2x_0$ при целых n, будем получать решения, которые “склеиваются” в одно непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1). Так как при $c=a+nT$ уравнение, к которому заменой $t=x-c$ сводится (1), и начальные данные для задачи Коши одинаковые, то $u(x+nT)=u(x)$ и решение периодическое с периодом T.

Поскольку $x_0>0$ и $x_1>0$, то $T>0$ и существует такое n_1, что $a+n_1T>b$. При этом в силу равенств $\lim_{s\to+0}x_0=\lim_{s\to+0}x_1=0$ и $\lim_{s\to+0}T=0$ имеем $a+n_1T\to a<b$. Так как зависимость T от s непрерывная, то существует такое значение s_1, при котором соответствующее T_1 удовлетворяет равенству $a+n_1T_1=b$. Соответствующее решение удовлетворяет требуемым краевым условиям.

Далее будем брать $n_i=n_{i-1}+1$ $(i\geqslant2)$. Если предположить существование решения $u(x)$, для которого $u(a)=0$, $u'(a)=s_{i-1}$, $a+n_{i-1}T_{i-1}=b$, $u(b)=0$, то $a+n_iT_{i-1}>b$, но $a+n_iT\to a<b$ при $s\to+0$. Поэтому существуют очередное значение s_i и соответствующее T_i, для которого $a+n_iT_i=b$, и соответствующее решение вновь удовлетворяет требуемым краевым условиям.

Так по индукции можно получить бесконечное количество решений с периодами T_i. Теорема доказана.

Теорема 2. *При всех* $\lambda>0$ *уравнение* (1) *со смешанными краевыми условиями* $u(a)=u'(b)=0$ $(a<b)$ *имеет бесконечно много периодических решений, удовлетворяющих оценке* $|u(x)|\leqslant\bar{u}$.

Доказательство. Возьмём произвольное число $s\in(0,\check{s})$. Так же как и в предыдущей теореме, можно получить решение $u(x)$, удовлетворяющее условию $u(a)=0$, периодическое с периодом $T=2x_0+2x_1$, причём $u'(a+nT+x_0)=0$. Далее будем выбирать n так, чтобы $a+nT+x_0>b$. В силу того, что $\lim_{s\to+0}(a+nT+x_0)=a<b$, найдётся такое s, что $a+nT+x_0=b$. Соответствующее решение удовлетворяет требуемым краевым условиям. Увеличивая n на единицу, такими же рассуждениями будем получать очередные решения. Теорема доказана.

Теорема 3. *При всех* $\lambda>0$ *уравнение* (1) *со смешанными краевыми условиями* $u'(a)=u(b)=0$ $(a<b)$ *имеет бесконечно много периодических решений, удовлетворяющих оценке* $|u(x)|\leqslant\bar{u}$.

Доказательство. Сделаем замену переменной $t=-x$. Тогда задача сведётся к уравнению $-\ddot{u}=\lambda f(u)$ с условиями $u(-b)=u'(-a)=0$ $(-b<-a)$. По теореме 2 получаем требуемое. Теорема доказана.

Теорема 4. *При всех* $\lambda>0$ *уравнение* (1) *с периодическими краевыми условиями* $u(a)=u(b)$, $u'(a)=u'(b)$ $(a<b)$ *имеет бесконечно много периодических решений, удовлетворяющих оценке* $|u(x)|\leqslant\bar{u}$.

Доказательство. Как и в теореме 1, будем искать решения $u_i(x)$ с периодами T_i, удовлетворяющими равенствам $a+n_iT_i=b$. Выберем произвольное $c\in\mathbb{R}$ и рассмотрим $u_i(x-c)$. Поскольку $(b-c)-(a-c)=n_iT_i$, то $u_i(a-c)=u_i(b-c)$ и $u_i'(a-c)=u_i'(b-c)$. Другими словами, любые решения вида $u_i(x-c)$ удовлетворяют требуемым краевым условиям. Теорема доказана.

2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЯМИ, ЗАДАННЫМИ НЕ В ТОЧКЕ СМЕНЫ ЗНАКА

Рассмотрим уравнение (1) с положительным параметром λ, где функция $f(u)$ определена и кусочно-непрерывна при всех u, липшицева на участках непрерывности, имеет конечное число точек разрыва первого рода, существуют числа $\beta>0$ и $\gamma>0$ такие, что $f(u)\leqslant-\gamma$ при $u<\beta$, $f(u)\geqslant\gamma$ при $u>\beta$, а $f(\beta)=0$. Таким образом, $f(u)$ терпит разрыв при $u=\beta$.

Сначала рассмотрим задачу Коши (1), (2).

Лемма 4. *При всех* $\lambda>0$ *и* $s>0$ *существует такое* $x_2>0$, *непрерывно зависящее от* s *и* λ, *что решение* $u(x)$ *задачи Коши* (1), (2) *монотонно возрастает при* $x\in(0,x_2)$, $u(x_2)=\beta$ *и* $u'(x_2)=\sqrt{s^2+2\lambda I}$, *где* $I=-\int_0^\beta f(u)\,du$. *При этом*

$$\lim_{s\to+0}x_2\leqslant\sqrt{\frac{2\beta}{\lambda\gamma}},\quad \lim_{s\to+\infty}x_2=0,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}x_2=0.$$

Доказательство. Если $s>0$, то при малых $x>0$ решение $u(x)\in[0,\beta]$. Поскольку $-u''=\lambda f(u)$ и $f(u)\leqslant-\gamma$ при таких u, то $u''\geqslant\lambda\gamma>0$, производная $u'(x)$ возрастает и остаётся положительной и решение $u(x)$ монотонно возрастает. При этом

$$-2u'u''=2\lambda f(u)u',\quad -u'^2=2\lambda\int\limits_0^u f(u)\,du+C_3,$$

где C_3 — произвольная постоянная.

