ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 9, с. 1276–1296

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.64+517.968.23

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ И КОЛЛОКАЦИЙ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ С ГРАНИЦЕЙ

 А. В. Сетуха

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Институт вычислительной математики имени Г.И. Марчука РАН, г. Москва
e-mail: setuhaav@rambler.ru

Поступила в редакцию 10.04.2024 г., после доработки 10.04.2024 г.; принята к публикации 04.06.2024 г.

Рассмотрено гиперсингулярное интегральное уравнение на выпуклом ограниченном множестве на плоскости с интегралом, понимаемым в смысле конечной части по Адамару. Уравнения такого типа, в частности, возникают при решении краевой задачи Неймана для уравнений Лапласа и Гельмгольца на плоском экране в случае, когда решение ищется в виде потенциала двойного слоя. Для численного решения уравнения применена численная схема, основанная на кусочно-линейной аппроксимации неизвестной функции по треугольной конформной сетке и методе коллокаций. Доказана равномерная сходимость численных решений к точному на сетке при стремлении максимального диаметра ячеек к нулю.

Ключевые слова: численные методы, гиперсингулярный интеграл, интегральное уравнение, квадратурная формула

DOI: 10.31857/S0374064124090096, EDN: JVUBJS

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье рассматривается уравнение

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}\frac{\varphi(y)\,dy}{|x-y|^3}+\int\limits_{\Sigma}B(x,y)\varphi(y)\,dy=f(x),\quad x\in\Sigma^{\text{in}},\tag{1}$$

где $\Sigma^{\text{in}}=\Sigma\setminus\partial\Sigma$ — внутренность множества $\Sigma\subset\mathbb{R}^2$ (замыкание выпуклой ограниченной области в пространстве $\mathbb{R}^2$), $\partial\Sigma$ — граница множества Σ (замкнутая кусочно-гладкая кривая класса C^2); $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ — точки на плоскости $\mathbb{R}^2$; $B(x,y)$ — заданная функция, которая либо является непрерывной по Гёльдеру, либо представляется в виде

$$B(x,y)=\frac{\tilde{B}(x,y)}{|x-y|^{\alpha}},\quad \alpha<2,\quad x,y\in\Sigma,\quad x\neq y,\tag{2}$$

$\tilde{B}(x,y)$ — непрерывная по Гёльдеру функция; $f(x)$ — заданная правая часть, которая предполагается непрерывной по Гёльдеру; φ — неизвестная функция. Первый интеграл в (1) понимается в смысле конечной части по Адамару, строгое определение такого интеграла и описание класса функций, в котором ищется решение, будут даны ниже. Уравнение (1) может рассматриваться как в классе действительных функций, так и в классе комплексных функций действительного аргумента (функции B, f, φ имеют комплексные значения).

В аэродинамике для решения задач об обтекании тел идеальной несжимаемой жидкостью в конце 80-х годов XX в. был развит численный метод вихревых рамок. Позже было показано, что этот метод является методом численного решения поверхностного интегрального уравнения с гиперсингулярным интегралом относительно плотности потенциала двойного слоя с кусочно-постоянной аппроксимацией этой плотности (см., например, [1, с. 466, 473]). В случае плоского экрана Σ данное уравнение имеет вид (1) с $B=0$ (характеристическое уравнение), если поместить поверхность Σ на координатную плоскость Ox_1x_2 и рассматривать её как множество на плоскости. Для такого случая в статье [2] доказана сходимость метода вихревых рамок в предположении, что множество Σ аппроксимируется системой одинаковых прямоугольных ячеек (см. также [3, § 10.5]).

Упомянутый метод вихревых рамок может быть обобщён на задачи акустики о моделировании рассеяния заданного звукового поля на жёстком плоском экране [4–6], здесь возникает краевая задача Неймана для уравнения Гельмгольца. В случае плоского экрана Σ, если искать решение такой задачи в виде потенциала двойного слоя, возникает уравнение (1) с ядром B, имеющим особенность вида (2) с показателем $\alpha=1$ [7]. В статье [7] была доказана сходимость численного метода решения уравнения (1), основанная на кусочно-постоянной аппроксимации неизвестной функции, опять-таки на регулярной прямоугольной сетке.

Несмотря на успешное практическое применение описанного метода вихревых рамок в аэродинамике на достаточно произвольных расчётных сетках, получить его обоснование для таких сеток не удаётся. Вместе с тем при решении практических задач необходимо использовать универсальные расчётные сетки, к которым, в частности, относятся треугольные конформные сетки. В настоящее время хорошо отработаны методы аппроксимации такими сетками достаточно произвольных поверхностей. В связи с этим автором (совместно с Семеновой А.В.) в работах [8, 9] была построена численная схема решения гиперсингулярных граничных интегральных уравнений описанного типа на основе кусочно-линейной аппроксимации неизвестной функции на треугольной сетке. В [8] рассмотрена с теоретических позиций численная схема решения граничного интегрального уравнения с гиперсингулярным интегралом относительно плотности потенциала двойного слоя, возникающего при решении краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа в области, ограниченной гладкой замкнутой поверхностью, получено доказательство сходимости численных решений на сетке. В [9] эта же численная схема рассмотрена с точки зрения практической реализации применительно к краевой задаче Неймана как в области, ограниченной гладкой замкнутой поверхностью, так и на экране. При этом получены аналитические формулы для коэффициентов матрицы возникающей системы линейных уравнений. В частном случае плоского экрана построенная схема является численной схемой решения характеристического уравнения (1) (с $B=0$).

В настоящей статье доказываются сходимость такой численной схемы решения уравнения (1), основанной на кусочно-линейной аппроксимации неизвестной функции, при этом схема обобщена на случай полного уравнения (1), а также равномерная сходимость численных решений к точному на сетке: сначала для характеристического, а затем и для полного уравнений вида (1).

Отметим, что рассматриваемая численная схема формально выписывается и для плоской, и для неплоской поверхностей. Доказательство сходимости численной схемы для случая плоского экрана существенно отличается от ранее полученного в [8] доказательства сходимости численной схемы на замкнутой поверхности. В случае гладкой замкнутой поверхности основная сложность состояла в том, что поверхность неплоская и треугольные ячейки, аппроксимирующие поверхность, не лежат точно на самой поверхности. В рассматриваемом в настоящей статье случае плоского экрана основная сложность состоит в учёте особенностей поведения точного решения вблизи края экрана (границы множества Σ, если его рассматривать как множество на плоскости) и анализе аппроксимации гиперсингулярного интеграла вблизи этого края.

2. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И КЛАССЫ ФУНКЦИЙ

Пусть $\mathbb{Z}_+^n$ — множество элементов вида $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, где $\alpha_i\in\mathbb{Z}_+$, $i=\overline{1,n}$.

Обозначим $D^\alpha f(x)=\partial^{|\alpha|}f(x)/\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$, где $f(x)$ — функция с вещественными или комплексными значениями, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$. При этом будем считать, что $D^\alpha f\equiv f$ при $\alpha=(0,0,\ldots,0)$.

Пусть G — замыкание открытого множества в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $C[G]$ нормированное пространство действительных функций $f(x)$, определённых и непрерывных на множестве G, и через $C_C[G]$ нормированное пространство комплексных функций $f(x)$, определённых и непрерывных на множестве G, с нормой

$$\|f\|_{0,G}=\max_{x\in G}|f(x)|.$$

Будем обозначать как $H^\mu(G)$ (где $\mu\in(0,1]$, G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ или замыкание открытого множества в $\mathbb{R}^n$) нормированное пространство действительных функций $f(x)$, определённых на множестве G, для которых ограничено определяющее норму выражение

$$\|f\|_{\mu,G}=\sup_{x\in G}|f(x)|+\sup_{x,y\in G,\ x\neq y}|f(x)-f(y)|/|x-y|^\mu, \tag{3}$$

и через $H^{1,\mu}(G)$ (где $\mu\in(0,1]$) нормированное пространство действительных функций $f(x)$, для которых ограничена норма

$$\|f\|_{1,\mu,G}=\sup_{x\in G}|f(x)|+\sum_{i=1}^{n}\|\partial f/\partial x_i\|_{\mu,G} \tag{4}$$

(в случае когда G — замыкание открытого множества, считаем, что частные производные по непрерывности доопределяются на границе этого множества).

Пусть также $H_C^\mu(G)$ и $H_C^{1,\mu}(G)$ — нормированные пространства комплексных функций $f: G\to\mathbb{C}$ таких, что

$$f(x)=f_1(x)+if_2(x),\quad x\in G, \tag{5}$$

где f_1 и f_2 принадлежат пространству $H^\mu(G)$ или $H^{1,\mu}(G)$ соответственно, а норма определяется выражениями (3) и (4) соответственно.

Пусть $\Sigma\in\mathbb{R}^2$ — множество, на котором рассматривается уравнение (1). Обозначим $A=$ $=A(\Sigma)$ — линейное пространство действительных функций, определённых на множестве Σ, таких, что с некоторым $\mu\in(0,1]$ выполнены условия: $f\in H^\mu(\Sigma)$, $f(x)=0$ при $x\in\partial\Sigma$; для сужения функции f на любое замкнутое множество $\Sigma_1\subset\Sigma^{\mathrm{in}}$ выполнено условие $f\in H^{1,\mu}(\Sigma_1)$.

Пусть также $A_C=A_C(\Sigma)$ — множество комплексных функций вида (5), где $f_1,f_2\in A(\Sigma)$.

Для функций $\varphi\in A_C$ определён интеграл в смысле конечного значения по Адамару

$$\int\limits_\Sigma\frac{\varphi(y)\,dy}{|x-y|^3}=\lim_{\varepsilon\to+0}\biggl(\int\limits_{\Sigma\setminus U(x,\varepsilon)}\frac{\varphi(y)\,dy}{|x-y|^3}-\frac{2\pi\varphi(x)}{\varepsilon}\biggr), \tag{6}$$

где $U(x,\varepsilon)$ — окрестность точки x радиуса ε (открытый круг радиуса ε с центром в точке x на плоскости) [3, с. 131; 10].

Ниже рассматривается уравнение (1) для случая, когда функция $B(x,y)$ представляется в виде (2), где $\tilde{B}\in H_C^\mu(\Sigma\times\Sigma)$, $f\in H_C^\mu(G)$, $\mu\in(0,1)$, и ищется решение $\varphi\in A_C(\nu,\Sigma)$ с некоторым $\nu\in(0,1]$.

Применительно к полному уравнению (1) в основном будем рассматривать случай уравнения в классе комплексных функций, понимая, что все полученные результаты переносятся на случай действительных функций, если их рассматривать как комплексные функции с нулевой мнимой частью.

3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО РАЗРЕШИМОСТЬ

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\int\limits_\Sigma \frac{\varphi(y)\,dy}{|x-y|^3}=f(x),\quad x\in\Sigma^{\text{in}}, \tag{7}$$

в классе действительных функций. Предполагаем, что $f\in H^\mu(\Sigma)$, $\mu\in(0,1]$, — заданная правая часть, φ — неизвестная функция, которая ищется в классе $\varphi\in A$.

В статье [2] доказано, что уравнение (7) имеет единственное решение $\varphi\in A$, представимое в виде

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2,\quad \varphi_1\in H^{1,\mu}(\Sigma),\quad \varphi_2\in C^\infty(\Sigma^{\text{in}}), \tag{8}$$

при этом выполнены оценки

$$|\varphi(x)|\leqslant C\|f\|_{\mu,\Sigma}\rho(x,\partial\Sigma)^{1/2},\quad \|\varphi_1\|_{1,\mu,\Sigma}\leqslant C\|f\|_{\mu,\Sigma},$$
$$|D^\alpha\varphi_2(x)|\leqslant C(\alpha)\|f\|_{\mu,\Sigma}\rho(x,\partial\Sigma)^{1/2-|\alpha|},\quad \alpha\in Z_+^2,\quad |\alpha|\geqslant 1, \tag{9}$$

где $\rho(x,\partial\Sigma)$ — расстояние от точки $x\in\Sigma^{\text{in}}$ до края множества Σ, C и $C(\alpha)$ — некоторые константы, зависящие от множества Σ и значения μ.

Заметим, что при выполнении условий (8) справедливы условие $\varphi\in H^{1/2}(\Sigma)$ и оценка

$$\|\varphi\|_{1/2,\Sigma}\leqslant C\|f\|_{\mu,\Sigma} \tag{10}$$

с некоторой константой C, зависящей от μ и Σ.