Из начальных данных имеем $s^2-u'^2=2\lambda F(u)$, где введено обозначение $F(u)=\int_0^u f(u)\,du$. Далее $u'=\pm\sqrt{s^2-2\lambda F(u)}$. Руководствуясь начальными данными, выбираем верхний знак. Отметим, что в силу $f(u)\leqslant-\gamma$ при $u\in[0,\beta)$ значения $F(u)<0$. Находим

$$x=\int\limits_0^u \frac{du}{\sqrt{s^2-2\lambda F(u)}}.$$

Подставляя сюда $u=\beta$, получаем

$$x_2=\int\limits_0^\beta \frac{du}{\sqrt{s^2-2\lambda F(u)}}.$$

Это значение непрерывно зависит от s и λ, $\lim_{s\to+\infty}x_2=0$, $\lim_{\lambda\to+\infty}x_2=0$ и

$$\lim_{s\to+0}x_2=\int\limits_0^\beta \frac{du}{\sqrt{-2\lambda F(u)}}=\int\limits_0^\beta\biggl[2\lambda\int\limits_0^u -f(u)\,du\biggr]^{-1/2}du\leqslant\int\limits_0^\beta\frac{du}{\sqrt{2\lambda\gamma u}}=\sqrt{\frac{2\beta}{\lambda\gamma}}.$$

При этом $u(x_2)=\beta$ и $u'(x_2)=\sqrt{s^2-2\lambda F(\beta)}=\sqrt{s^2+2\lambda I}$ $(I=-F(\beta))$. Лемма доказана.

Лемма 5. *При всех* $\lambda>0$ *и* $s<0$ *существует такое* $x_1>0$, *непрерывно зависящее от* s *и* λ, *что решение* $u(x)$ *задачи Коши* (1), (2) *монотонно убывает при* $x\in(0,x_1)$, *монотонно возрастает при* $x\in(x_1,2x_1)$, $u'(x_1)=0$, $u(2x_1)=0$ *и* $u'(2x_1)=-s$. *При этом* $\lim_{s\to+0}x_1=0$, $\lim_{\lambda\to+\infty}x_1=0$.

Доказательство. Если $s<0$, то при малых $x>0$ решение $u(x)<0$. Уравнение (1) можно преобразовать к виду $s^2-u'^2=2\lambda F(u)$, где $F(u)=\int_0^u f(u)\,du$. Отсюда $u'=\pm\sqrt{s^2-2\lambda F(u)}$. При малых $x>0$ за счёт отрицательности s будем иметь $u'(x)<0$, так что выбираем нижний знак и находим

$$x=-\int\limits_0^u \frac{du}{\sqrt{s^2-2\lambda F(u)}}=\int\limits_u^0 \frac{du}{\sqrt{s^2-2\lambda F(u)}}.$$

В силу того, что при $u<0$ функция $f(u)\leqslant-\gamma$, её первообразная $F(u)=\int_u^0(-f(u))\,du\geqslant\gamma|u|$ положительна, непрерывна и монотонно убывает, следовательно, существует обратная функция $F^{-1}(\tilde s)$, определённая при $\tilde s\geqslant0$, также монотонно убывающая и непрерывная.

Пусть $u_0=F^{-1}(s^2/(2\lambda))$. Зафиксируем некоторые $\lambda_0\in(0,\lambda)$ и $\bar u<u_0<0$. Значение x_1, при котором $u(x_1)=u_0$, удовлетворяет соотношению

$$x_1=\int\limits_{u_0}^0 \frac{du}{\sqrt{s^2-2\lambda F(u)}}.$$

Этот интеграл несобственный, так как при $u=u_0$ подкоренное выражение обращается в нуль. Преобразуем

$$\int\limits_{u_0}^0 \frac{du}{\sqrt{s^2-2\lambda F(u)}}=\int\limits_{u_0}^0 \frac{du}{\sqrt{2\lambda F(u_0)-2\lambda F(u)}}=$$

$$=\int\limits_{u_0}^0\biggl[2\lambda\int\limits_{u_0}^u(-f(u))\,du\biggr]^{-1/2}du=-\int\limits_0^1\biggl[2\lambda\int\limits_{u_0}^{u_0v}(-f(u))\,du\biggr]^{-1/2}u_0\,dv$$

и оценим подынтегральную функцию

$$-\left[2\lambda\int\limits_{u_0}^{u_0v}(-f(u))\,du\right]u_0\leqslant\sqrt{\frac{-u_0}{2\lambda\gamma(1-v)}}\leqslant\sqrt{\frac{-\bar{u}}{2\lambda_0\gamma(1-v)}}.$$

Здесь в правой части приведена функция, не зависящая от s и λ, интеграл от которой сходится. Следовательно, исследуемый несобственный интеграл сходится равномерно и значение x_1 непрерывно зависит от s и λ.

В силу соотношений

$$x_1=\int\limits_{u_0}^{0}\frac{du}{\sqrt{s^2-2\lambda F(u)}}\leqslant\frac{1}{\gamma}\int\limits_{u_0}^{0}\frac{-f(u)\,du}{\sqrt{s^2-2\lambda F(u)}}=\frac{1}{\lambda\gamma}\sqrt{s^2-2\lambda F(u)}\bigg|_{u_0}^{0}=\frac{|s|}{\lambda\gamma}$$

заключаем, что $\lim_{s\to+0}x_1=0$ и $\lim_{\lambda\to+\infty}x_1=0$.