Отметим также, что уравнение (7) является частным случаем более общего уравнения вида

$$\int\limits_\Sigma \varphi(y)\frac{\partial^2F(x-y)}{\partial n_x\partial n_y}\,d\sigma_y=f(x),\quad x\in\Sigma\setminus\partial\Sigma,\quad F(x-y)=\frac{1}{4\pi|x-y|}, \tag{11}$$

где Σ — простая гладкая поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$, которая может быть замкнутой или разомкнутой с краем $\partial\Sigma$ (замкнутой кусочно-гладкой кривой); $d\sigma_y$ — элемент площади; $\vec{n}(x)$ — единичная нормаль к поверхности Σ в точке x; $\partial/\partial n_x$ — производная по направлению вектора $\vec{n}(x)$, которая вычисляется как частная производная функции, зависящей от переменной x при фиксированном значении переменной y; интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару [3, § 4.1; 10; 11, с. 162, 170]. Такое уравнение, в частности, возникает при применении метода граничных интегральных уравнений к решению краевой задачи Неймана в области вне поверхности Σ и при условии, что решение ищется в виде потенциала двойного слоя.

Если Σ — плоская поверхность, лежащая в координатной плоскости Ox_1x_2, то справедлива формула

$$\int\limits_\Sigma \varphi(y)\frac{\partial^2F(x-y)}{\partial n_x\partial n_y}\,dy=\frac{1}{4\pi}\int\limits_\Sigma\frac{\varphi(y)\,dy}{|x-y|^3},\quad x\in\Sigma\setminus\partial\Sigma,$$

вытекающая из легко проверяемого равенства

$$\frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|^3}, \quad x,y \in Ox_1x_2, \quad x \neq y,$$

поэтому уравнение (11) в случае такой плоской поверхности принимает вид (7).

Уравнение (11) было, в частности, рассмотрено в работах [8, 9], где для его численного решения предложена схема на основе триангуляции поверхности Σ, кусочно-линейной аппроксимации неизвестной функции и применении принципа коллокации. При этом в [7] получено обоснование сходимости построенной численной схемы для случая замкнутой гладкой поверхности Σ, а в [8] рассмотрены вопросы конструктивной реализации построенной численной схемы для случаев замкнутой или разомкнутой поверхности Σ.

В настоящей статье даётся обоснование сходимости указанной численной схемы для случая плоской поверхности Σ, удовлетворяющей сформулированным в начале статьи требованиям, при этом поверхность Σ рассматривается как множество на плоскости $\mathbb{R}^2$.

4. АППРОКСИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Приведём численную схему решения характеристического уравнения (7). Фактически это численная схема, построенная в работе [9] для уравнения (11), но записанная применительно к уравнению (7), рассматриваемому на множестве $\Sigma \in \mathbb{R}^2$.

Множество Σ аппроксимируем системой треугольных ячеек σ_i (считаем, что каждая ячейка σ_i — замкнутое множество на плоскости), $i=\overline{1,M}$. Обозначим через $\tilde{\Sigma}$ объединение всех ячеек σ_i. Предполагается, что треугольники σ_i, $i=\overline{1,M}$, образуют на множестве $\tilde{\Sigma}$ конформную сетку. Последнее требование означает, что пересечение любых двух различных треугольных ячеек есть либо отрезок, являющийся целой стороной в каждом из этих треугольников, либо точка, являющаяся их общей вершиной, либо пустое множество. Пусть h — диаметр разбиения.

Предположим, что рассматриваемое нами разбиение удовлетворяет следующим условиям с некоторыми константами C_Σ и $\theta > 0$:

i1) $\tilde{\Sigma} \subset \Sigma$, и при этом если $x \in \Sigma \setminus \tilde{\Sigma}$, то $\rho(x, \partial\Sigma) \leqslant C_\Sigma h$, а площадь множества $\Sigma \setminus \tilde{\Sigma}$ не превосходит величины $C_\Sigma h^2$;

i2) если a — одна из сторон одной из ячеек σ_i и α — один из углов одной из ячеек σ_i, то

$$a \geqslant \theta h, \quad \sin\alpha \geqslant \theta. \tag{12}$$

Обозначим через $X = \{x_j \in \Sigma, \ \ j = 1,\ldots,N\}$ множество всех различных вершин треугольников σ_i, не лежащих на границе множества $\partial\tilde{\Sigma}$. Будем называть такие вершины *внутренними.*

Сформируем для каждой внутренней вершины $x_j \in X$ множество треугольных ячеек σ_k^j таких, что $x_j \in \sigma_k^j$, $k=\overline{1,K_j}$, и пусть $\tilde{\Sigma}_j = \bigcup_{k=1}^{K_j}\sigma_k^j$ ($\tilde{\Sigma}_j$ — поверхность, объединяющая все ячейки, для которых точка x_j является одной из вершин).

Построим на приближённой поверхности $\tilde{\Sigma}$ систему базисных функций e_j, $j=\overline{1,N}$, пирамидального вида, каждая из которых является линейной функцией на каждом из треугольников σ_m, $m=\overline{1,M}$, и удовлетворяет условию

$$e_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i=\overline{1,N}.$$

На каждом треугольнике $\sigma_k^j \in \tilde{\Sigma}_j$, $k=\overline{1,K_j}$, функция $e_j(x)$ принимает значение, равное единице, в точке x_j и значение, равное нулю, в двух других вершинах. На ячейках, не лежащих на поверхности $\tilde{\Sigma}_j$, выполнено равенство $e_j(x)\equiv 0$.

Пусть $\varphi\in A$ — некоторая функция, заданная на множестве Σ и пусть

$$(\mathbf{A}\varphi)(x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}\varphi(y)\frac{1}{|x-y|^3}\,d\sigma_y,\quad x\in\Sigma^{\mathrm{in}}. \tag{13}$$

Рассмотрим на множестве $\tilde{\Sigma}$ линейную на каждой из ячеек апроксиммации σ_i, $i=\overline{1,M}$, функцию

$$\tilde{\varphi}(x)=\sum_{j=1}^{N}\varphi(x_j)e_j(x),\quad x\in\tilde{\Sigma}. \tag{14}$$

Функция (14) является непрерывной на множестве $\tilde{\Sigma}$ и удовлетворяет условию $\tilde{\varphi}(x_i)=\varphi(x_i)$, $i=\overline{1,N}$. Далее запишем квадратурную формулу для значений интеграла $\mathbf{A}\varphi$ в точках $x_i\in X$, основанную на замене поверхности интегрирования Σ на поверхность $\tilde{\Sigma}$ и функции $\varphi(x)$ на функцию $\tilde{\varphi}(x)$ в подыинтегральном выражении.

Поскольку функция $\tilde{\varphi}(x)$ не дифференцируема в точках x_i, простой такой замены недостаточно. Для каждой точки $x_i\in X$ при построении квадратурной формулы для значения интеграла в этой точке строится её окрестность $U_\varepsilon(x_i)$ радиуса $\varepsilon>0$ и в этой окрестности при вычислении интеграла (13) функция $\tilde{\varphi}$ заменяется на постоянное значение $\varphi(x_i)$. Параметр ε выбирается так, чтобы выполнялось с некоторой константой C_ε условие

i3) справедлива оценка $h<C_\varepsilon\varepsilon$, при этом для каждого $i=\overline{1,N}$ имеет место соотношение $U_\varepsilon(x_i)\cap\sigma_j=\emptyset$, если точка x_i не является вершиной ячейки σ_j.

Отметим, что при выполнении условия i3) для каждого внутреннего узла x_i, $i=\overline{1,N}$, выполнено условие $U_\varepsilon(x_i)\subset\tilde{\Sigma}$.

Обозначим

$$J_{\varepsilon,i}(x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{U_\varepsilon(x_i)}\frac{1}{|x-y|^3}\,dy,\quad i=\overline{1,N}.$$

Заметим, что если рассматривать множество Σ как плоскую поверхность в пространстве с краем, помещённую в трёхмерное пространство, то для величины $J_{\varepsilon,i}(x)$ справедлива формула (закон Био–Савара [1, 10])

$$J_\varepsilon(x)=\vec{n}(x_i)\int\limits_{S_\varepsilon(x_i)}\vec{\tau}(s)\times\vec{V}(x_i-y)\,ds,\quad x\in\mathbb{R}^3\setminus S_\varepsilon(x_i), \tag{15}$$

где $S_\varepsilon(x_i)$ — окружность с центром в точке x_i радиуса ε, $\vec{\tau}(s)$ — положительный орт вектора касательной на контуре $S_\varepsilon(x_i)$ (направление обхода против часовой стрелки), $y=y(s)$, s — натуральный параметр, $\vec{n}(x_i)$ — вектор нормали к поверхности Σ в точке x_i,

$$\vec{V}(x-y)=\operatorname{grad}_x F(x-y)=\frac{y-x}{4\pi|x-y|^3}.$$

Тогда значение $J_{\varepsilon,i}(x_i)$ определено выражением (15), причём функция $J_{\varepsilon,i}$ является бесконечно дифференцируемой в точке $x=x_i$.

В результате получим следующую квадратурную формулу:

$$\mathbf{A}(x_i)\approx\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\varphi(x_j)\int\limits_{\tilde{\Sigma}\setminus U_\varepsilon(x_i)}e_j(y)\frac{1}{|x-y|^3}\,d\sigma_y+\varphi(x_i)J_{\varepsilon,i}(x_i). \tag{16}$$

Записывая интегральное уравнение (7) в узлах коллокации $x_i \in X$ и заменяя интегральный оператор его приближением по формуле (16), получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных φ_i, аппроксимирующих значения функции φ в точках x_i, $i=\overline{1,N}$:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\varphi_j = f_i, \quad i=\overline{1,N}, \tag{17}$$

$$a_{ij} = a_{ij}^0 + \delta_i^j J_{\varepsilon,i}(x_i), \quad a_{ij}^0 = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\tilde{\Sigma}\setminus U_\varepsilon(x_i)} e_j(y)\frac{1}{|x-y|^3}\, d\sigma_y, \quad \delta_i^i = 1, \quad \delta_i^j = 0, \quad i\neq j,$$

$$f_i = f(x_i), \quad i=\overline{1,N}.$$

Вопрос о конструктивном вычислении коэффициентов системы (17) был рассмотрен в работе [9], где для коэффициентов a_{ij} были получены аналитические формулы.

В настоящей статье рассмотрим вопрос о сходимости на сетке решений системы (17) к решению уравнения (7).

5. ПОГРЕШНОСТЬ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ. ПОГРЕШНОСТЬ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Обозначим как $A' = A'(\mu, C_A)$, где $\mu \in (0,1]$ и C_A — некоторые константы, множество функций $\varphi(x)$, определённых при $x\in\Sigma$, которые представляются в виде

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \varphi_1 \in H^{1,\mu}(\Sigma), \quad \varphi_2 \in C^2(\Sigma^{\mathrm{in}}), \tag{18}$$

выполнены оценки

$$|\varphi(x)| \leqslant C_A \rho(x,\partial\Sigma)^{1/2}, \quad \|\varphi_1\|_{1,\mu,\Sigma} \leqslant C_A,$$

$$|\varphi_2(x)| \leqslant C_A, \quad |D^\alpha \varphi_2(x)| \leqslant C_A \rho(x,\partial\Sigma)^{1/2-|\alpha|}, \quad \alpha\in Z_+^2, \quad |\alpha| = 1,2, \quad x\in\Sigma^{\mathrm{in}}. \tag{19}$$

Заметим, что если функция φ удовлетворяет условиям (8) и первой из оценок (9), то она лежит в классе A. Если функция φ является решением рассматриваемого уравнения (7) в классе A, то в силу условий (8) и оценок (9) выполнено условие $\varphi \in A'(\mu, C_A)$ с некоторыми $\mu\in(0,1)$ и C_A.

Пусть $\varphi\in A'(\mu, C_A)$, $\mu\in(0,1)$. Рассмотрим интегралы

$$I_i = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma} \frac{\varphi(y)\, dy}{|x_i - y|^3}, \quad i=\overline{1,N}, \tag{20}$$

и их аппроксимации

$$\tilde{I}_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\varphi(x_j), \quad i=\overline{1,N}, \tag{21}$$

где x_i — внутренние узлы, a_{ij} — коэффициенты системы уравнений (17).

Получим оценку для разности

$$\Delta = I_i - \tilde{I}_i, \tag{22}$$

которую можно представить в виде

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3, \tag{23}$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\sigma_j^\varepsilon(x_i)} \frac{\varphi(y) - \tilde{\varphi}(y)}{|x_i - y|^3}\, dy, \quad \sigma_j^\varepsilon(x_i) = \sigma_j \setminus U_\varepsilon(x_i),$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{U_\varepsilon(x_i)} \frac{\varphi(y) - \varphi(x_i)}{|x_i - y|^3}\, dy, \quad \Delta_3 = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Sigma \setminus \tilde{\Sigma}} \frac{\varphi(y)}{|x_i - y|^3}\, dy,$$

$\tilde{\varphi}(y)$ — аппроксимация функции φ по формуле (14).