Итак, $u'(x_1)=-\sqrt{s^2-2\lambda F(u_0)}=0$. Теперь рассмотрим $x\in(x_1,2x_1)$. Сделаем в уравнении (1) замену $t=2x_1-x$ и поставим задачу Коши с условиями $u|_{t=0}=0$, $\dot u|_{t=0}=s$. Тогда по доказанному выше при тех же значениях x_1 и u_0 получим, что $u|_{t=x_1}=u_0$, $\dot u|_{t=x_1}=0$. Проводя обратную замену, получаем существование решения, удовлетворяющего ограничениям $u(x_1)=u_0$, $u'(x_1)=0$, $u(2x_1)=0$, $u'(2x_1)=-s$. Поскольку решение задачи Коши (1), (2) удовлетворяло условиям $u(x_1)=u_0$, $u'(x_1)=0$, то найденное решение является его продолжением. Лемма доказана.

Теперь возьмём начальные условия вида

$$u(0)=\beta,\quad u'(0)=s. \tag{3}$$

Лемма 6. *При всех $\lambda>0$ и $s>0$ существует такое $x_0>0$, непрерывно зависящее от s и λ, что решение $u(x)$ задачи Коши (1), (3) монотонно возрастает при $x\in(0,x_0)$, монотонно убывает при $x\in(x_0,2x_0)$, $u'(x_0)=0$, $u(2x_0)=\beta$ и $u'(2x_0)=-s$. При этом $\lim_{s\to+0}x_0=0$, $\lim_{\lambda\to+\infty}x_0=0$.*

Доказательство. С помощью замены $v=\beta-u$ уравнение (1) примет вид $-v''=\lambda g(v)$, где функция $g(v)=-f(\beta-v)\leqslant-\gamma$ при $v<0$. Начальные условия теперь $v(0)=0$, $v'(0)=-s<0$. Поскольку в лемме 5 правая часть использовалась лишь при $v<0$, её можно применить и найти такое $x_0>0$, непрерывно зависящее от s и λ, что $v(x)$ монотонно убывает при $x\in(0,x_0)$, монотонно возрастает при $x\in(x_0,2x_0)$, $v'(x_0)=0$, $v(2x_0)=0$, $v'(2x_0)=s$, $\lim_{s\to+0}x_0=0$ и $\lim_{\lambda\to+\infty}x_0=0$. Возвращаясь к прежним обозначениям, получаем требуемое. Лемма доказана.

Приведённые вспомогательные утверждения характеризуют поведение параметров x_0 и x_1 при $s\to+0$. Если же $s\to+\infty$, то возможны различные варианты. Сначала рассмотрим случай, когда x_0 и x_1 одновременно бесконечно малы при $s\to+\infty$.

Теорема 5. *Если $\lim_{s\to+\infty}x_0=0$ и $\lim_{s\to+\infty}x_1=0$, то при всех $\lambda>0$ уравнение (1) с краевыми условиями $u(a)=u(b)=0$ $(a<b)$ имеет бесконечно много периодических решений.*

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\lambda>0$ и $s>0$ и рассмотрим решение, удовлетворяющее условиям $u(a)=0$, $u'(a)=-s$. Линейная замена переменной $y=x-a$ сводит задачу к рассмотренной в лемме 6, по которой найдётся такое x_0, что $u(a+2x_0)=0$ и $u'(a+2x_0)=s$. Далее по лемме 4 найдётся x_2, для которого $u(a+2x_0+x_2)=\beta$, $u'(a+2x_0+x_2)=\sqrt{s^2+2\lambda I}$. Затем по лемме 5 находим x_1 такое, что $u(a+2x_0+x_2+2x_1)=\beta$, $u'(a+2x_0+x_2+2x_1)=-\sqrt{s^2+2\lambda I}$. Наконец, применяя лемму 4 к уравнению (1), в котором сделана замена переменной $y=a+2x_0+2x_1+2x_2-x$ и выбраны начальные данные $u|_{y=0}=0$,

$u'|_{y=0}=s$, при том же самом значении x_2 будем иметь $u(a+2x_0+x_2+2x_1)=u|_{y=x_2}=\beta$, $u'(a+2x_0+x_2+2x_1)=-u'|_{y=x_2}=-\sqrt{s^2+2\lambda I}$, так что это решение объединяется с уже построенным и $u(a+2x_0+2x_2+2x_1)=0$, $u'(a+2x_0+2x_2+2x_1)=-s$. Таким образом, получено периодическое решение уравнения (1) с периодом $T(s,\lambda)=2x_0+2x_1+2x_2$.

Найдётся целое $m_1\geqslant 0$, для которого $m_1T(s,\lambda)\geqslant b-a$. В силу $\lim_{s\to+\infty}T(s,\lambda)=0$ для достаточно бóльших s будет выполнено неравенство $m_1T(s,\lambda)\leqslant b-a$. Поскольку зависимость x_0, x_1 и x_2 от s непрерывная, найдётся такое s_1, что $m_1T(s_1,\lambda)=b-a$. За счёт этого будет выполнено краевое условие $u(b)=0$, и соответствующее этому значению s_1 решение будет решением поставленной краевой задачи.

Предположим, что найдено s_n, для которого $m_nT(s_n,\lambda)=b-a$. Положим $m_{n+1}=m_n+1$. Тогда $m_{n+1}T(s_n,\lambda)>b-a$. Однако за счёт стремления левой части последнего неравенства к нулю при $s\to+\infty$ обязательно найдётся такое s_{n+1}, что $m_{n+1}T(s_{n+1},\lambda)=b-a$. Таким образом можно построить последовательность $\{s_n\}$, которой соответствует последовательность периодических решений поставленной краевой задачи. Теорема доказана.