Лемма 1. *Пусть $\sigma \in \mathbb{R}^2$ — выпуклое множество, $\varphi \in H^{1,\mu}(\sigma)$, $\|\varphi\|_{1,\mu,\sigma} = M$, $\mu \in (0,1]$. Тогда для любых $x, y \in \sigma$ выполнена оценка*

$$|\varphi(y) - \varphi(x) - (\operatorname{grad}\varphi(x), x - y)| \leqslant M|x - y|^{1+\mu}. \tag{24}$$

Доказательство. Для доказательства оценки (24) запишем соотношение

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \int\limits_0^1 \psi'(t)\, dt, \quad \psi(t) = \varphi(z(t)), \quad z(t) = x + t(y - x).$$

Отсюда

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \Bigg(\int\limits_0^1 \operatorname{grad}\varphi(z(t))\, dt, y - x \Bigg).$$

Поскольку $|z(t) - x| \leqslant |x - y|$ при $t \in [0,1]$, имеем оценку (24). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть σ — треугольник с вершинами в точках a, b, c, для которого выполнены оценки (12) с некоторым $\theta > 0$, и пусть h — диаметр треугольника σ. Если $\varphi \in H^{1,\mu}(\sigma)$, $\|\varphi\|_{1,\mu,\sigma} = M$, $\mu \in (0,1]$, и $\tilde{\varphi}(x)$ — линейная функция, удовлетворяющая условиям $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x)$ при $x = a, b, c$, то в каждой точке $x \in \sigma$ выполнены оценки*

$$|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| \leqslant CMh^{1+\mu}, \quad |\operatorname{grad}\varphi(x) - \operatorname{grad}\tilde{\varphi}(x)| \leqslant CMh^{\mu}, \tag{25}$$

где C — некоторая константа, зависящая только от θ и μ.

Доказательство. Через C будем обозначать некоторые константы, зависящие от θ и μ, причём в различных оценках значения констант могут быть различными.

Функция $\tilde{\varphi}(x)$ представима в виде

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(a) + (\operatorname{grad}\tilde{\varphi}, x - a),$$

где $\operatorname{grad}\tilde{\varphi}$ — неизвестный постоянный вектор. Вектор $\vec{g} = \operatorname{grad}\tilde{\varphi}$ можно найти из системы уравнений

$$(\vec{g}, b - a) = \beta, \quad (\vec{g}, c - a) = \gamma \tag{26}$$

с $\beta = \varphi(b) - \varphi(a)$, $\gamma = \varphi(c) - \varphi(a)$.

Далее, вектор

$$\vec{g} = \operatorname{grad}\tilde{\varphi} - \operatorname{grad}\varphi(a) \tag{27}$$

является решением системы (26) с

$$\beta = \varphi(b) - \varphi(a) - (\operatorname{grad}\varphi(a), b - a), \quad \gamma = \varphi(c) - \varphi(a) - (\operatorname{grad}\varphi(a), c - a),$$

и в силу оценки (24) имеем
$$|\beta| \leqslant Mh^{1+\mu}, \quad |\gamma| \leqslant Mh^{1+\mu}. \tag{28}$$

Получим оценку для модуля вектора $\vec{g}$ — решения системы (26). Вектор $\vec{g}$ ищем в виде $\vec{g} = g_1\vec{\tau}_1 + g_2\vec{\tau}_2$, где $\vec{\tau}_1 = (b-a)/|b-a|$, $\vec{\tau}_2$ — единичный вектор, ортогональный вектору $\vec{\tau}_1$. Тогда
$$g_1 = \frac{\beta}{|b-a|}, \quad g_2 = \frac{\gamma - g_1(\vec{\tau}_1, c-a)}{(\vec{\tau}_2, c-a)}.$$

Заметим, что $|c-a| \leqslant h$, и из оценок (12) следуют неравенства $|b-a| \geqslant \theta h$, $|(\vec{\tau}_2, c-a)| \geqslant \theta^2 h$. Тогда
$$|\vec{g}| \leqslant C(|\beta| + |\alpha|)/h.$$
Из оценок (28) для случая, когда вектор $\vec{g}$ имеет вид (27), получаем
$$|\operatorname{grad}\tilde{\varphi} - \operatorname{grad}\varphi(a)| \leqslant CMh^{\mu}.$$
Теперь из условия $\varphi \in H^{1,\mu}(\sigma)$ и неравенства (24) получаем оценки (25). Лемма доказана.

Далее в этом пункте будем обозначать как C некоторые константы, зависящие только от множества Σ, параметров θ, C_Σ, C_ε из условий i1)–i3) и параметра $\mu \in (0,1)$, причём в различных оценках значения констант C могут быть различными.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in A'(\mu, C_A)$, $\mu \in (0,1)$, x_i — один из внутренних узлов. Тогда интеграл I_i, определяемый формулой (20), и его аппроксимация $\tilde{I}_i$, определяемая формулой (21), связаны оценкой*
$$|I_i - \tilde{I}_i| \leqslant C\frac{C_A(h^{1/2} + h^{\mu})}{\rho(x_i, \partial\Sigma)}, \tag{29}$$
где C — некоторая константа, зависящая только от параметра μ и параметров θ, C_Σ, C_ε из условий i1)–i3).

Доказательство. Сначала заметим, что если $\varphi \in A'(\mu, C_A)$, то
$$\varphi \in H^{1/2}(\Sigma), \quad \|\varphi\|_{1/2} \leqslant CC_A. \tag{30}$$

Действительно, пусть $x, y \in \Sigma$, причём $\rho(x, \partial\Sigma) \leqslant \rho(y, \partial\Sigma)$. Если $\rho(x, \partial\Sigma) \leqslant 2|x-y|$, то $\rho(y, \partial\Sigma) \leqslant 3|x-y|$, и тогда
$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant |\varphi(x)| + |\varphi(y)| \leqslant CC_A\rho(y, \partial\Sigma)^{1/2} \leqslant CC_A|x-y|^{1/2}.$$
Если $\rho(x, \partial\Sigma) \geqslant 2|x-y|$, то для любой точки z, лежащей на отрезке, соединяющем точки x и y, выполнено условие $\rho(z, \partial\Sigma) \geqslant |x-y|$, и тогда
$$|\operatorname{grad}\varphi(z)| \leqslant C_A\rho(y, \partial\Sigma)^{-1/2} \leqslant C_A|x-y|^{-1/2},$$
а значит, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant CC_A|x-y|^{1/2}$. Тем самым условия (30) доказаны.

Теперь докажем оценку (29), представив разность (22) в виде (23) и оценив по отдельности слагаемые Δ_1, Δ_2, Δ_3.

Пусть $R = \rho(x_i, \Sigma)$. Оценим разность Δ_1. Если $R > 4h$, то разность Δ_1 представим в виде
$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12},$$
$$\Delta_{11} = \frac{1}{4\pi}\sum_{j:\ |x_i - x_j| < R/2}\ \int\limits_{\sigma_j^\varepsilon(x_i)} \frac{\varphi(y) - \tilde{\varphi}(y)}{|x_i - y|^3}\,dy, \quad \Delta_{12} = \frac{1}{4\pi}\sum_{j:\ |x_i - x_j| \geqslant R/2}\ \int\limits_{\sigma_j^\varepsilon(x_i)} \frac{\varphi(y) - \tilde{\varphi}(y)}{|x_i - y|^3}\,dy.$$

Если $|x_i-x_j|<R/2$, то при $y\in\sigma_j$ выполнены оценки

$$|x_i-y|<R/2+h \quad \text{и} \quad \rho(y,\partial\Sigma)\geqslant R/3.$$

Пусть φ_1 и φ_2 — слагаемые из представления функции φ в виде (18). Тогда сужения этих функций на ячейку σ_j удовлетворяют условиям

$$\varphi_1\in H^{1,\mu}(\sigma_j), \quad \|\varphi\|_{1,\mu,\sigma_j}\leqslant C_A, \quad \varphi_2\in H^{1,1}(\sigma_j), \quad \|\varphi\|_{1,1,\sigma_j}\leqslant CC_AR^{-3/2},$$

и из леммы 2 следует, что

$$|\varphi(y)-\tilde\varphi(y)|\leqslant CC_A(h^{1+\mu}+h^2R^{-3/2}) \quad \text{при} \quad y\in\sigma_j.$$

Отсюда имеем

$$|\Delta_{11}|=CC_A(h^{1+\mu}+h^2R^{-3/2})\sum_{j\colon |x_i-x_j|<R/2}\int\limits_{\sigma_j^\varepsilon(x_i)}\frac{1}{|x_i-y|^3}\,dy\leqslant$$

$$\leqslant CC_A(h^{1+\mu}+h^2R^{-3/2})\int\limits_{y\colon \varepsilon<|y-x|<R}\frac{1}{|x_i-y|^3}\,dy\leqslant CC_A(h^{1+\mu}+h^2R^{-3/2})\varepsilon^{-1},$$

и с учётом условия i3) получаем

$$|\Delta_{11}|=CC_A(h^\mu+h^{1/2})R^{-1}.$$

Если $|x_i-x_j|\geqslant R/2$, то в силу условия (30) можем записать

$$|\varphi(y)-\tilde\varphi(y)|\leqslant CC_Ah^{1/2} \quad \text{при} \quad y\in\sigma_j,$$

и для суммы Δ_{12} справедливы оценки

$$|\Delta_{12}|=CC_Ah^{1/2}\sum_{j\colon |x_i-x_j|\geqslant R/2}\int\limits_{\sigma_j^\varepsilon(x_i)}\frac{1}{|x_i-y|^3}\,dy\leqslant CC_Ah^{1/2}\int\limits_{y\colon |y-x_i|\geqslant R/3}\frac{1}{|x_i-y|^3}\,dy\leqslant CC_Ah^{1/2}R^{-1}.$$

Тогда

$$|\Delta_1|\leqslant CC_A(h^{1/2}+h^\mu)R^{-1}. \tag{31}$$

Если $R\leqslant 4h$, то при оценке суммы Δ_1 воспользуемся оценкой, вытекающей из (30):

$$|\varphi(y)-\tilde\varphi(y)|\leqslant CC_Ah^{1/2} \quad \text{при} \quad y\in\tilde\Sigma.$$

Тогда

$$|\Delta_1|=CC_Ah^{1/2}\sum_{j=1}^N\int\limits_{\sigma_j^\varepsilon(x_i)}\frac{1}{|x_i-y|^3}\,dy\leqslant CC_Ah^{1/2}\int\limits_{y\colon |y-x_i|>\varepsilon}\frac{1}{|x_i-y|^3}\,dy\leqslant CC_Ah^{1/2}\varepsilon^{-1}$$

и оценка (31) также выполнена с учётом условия i3).

Рассмотрим величину Δ_2. Если $R>4h$, то в силу равенства

$$\int\limits_{z\colon |z|<r}\frac{z}{|z|^3}\,dz=0, \tag{32}$$

выполненного для любого $r > 0$, где интеграл понимается в смысле главного значения, имеем

$$\Delta_2 = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{U_\varepsilon(x_i)} \frac{\varphi(y) - \varphi(x_i) - (\operatorname{grad}\varphi(x_i), y - x_i)}{|x_i - y|^3}\, dy.$$

Далее, используя лемму 1 и оценки (19), можем записать

$$|\varphi(y) - \varphi(x_i) - (\operatorname{grad}\varphi(x_i), y - x_i)| \leqslant CC_A(|y - x_i|^{1+\mu} + |y - x_i|^2 R^{-3/2}). \tag{33}$$

Тогда

$$|\Delta_2| \leqslant CC_A \int\limits_{U_\varepsilon(x_i)} (|y - x_i|^{\mu-2} + |y - x_i|^{-1} R^{-3/2})\, dy,$$

откуда

$$|\Delta_2| \leqslant CC_A(h^{1/2} + h^\mu)R^{-1}. \tag{34}$$

Если $R \leqslant 4h$, то представим величину Δ_2 в виде

$$\Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22},$$

$$\Delta_{21} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{y:\, |y - x_i| < \varepsilon/2} \frac{\varphi(y) - \varphi(x_i) - (\operatorname{grad}\varphi(x_i), y - x_i)}{|x_i - y|^3}\, dy, \quad \Delta_{22} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{y:\, \varepsilon/2 < |y - x_i| < \varepsilon} \frac{\varphi(y) - \varphi(x_i)}{|x_i - y|^3}\, dy,$$

здесь использовано соотношение (32).