Теорема 6. *Если* $\lim_{s\to+\infty}x_0=0$ *и* $\lim_{s\to+\infty}x_1=0$, *то при всех* $\lambda>0$ *уравнение* (1) *со смешанными краевыми условиями* $u(a)=u'(b)=0$ $(a<b)$ *имеет бесконечно много периодических решений.*

Доказательство. Так же как и в предыдущей теореме, для произвольного $\lambda>0$ и некоторого $s>0$ строим периодическое решение с периодом $T(s,\lambda)=2x_0+2x_1+2x_2$. Найдётся целое число $m_1\geqslant 0$, для которого $m_1T(s,\lambda)+x_0\geqslant b-a$. При $s\to+\infty$ левая часть этого неравенства стремится к нулю, поэтому находим s_1, для которого $m_1T(s_1,\lambda)+x_0=b-a$. Из леммы 6 следует, что $u'(b)=0$, так что найдено решение задачи со смешанными краевыми условиями. Дальнейшие рассуждения также аналогичны. Теорема доказана.

Теорема 7. *Если* $\lim_{s\to+\infty}x_0=0$ *и* $\lim_{s\to+\infty}x_1=0$, *то при всех* $\lambda>0$ *уравнение* (1) *со смешанными краевыми условиями* $u'(a)=u(b)=0$ $(a<b)$ *имеет бесконечно много периодических решений.*

Доказательство сводится к доказательству теоремы 6 заменой $y=a+b-x$.

Теорема 8. *Если* $\lim_{s\to+\infty}x_0=0$ *и* $\lim_{s\to+\infty}x_1=0$, *то при всех* $\lambda>0$ *уравнение* (1) *с периодическими краевыми условиями* $u(a)=u(b)$, $u'(a)=u'(b)$ $(a<b)$ *имеет бесконечно много периодических решений.*

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 5, поскольку найденные в ней решения удовлетворяют условию $u'(a)=u'(b)$.

Условия доказанных теорем выполняются, например, для класса функций суперлинейного роста, что позволяет сформулировать следующее

Следствие 1. *Пусть существуют такие константы* $\bar{u}$, $\varkappa>0$ *и* $\alpha>1$, *что неравенство* $|f(u)|\geqslant\varkappa|u|^\alpha$ *выполнено при всех* $|u|\geqslant\bar{u}>0$. *Тогда при всех* $\lambda>0$ *уравнение* (1) *с каждым из краевых условий* $u(a)=u(b)=0$; $u(a)=u'(b)=0$; $u'(a)=u(b)=0$ *или* $u(a)=u(b)$, $u'(a)=u'(b)$ $(a<b)$ *имеет бесконечно много периодических решений.*

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$x_1=\int\limits_{u_0}^{0}\left[2\lambda\int\limits_{u_0}^{u}(-f(u))\,du\right]^{-1/2}du$$

из леммы 5. Пусть значения $u_0<-\bar{u}$. Тогда для $u\in(-\bar{u},0)$ будем иметь

$$\int\limits_{u_0}^{u}(-f(u))\,du=\int\limits_{u_0}^{u}|f(u)|\,du\geqslant\int\limits_{u_0}^{-\bar{u}}|f(u)|\,du\geqslant\varkappa\int\limits_{u_0}^{-\bar{u}}|u|^\alpha\,du=\frac{\varkappa}{\alpha+1}\big(|u_0|^{\alpha+1}-|\bar{u}|^{\alpha+1}\big),$$

а для $u\in(u_0,-\bar u)$ получим

$$\int\limits_{u_0}^{u}(-f(u))\,du\geqslant\varkappa\int\limits_{u_0}^{u}|u|^\alpha\,du=\frac{\varkappa}{\alpha+1}\big(|u_0|^{\alpha+1}-|u|^{\alpha+1}\big).$$

Тогда

$$x_1\leqslant\int\limits_{u_0}^{-\bar u}\bigg[\frac{2\lambda\varkappa}{\alpha+1}\big(|u_0|^{\alpha+1}-|u|^{\alpha+1}\big)\bigg]^{-1/2}du+\int\limits_{-\bar u}^{0}\bigg[\frac{2\lambda\varkappa}{\alpha+1}\big(|u_0|^{\alpha+1}-|\bar u|^{\alpha+1}\big)\bigg]^{-1/2}du=$$

$$=\sqrt{\frac{\alpha+1}{2\lambda\varkappa|u_0|^{\alpha-1}}}\int\limits_{-\bar u/u_0}^{1}\frac{dv}{\sqrt{1-v^{\alpha+1}}}+\sqrt{\frac{(\alpha+1)|u_0|^2}{2\lambda\varkappa(|u_0|^{\alpha+1}-|\bar u|^{\alpha+1})}}\xrightarrow[u_0\to-\infty]{}0.$$

Осталось заметить, что $u_0=F^{-1}(s^2/(2\lambda))\xrightarrow[s\to+\infty]{}-\infty$ в силу монотонности $F^{-1}(s)$. Таким образом, $\lim_{s\to+\infty}x_1=0$.

Аналогично проводятся рассуждения при $u_0>\bar u$ для

$$x_0=\int\limits_{\beta}^{u_0}\bigg[2\lambda\int\limits_{u}^{u_0}f(u)\,du\bigg]^{-1/2}du.$$

Таким образом, выполнены условия теорем 5–8. Следствие доказано.

Теперь приведём аналогичные результаты для случая, когда либо x_0, либо x_1 является бесконечно большой величиной при $s\to+\infty$.