Для оценки величины Δ_{21} заметим, что при $|y - x_i| < \varepsilon/2$ выполнено условие $\rho(y, \partial\Sigma) > \theta h/2$. Тогда для сужений на множество $\sigma = U_{\varepsilon/2}(x_i)$ функций φ_1 и φ_2 (слагаемых из представления функции φ в виде (18)) выполнены оценки

$$\|\varphi\|_{1,\mu,\sigma} \leqslant C_A, \quad \|\varphi\|_{1,1,\sigma} \leqslant CC_A R^{-3/2}.$$

Отсюда следует, что (в силу леммы 1) при $|y - x_i| < \varepsilon/2$ выполнено неравенство (33) и справедлива оценка, аналогичная оценке (34):

$$|\Delta_{21}| \leqslant CC_A(h^{1/2} + h^\mu)R^{-1}.$$

Для оценки величины Δ_{22} заметим, что $|\varphi(x_i)| \leqslant CC_A h^{1/2}$, и если точка y удовлетворяет условию $\varepsilon/2 < |y - x_i| < \varepsilon$, то $|\varphi(y)| \leqslant CC_A h^{1/2}$. Тогда

$$|\Delta_{22}| = CC_A h^{1/2} \int\limits_{y:\, \varepsilon/2 < |y - x_i| < \varepsilon} \frac{1}{|x_i - y|^3}\, dy \leqslant CC_A h^{-1/2} \leqslant CC_A h^{1/2} R^{-1}.$$

Опять видим, что оценка (34) выполнена.

Наконец, оценим величину Δ_3. В силу условий i1)–i3) имеем

$$|\varphi(y)| \leqslant h^{1/2}, \quad R(x_i) \leqslant C|y - x_i| \quad \text{при} \quad y \in \Sigma \setminus \tilde\Sigma, \quad \int\limits_{\Sigma \setminus \tilde\Sigma} 1\, dy \leqslant Ch^2.$$

Тогда

$$|\Delta_3| \leqslant CC_A h^{1/2} R^{-3} \int\limits_{\Sigma \setminus \tilde\Sigma} 1\, dy \leqslant CC_A h^{2+1/2} R^{-3} \leqslant CC_A h^{1/2} R^{-1}.$$

Собрав полученные оценки, завершим доказательство теоремы.

Перейдём к доказательству существования обратной матрицы системы (17) и оценке её нормы. Сначала получим ключевые оценки для элементов самой матрицы системы (17). Сразу заметим, что при $i\neq j$ интеграл в выражениях для коэффициентов $a_{i\,j}$ системы (17) является обычным интегралом от неотрицательной функции и

$$a_{i\,j}>0 \quad \text{при} \quad i,j=\overline{1,N}, \quad i\neq j. \tag{35}$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{\varphi}(y)=\sum_{i=1}^{N} c_j e_j(y), \quad c_j=1, \quad j=\overline{1,N}.$$

Пусть x_i — одна из внутренних вершин сетки. Обозначим

$$R_i=\rho(x_i,\partial\Sigma). \tag{36}$$

Возьмём точку $z=z(x_i)\in\partial\Sigma$, являющуюся ближайшей к точке x_i точкой на кривой $\partial\Sigma$ (такая точка может быть не единственной, выберем одну из них). Построим на рассматриваемой нами плоскости полуплоскость $\pi(x_i)$ так, что край этой полуплоскости есть прямая, ортогональная отрезку, соединяющему точки x_i и z, и точка x_i не лежит в этой полуплоскости. При этом полуплоскость $\pi(x_i)$ не имеет пересечения с множеством $\Sigma\setminus\partial\Sigma$, так как множество Σ выпуклое. Тогда можем записать

$$\sum_{j=1}^{N} a_{i\,j}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\tilde{\Sigma}\setminus U_\varepsilon(x_i)}\frac{\tilde{\varphi}(y)\,dy}{|y-x_i|^3}+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{U_\varepsilon(x_i)}\frac{dy}{|y-x_i|^3}\leqslant\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}\frac{dy}{|y-x_i|^3}\leqslant\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\pi(x_i)}\frac{dy}{|y-x_i|^3}.$$

Для оценки последнего интеграла заметим, что непосредственно из формулы (6) следует

$$\int\limits_{R^2}\frac{dz}{|z|^3}=\lim_{\varepsilon\to 0}\biggl(\int\limits_{z:\ |z|>\varepsilon}\frac{dz}{|z|^3}-\frac{2\pi}{\varepsilon}\biggr)=0,$$

тогда

$$\int\limits_{\pi(x_i)}\frac{dy}{|y-x_i|^3}=-\int\limits_{R^2\setminus\pi(x_i)}\frac{dy}{|y-x_i|^3}.$$

Построим декартову систему координат $O\xi_1\xi_2$ с центром в точке x_i и осью $O\xi_1$, направленной в сторону точки $z=z(x_i)$. Тогда

$$\int\limits_{R^2\setminus\pi(x_i)}\frac{1\,dy}{|y-x_i|^3}=\int\limits_{R_i}^{\infty}d\xi_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi_1}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^{3/2}}\geqslant 2\int\limits_{R_i}^{\infty}d\xi_1\int\limits_{0}^{\infty}\frac{d\xi_1}{(\xi_1+\xi_2)^3}=\frac{1}{R_i}.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\sum_{j=1}^{N} a_{i\,j}\leqslant-\frac{1}{4\pi R_i}. \tag{37}$$

Отсюда, в силу соотношений (35), во-первых, имеем

$$a_{i\,i}<0 \quad \text{при} \quad i=\overline{1,N},$$

во-вторых, оценку (37) можно записать в виде

$$|a_{i\,i}| - \sum_{j=1,\ldots,N,\ j\neq i} |a_{i\,j}| \geqslant \frac{1}{4\pi R_i}. \tag{38}$$

Из оценки (38) следует

Теорема 2. *Для любых правых частей $f_1,\ \ldots,\ f_N$ система (17) имеет и при том единственное решение — набор чисел $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_N$ таких, что*

$$|\varphi_i| \leqslant 4\pi \max_{j=1,\ldots,N} |R_j f_j|, \quad i = \overline{1, N}, \tag{39}$$

числа R_j определяются формулой (36).

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} a^*_{i\,j} \varphi_j = f^*_i, \quad i = \overline{1, N}, \tag{40}$$

где $a^*_{i\,j} = R_i a_{i\,j}$, $f^*_i = R_i f_i$. Она получена из системы (17) домножением каждого из уравнений на множитель R_i.