Теорема 9. *Если* $\lim_{s\to+\infty}x_0=+\infty$ *или* $\lim_{s\to+\infty}x_1=+\infty$, *то существует такая строго возрастающая последовательность* $\{\lambda_n\}$, *что при всех* $\lambda>\lambda_n$ *уравнение* (1) *с краевыми условиями* $u(a)=u(b)=0$ $(a<b)$ *имеет не менее* n *периодических решений.*

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\lambda>0$ и $s>0$. Рассмотрим решение задачи Коши (1), $u(a)=0$, $u'(a)=-s$. Как и в теореме 5, построим периодическое решение с периодом $T(s,\lambda)=2x_0+2x_1+2x_2$. Пусть n — произвольное натуральное число. Поскольку $\lim_{\lambda\to+\infty}T(s,\lambda)=0$, то найдётся такое λ_n, что при всех $\lambda>\lambda_n$ будем иметь $nT(s,\lambda)\leqslant b-a$. Ввиду равенства $\lim_{s\to+\infty}T(s,\lambda)=+\infty$ и непрерывной зависимости от s найдётся такое значение s_n, что $nT(s_n,\lambda)=b-a$. При этом значении s_n будет выполнено краевое условие $u(b)=0$. Поскольку разным n соответствуют разные периоды, то в совокупности при $\lambda>\lambda_n$ получаем не менее n решений. Теорема доказана.

Теорема 10. *Если* $\lim_{s\to+\infty}x_0=+\infty$ *или* $\lim_{s\to+\infty}x_1=+\infty$, *то существует такая строго возрастающая последовательность* $\{\lambda_n\}$, *что при всех* $\lambda>\lambda_n$ *уравнение* (1) *со смешанными краевыми условиями* $u(a)=u'(b)=0$ $(a<b)$ *имеет не менее* n *периодических решений.*

Доказательство. Как и в теореме 9, при некоторых $\lambda>0$ и $s>0$ строим периодическое решение с периодом $T(s,\lambda)=2x_0+2x_1+2x_2$. Выбираем произвольное натуральное n и за счёт $\lim_{\lambda\to+\infty}T(s,\lambda)=0$ находим такое λ_n, что при всех $\lambda>\lambda_n$ будет справедливо неравенство $nT(s,\lambda)+x_0\leqslant b-a$. При $s\to+\infty$ левая часть этого неравенства стремится к бесконечности, следовательно, найдётся такое s_n, что $nT(s_n,\lambda)+x_0=b-a$. Это равенство обеспечивает выполнение условия $u'(b)=0$. В совокупности при $\lambda>\lambda_n$ получаем не менее n решений. Теорема доказана.

Теорема 11. *Если* $\lim_{s\to+\infty}x_0=+\infty$ *или* $\lim_{s\to+\infty}x_1=+\infty$, *то существует такая строго возрастающая последовательность* $\{\lambda_n\}$, *что при всех* $\lambda>\lambda_n$ *уравнение* (1) *со смешанными краевыми условиями* $u'(a)=u(b)=0$ $(a<b)$ *имеет не менее* n *периодических решений.*

Доказательство сводится к доказательству теоремы 10 заменой $y=a+b-x$.

Теорема 12. *Если* $\lim_{s\to+\infty} x_0=+\infty$ *или* $\lim_{s\to+\infty} x_1=+\infty$, *то существует такая строго возрастающая последовательность* $\{\lambda_n\}$, *что при всех* $\lambda>\lambda_n$ *уравнение* (1) *с периодическими краевыми условиями* $u(a)=u(b)$, $u'(a)=u'(b)$ $(a<b)$ *имеет не менее* n *периодических решений.*

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 9, поскольку найденные там решения удовлетворяют условию $u'(a)=u'(b)$.

Условия теорем 9–12 выполняются для функций подлинейного роста, как показывает

Следствие 2. *Пусть существуют константы* $\mu\geqslant 0$, $\varkappa\geqslant 0$, *не равные нулю одновременно, и* $\alpha\in(0,1)$ *такие, что неравенство* $|f(u)|\leqslant\mu+\varkappa|u|^\alpha$ *выполнено либо при всех* $u<0$, *либо при всех* $u>\beta$. *Тогда существует такая строго возрастающая последовательность* $\{\lambda_n\}$, *что при всех* $\lambda>\lambda_n$ *уравнение* (1) *с каждым из краевых условий* $u(a)=u(b)=0$; $u(a)=u'(b)=0$; $u'(a)=u(b)=0$ *или* $u(a)=u(b)$, $u'(a)=u'(b)$ $(a<b)$ *имеет не менее* n *периодических решений.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда неравенство $|f(u)|\leqslant\mu+\varkappa|u|^\alpha$ выполнено при $u<0$. В лемме 5 было получено выражение

$$x_1=-\int\limits_0^1\left[2\lambda\int\limits_{u_0}^{u_0v}(-f(u))\,du\right]^{-1/2}u_0\,dv,$$

где $u_0=F^{-1}(s^2/(2\lambda))<0$. С учётом $-f(u)\leqslant\mu+\varkappa(-u)^\alpha$ имеем

$$\int\limits_{u_0}^{u_0v}(-f(u))\,du\leqslant\int\limits_{u_0}^{u_0v}(\mu+\varkappa|u|^\alpha)\,du=\mu|u_0|(1-v)+\frac{\varkappa}{\alpha+1}|u_0|^{\alpha+1}(1-v^{\alpha+1}).$$

Если $\varkappa>0$, то

$$x_1\geqslant\int\limits_0^1\left[2\lambda\left(\mu(1-v)|u_0|^{-\alpha}+\frac{\varkappa}{\alpha+1}(1-v^{\alpha+1})\right)\right]^{-1/2}|u_0|^{(1-\alpha)/2}\,dv\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{\frac{\alpha+1}{2\lambda\varkappa}}|u_0|^{(1-\alpha)/2}\int\limits_0^1\frac{dv}{\sqrt{1-v^{\alpha+1}}},$$

а при $\varkappa=0$

$$x_1\geqslant\sqrt{\frac{|u_0|}{2\lambda\mu}}\int\limits_0^1\frac{dv}{\sqrt{1-v}}=\sqrt{\frac{2|u_0|}{\lambda\mu}}.$$

В обоих случаях $u_0\to-\infty$ и $x_1\to+\infty$ при $s\to+\infty$.

Если неравенство $|f(u)|\leqslant\mu+\varkappa|u|^\alpha$ выполнено при $u>\beta$, то можно провести аналогичные рассуждения и показать, что

$$\lim_{s\to+\infty}x_0=\lim_{s\to+\infty}\int\limits_\beta^{u_0}\left[2\lambda\int\limits_u^{u_0}f(u)\,du\right]^{-1/2}du=+\infty.$$

Таким образом, выполнены условия теорем 9–12. Следствие доказано.

Полученный результат обобщает теорему 3 из работы [11], в которой рассматривались кусочно-постоянные правые части.

3. ПРИМЕРЫ

Проиллюстрируем полученные в пп. 1, 2 результаты на примерах.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$-u''=\lambda\operatorname{sgn}u, \tag{4}$$

где λ — положительный параметр,

$$\operatorname{sgn}u=\begin{cases}-1, & \text{если } u<0,\\ 0, & \text{если } u=0,\\ 1, & \text{если } u>0,\end{cases}$$

с краевыми условиями $u(a)=u(b)=0$ $(a<b)$.

Согласно теореме 1 при каждом $\lambda>0$ существует бесконечное число периодических решений уравнения (4) с краевыми условиями $u(a)=u(b)=0$. Отметим, что при таком способе задания функции sgn имеется тождественно равное нулю решение $u(x)=0$, удовлетворяющее краевым условиям. В дальнейшем будем рассматривать ненулевые решения.

Обозначим $u'(a)=s$. Имеем

$$u(x)=s(x-a)-\frac{\lambda\operatorname{sgn}s}{2}(x-a)^2 \quad \text{при } x\in(a,x_1),$$

где $x_1=a+2|s|/\lambda$. При этом $u'(x_1)=s-\lambda\operatorname{sgn}s\,(x_1-a)=-s$. Далее получим периодическое решение с периодом $T=4|s|/\lambda$:

$$u(x)=(-1)^k\operatorname{sgn}s\left(|s|(x-x_k)-\frac{\lambda}{2}(x-x_k)^2\right), \tag{5}$$

где $x_k=a+kT/2$, $k=\lfloor 2(x-a)/T\rfloor$. Для выполнения краевого условия $u(b)=0$ необходимо, чтобы число $n=2(b-a)/T=\lambda(b-a)/(2|s|)$ было целым, откуда находим $s=\pm\lambda(b-a)/(2n)$. Таким образом, при всех $\lambda>0$ имеется бесконечно много решений.

Для каждого натурального n полагаем

$$T=\frac{2(b-a)}{n},\quad x_k=a+\frac{kT}{2},\quad k=\overline{0,n}.$$

Тогда две функции

$$u(x)=\pm(-1)^k\frac{\lambda}{2}(x-x_k)(x-x_{k+1}),\quad x\in[x_k,x_{k+1}], \tag{6}$$

являются решениями, графики которых при $a=0$, $b=1$, $\lambda=2$ приведены на рис. 1.

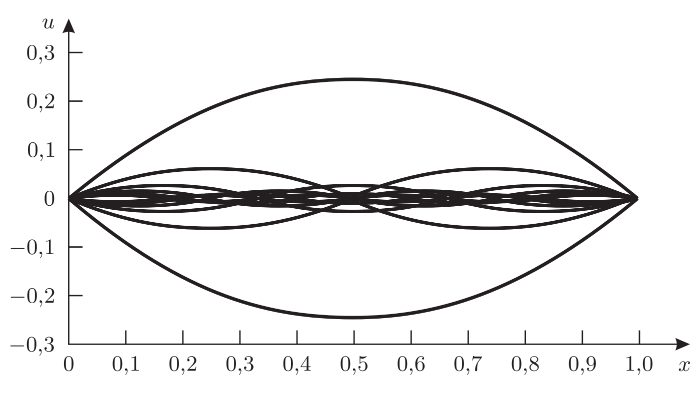

Рис. 1. Графики решений задачи из примера 1

Пример 2. Рассмотрим уравнение (4) со смешанными краевыми условиями $u(a)=u'(b)=0$ $(a<b)$. По теореме 2 данная краевая задача имеет бесконечно много периодических решений при всех $\lambda>0$.

Обозначим $u'(a)=s$. Как и выше, получим периодическое решение (5) с периодом $T=4|s|/\lambda$, в котором $x_k=a+kT/2$, $k=\lfloor 2(x-a)/T\rfloor$. Для выполнения краевого условия $u'(b)=0$ необходимо, чтобы $b=x_n+T/4$ при некотором целом n. Отсюда имеем

$$T=\frac{4(b-a)}{2n+1},\quad s=\pm\frac{\lambda(b-a)}{2n+1}.$$

Таким образом, при всех $\lambda>0$ существует бесконечно много решений, а именно, для каждого целого неотрицательного n полагаем

$$T=\frac{4(b-a)}{2n+1},\quad x_k=a+\frac{kT}{2},\quad k=\overline{0,n+1},$$

и формула (6) даёт эти решения. Их графики при $a=0$, $b=1$, $\lambda=2$ приведены на рис. 2.

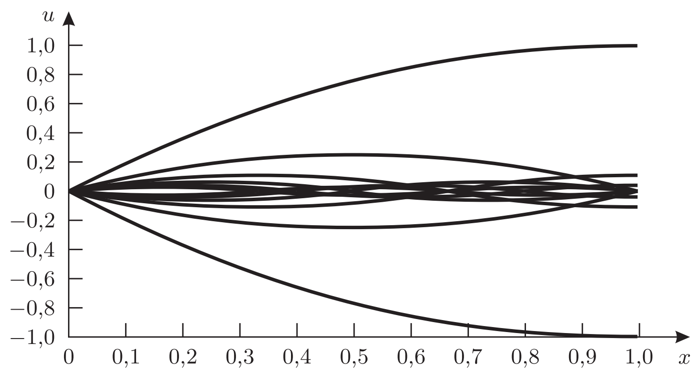

Рис. 2. Графики решений задачи из примера 2

Пример 3. Рассмотрим уравнение (4) со смешанными краевыми условиями $u'(a)=u(b)=0$ $(a<b)$. По теореме 3 искомая задача имеет бесконечно много периодических решений при всех значениях $\lambda>0$, определяемых по формуле (6), где

$$T=\frac{4(b-a)}{2n+1},\quad x_k=b-\frac{(n-k)T}{2},\quad k=\overline{0,n+1}.$$

Их графики являются зеркальными отражениями графиков, приведённых на рис. 2.

Пример 4. Уравнение (4) с периодическими краевыми условиями $u(a)=u(b)$, $u'(a)=u'(b)$ удовлетворяет теореме 4 и имеет бесконечно много периодических решений при всех $\lambda>0$, которые даются формулами (6), где $x_k=x_0+kT/2$, k — целое число, $T=(b-a)/n$, x_0 — произвольное вещественное число.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье рассмотрено обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с параметром и разрывной правой частью, причём в точке разрыва правая часть меняет знак с минуса на плюс. Показано, что при определённых достаточно общих условиях на правую часть в задачах с различными краевыми условиями существуют периодические решения. Установлены теоремы о бесконечном числе решений для случаев, когда краевые условия задаются на линии смены знака правой части. Если же краевые условия задаются не в точке разрыва правой части, то уравнение имеет бесконечное число решений в случае суперлинейно растущей правой части и конечное, зависящее от параметра, число решений в случае подлинейно растущей правой части.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00069).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Llibre, J. Periodic solutions of discontinuous second order differential systems / J. Llibre, M.A. Teixeira // J. Singularities. — 2014. — V. 10. — P. 183–190.
2. Bonanno, G. Sturm–Liouville equations involving discontinuous nonlinearities / G. Bonanno, G. D'Agui, P. Winkert // Minimax Theory Appl. — 2016. — V. 1, № 1. — P. 125–143.
3. Kamachkin, A.M. Existence of solutions for second-order differential equations with discontinuous right-hand side / A.M. Kamachkin, D.K. Potapov, V.V. Yevstafyeva // Electron. J. Differ. Equat. — 2016. — № 124. — P. 1–9.
4. Bensid, S. Stability results for discontinuous nonlinear elliptic and parabolic problems with a S-shaped bifurcation branch of stationary solutions / S. Bensid, J.I. Diaz // Disc. Contin. Dyn. Syst. Ser. B. — 2017. — V. 22, № 5. — P. 1757–1778.
5. Da Silva, C.E.L. Sliding solutions of second-order differential equations with discontinuous right-hand side / C.E.L. Da Silva, P.R. Da Silva, A. Jacquemard // Math. Meth. Appl. Sci. — 2017. — V. 40, № 14. — P. 5295–5306.
6. Павленко, В.Н. Задача Штурма–Лиувилля для уравнения с разрывной нелинейностью / В.Н. Павленко, Е.Ю. Постникова // Челяб. физ.-мат. журн. — 2019. — Т. 4, № 2. — С. 142–154.
7. Da Silva, C.E.L. Periodic solutions of a class of non-autonomous discontinuous second-order differential equations / C.E.L. Da Silva, A. Jacquemard, M.A. Teixeira // J. Dyn. Control Syst. — 2020. — V. 26, № 1. — P. 17–44.
8. О существовании периодического режима в одной нелинейной системе / А.С. Фурсов, Р.П. Митрев, П.А. Крылов, Т.С. Тодоров // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 8. — С. 1104–1115.
9. Евстафьева, В.В. Периодические режимы в системе автоматического управления с трёхпозиционным гистерезисным реле / В.В. Евстафьева, А.М. Камачкин, Д.К. Потапов // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. — 2022. — Т. 18, № 4. — С. 596–607.
10. Басков, О.В. Управление и возмущение в задаче Штурма–Лиувилля с разрывной нелинейностью / О.В. Басков, Д.К. Потапов // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. — 2023. — Т. 19, № 2. — С. 275–282.
11. Басков, О.В. О решениях краевой задачи для одного дифференциального уравнения второго порядка с параметром и разрывной правой частью / О.В. Басков, Д.К. Потапов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2023. — Т. 63, № 8. — С. 1296–1308.
12. Евстафьева, В.В. Об одном типе колебательных решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с трёхпозиционным гистерезисным реле и возмущением / В.В. Евстафьева, А.М. Камачкин, Д.К. Потапов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 2. — С. 150–163.
13. Евстафьева, В.В. Колебательные решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с трёхпозиционным гистерезисным реле без выхода в зоны насыщения / В.В. Евстафьева // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 712–725.
14. Потапов, Д.К. Аппроксимация задачи Штурма–Лиувилля с разрывной нелинейностью / Д.К. Потапов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 9. — С. 1191–1198.
15. Басков, О.В. О решениях одномерной задачи Гольдштика / О.В. Басков, Д.К. Потапов // Мат. заметки. — 2024. — Т. 115, № 1. — С. 14–23.
16. Temam, R. A non-linear eigenvalue problem: the shape at equilibrium of a confined plasma / R. Temam // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1975. — V. 60. — P. 51–73.

17. Fraenkel, L.E. A global theory of steady vortex rings in an ideal fluid / L.E. Fraenkel, M.S. Berger // Acta Math. — 1974. — V. 132, № 1. — P. 13–51.
18. Stakgold, I. Free boundary problems in climate modeling / I. Stakgold // Mathematics, Climate and Environment / Eds. J.I. Díaz, J.L. Lions. — Paris : Masson, 1993. — P. 177–188.
19. Bensid, S. Multiple stationary solutions of parabolic problem with discontinuous nonlinearities and their stability / S. Bensid, Z. Kaid // Complex Var. Elliptic Equat. — 2021. — V. 66, № 3. — P. 487–506.
20. Bonanno, G. On ordinary differential inclusions with mixed boundary conditions / G. Bonanno, A. Iannizzotto, M. Marras // Differ. Integral Equat. — 2017. — V. 30, № 3–4. — P. 273–288.

ON EXISTENCE OF PERIODIC SOLUTIONS OF AN ORDINARY SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH PARAMETER AND DISCONTINUOUS RIGHT-HAND SIDE WITH VARIOUS BOUNDARY CONDITIONS

© 2025 / O. V. Baskov[1], D. K. Potapov[2]

Saint Petersburg State University, Russia
e-mail: [1] o.baskov@spbu.ru, [2] d.potapov@spbu.ru

An ordinary second-order differential equation with positive parameter and discontinuous right-hand side which changes its sign at the point of the jump is considered. Various boundary value problems for it are formulated, including mixed and periodic boundary conditions. Theorems on existence of periodic solutions of the studied boundary value problems are established. The obtained results are illustrated by examples.

Keywords: differential equation, boundary value problem, discontinuous right-hand side, periodic solution

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00069).

REFERENCES

1. Llibre, J. and Teixeira, M.A., Periodic solutions of discontinuous second order differential systems, *J. Singularities*, 2014, vol. 10, pp. 183–190.
2. Bonanno, G., D'Agui, G., and Winkert, P., Sturm–Liouville equations involving discontinuous nonlinearities, *Minimax Theory Appl.*, 2016, vol. 1, no. 1, pp. 125–143.
3. Kamachkin, A.M., Potapov, D.K., and Yevstafyeva, V.V., Existence of solutions for second-order differential equations with discontinuous right-hand side, *Electron. J. Differ. Equat.*, 2016, no. 124, pp. 1–9.
4. Bensid, S. and Diaz, J.I., Stability results for discontinuous nonlinear elliptic and parabolic problems with a S-shaped bifurcation branch of stationary solutions, *Disc. Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2017, vol. 22, no. 5, pp. 1757–1778.
5. Da Silva, C.E.L., Da Silva, P.R., and Jacquemard, A., Sliding solutions of second-order differential equations with discontinuous right-hand side, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2017, vol. 40, no. 14, pp. 5295–5306.
6. Pavlenko, V.N. and Postnikova, E.Yu., Sturm–Liouville problem for an equation with a discontinuous nonlinearity, *Chelyab. Phys. Math. J.*, 2019, vol. 4, no. 2, pp. 142–154.
7. Da Silva, C.E.L., Jacquemard, A., and Teixeira, M.A., Periodic solutions of a class of non-autonomous discontinuous second-order differential equations, *J. Dyn. Control Syst.*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 17–44.
8. Fursov, A.S., Mitrev, R.P., Krylov, P.A., and Todorov, T.S., On the existence of a periodic mode in a nonlinear system, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 8, pp. 1076–1087.
9. Yevstafyeva, V.V., Kamachkin, A.M., and Potapov, D.K., Periodic modes in an automatic control system with a three-position hysteresis relay, *Vestn. S.-Peterb. Univ. Prikl. Mat. Inf. Protsess Upr.*, 2022, vol. 18, no. 4, pp. 596–607.

10. Baskov, O.V. and Potapov, D.K., Control and perturbation in Sturm–Liouville's problem with discontinuous nonlinearity, *Vestn. S.-Peterb. Univ. Prikl. Mat. Inf. Protsess Upr.*, 2023, vol. 19, no. 2, pp. 275–282.
11. Baskov, O.V. and Potapov, D.K., On solutions of a boundary value problem for a second-order differential equation with a parameter and discontinuous right-hand side, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2023, vol. 63, no. 8, pp. 1424–1436.
12. Yevstafyeva, V.V., Kamachkin, A.M., and Potapov, D.K., On one type of oscillating solutions of a second-order ordinary differential equation with a three-position hysteresis relay and a perturbation, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 2, pp. 153–167.
13. Yevstafyeva, V.V., Oscillating solutions of a second-order ordinary differential equation with a three-position hysteresis relay without entering the saturation zones, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 6, pp. 726–740.
14. Potapov, D.K., Approximation to the Sturm–Liouville problem with a discontinuous nonlinearity, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 9, pp. 1185–1192.
15. Baskov, O.V. and Potapov, D.K., On solutions of the one-dimensional Goldshtik problem, *Math. Notes*, 2024, vol. 115, no. 1, pp. 12–20.
16. Temam, R., A non-linear eigenvalue problem: the shape at equilibrium of a confined plasma, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1975, vol. 60, pp. 51–73.
17. Fraenkel, L.E. and Berger, M.S., A global theory of steady vortex rings in an ideal fluid, *Acta Math.*, 1974, vol. 132, no. 1, pp. 13–51.
18. Stakgold, I., Free boundary problems in climate modeling, in *Mathematics, Climate and Environment*, Eds. J.I. Díaz and J.L. Lions, Paris: Masson, 1993, pp. 177–188.
19. Bensid, S. and Kaid, Z., Multiple stationary solutions of parabolic problem with discontinuous nonlinearities and their stability, *Complex Var. Elliptic Equat.*, 2021, vol. 66, no. 3, pp. 487–506.
20. Bonanno, G., Iannizzotto, A., and Marras, M., On ordinary differential inclusions with mixed boundary conditions, *Differ. Integral Equat.*, 2017, vol. 30, no. 3–4, pp. 273–288.