Зададим произвольный набор чисел $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_N$ и сформируем набор чисел $f^*_1,\ \ldots,\ f^*_N$ по формулам (40). Пусть φ_k — наибольшее по модулю из чисел $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_N$ (одно из таких чисел, если их несколько). Тогда

$$|f^*_k| = \left|\sum_{j=1}^{N} a^*_{k\,j}\varphi_j\right| \geqslant |\varphi_k|\,|a^*_{k\,k}| - \sum_{j=1,\ldots,N,\ j\neq k} |a^*_{k\,j}|\,|\varphi_k| \geqslant R_k|\varphi_k|\biggl(|a_{kk}| - \sum_{j=1,\ldots,N,\ j\neq k} |a_{kj}|\biggr)$$

и в силу оценки (38) получаем

$$|f^*_k| \geqslant \frac{|\varphi_k|}{4\pi}.$$

Отсюда, во-первых, заключаем, что однородная система, соответствующая системе (40), не может иметь ненулевое решение. Тогда матрица этой системы не вырождена (а значит и матрица системы (17) не вырождена). Во-вторых, для решения системы (40) справедлива оценка

$$|\varphi_i| \leqslant 4\pi \max_{j=1,\ldots,N} |f^*_j|, \quad i = \overline{1, N},$$

откуда и следуют неравенства (39). Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующая теорема о сходимости численной схемы (17) для уравнения (7).

Теорема 3. *Пусть $f \in H^\mu(\Sigma)$, $\mu \in (0,1)$, $\varphi \in A$ — соответствующее решение уравнения (7). Тогда решение системы (17) с правыми частями $f_i = f(x_i)$ связано с решением уравнения (7) оценкой*

$$|\varphi(x_i) - \varphi_i| \leqslant C\|f\|_{\mu,\Sigma}(h^{1/2} + h^\mu), \quad i = \overline{1, N}. \tag{41}$$

Доказательство. Функция φ лежит в классе $A'(\mu, C_A)$ с константой $C_A = C\|f\|_{\mu,\Sigma}$. Пусть

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{N} a_{i\,j}\varphi(x_j) - f_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

В силу теоремы 1 имеем
$$|\delta_i| \leqslant \|f\|_{\mu,\Sigma} R_i^{-1}(h^{1/2}+h^{\mu}). \tag{42}$$

Далее, разности $\varphi(x_i)-\varphi_i$, $i=\overline{1,N}$, являются решением системы уравнений
$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(\varphi(x_j)-\varphi_j)=\delta_i, \quad i=\overline{1,N},$$
применяя к которой теорему 2 и используя (42), получаем оценку (41) теоремы.

6. ПОЛНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО РАЗРЕШИМОСТЬ

Теперь перейдём к рассмотрению уравнения (1), которое, по сравнению с характеристическим уравнением (7), будем называть *полным уравнением.*

Сначала изучим вопрос о разрешимости уравнения (1), следуя работе [7]. Рассмотрим оператор $\mathbf{B}$, который функции φ ставит в соответствие функцию $f=\mathbf{B}\varphi$ по формуле
$$f(x)\equiv(\mathbf{B}\varphi)(x)=\int\limits_{\Sigma} B(x,y)\varphi(y)\,dy. \tag{43}$$

Лемма 3. *Пусть функция $B(x,y)$ представима в виде (2), где $\tilde{B}\in H_C^{\mu}(\Sigma\times\Sigma)$, $\mu\in(0,1)$. Пусть $\nu>0$ и при этом $\nu\leqslant\mu$, $\nu<2-\alpha$. Тогда $\mathbf{B}\colon C_C[\Sigma]\to H_C^{\nu}[\Sigma]$ — ограниченный оператор.*

Доказательство. При $\varphi\in C_C[\Sigma]$ интеграл в правой части формулы (43) сходится, при этом для любых $x,z\in\Sigma$ справедливо равенство
$$f(x)-f(z)=\int\limits_{\Sigma}\big(\tilde{B}(x,y)-\tilde{B}(z,y)\big)\frac{\varphi(y)}{|x-y|^{\alpha}}\,dy+\int\limits_{\Sigma}\tilde{B}(z,y)\varphi(y)\left(\frac{1}{|x-y|^{\alpha}}-\frac{1}{|z-y|^{\alpha}}\right)dy.$$

Несложно показать, что при $\nu\in(0,1]$ для любых трёх различных точек $x,y,z\in R^2$ выполнена оценка
$$\left|\frac{1}{|x-y|^{\alpha}}-\frac{1}{|z-y|^{\alpha}}\right|\leqslant C|x-y|^{\nu}\left\{\frac{1}{|x-y|^{\alpha+\nu}}+\frac{1}{|z-y|^{\alpha+\nu}}\right\},$$
где C — некоторая константа, зависящая только от показателей α и ν.

Тогда при выполнении условий $\nu\leqslant\mu$, $\nu<2-\alpha$ функция $f=\mathbf{B}\varphi$ определена и для неё выполнены оценки
$$|f(x)|\leqslant C\|\varphi\|_{0,\Sigma}, \quad |f(x)-f(z)|\leqslant C|x-z|^{\nu}\|\varphi\|_{0,\Sigma}, \quad x,z\in\Sigma,$$
где C — некоторая константа, зависящая от показателей α и ν, функции $\tilde{B}$ и множества Σ. Отсюда следует утверждение леммы.

Уравнение (7) рассмотрим в классе функций с комплексными значениями. Пусть $f=$ $=f_1+if_2\in H_C^{\mu}[\Sigma]$, $f_1,f_2\in H^{\mu}[\Sigma]$. Тогда уравнение (7) имеет и при том единственное решение в классе функций A_C вида $\varphi=\varphi_1+i\varphi_2$, где $\varphi_1,\varphi_2\in A$ — действительные решения, соответствующие правым частям f_1, f_2 соответственно. При этом по-прежнему выполнена оценка (10).

Введём оператор $\mathbf{G}$, который каждой функции $f\in H_C^{\mu}[\Sigma]$ ставит в соответствие функцию $\varphi\in A_C$ — решение уравнения (7). В силу оценки (10) выполнено условие: $\mathbf{G}\colon H_C^{\mu}\to H_C^{1/2}$ — ограниченный оператор.

Применив к правой и левой частям уравнения (1) оператор $\mathbf{G}$, получим уравнение
$$\varphi+\mathbf{K}\varphi=g, \tag{44}$$

где

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}\mathbf{B}, \quad g = \mathbf{G}f. \tag{45}$$

Теперь заметим, что оператор $\mathbf{K}\colon C_C[\Sigma] \to H_C^{1/2}$ ограничен, а значит, $\mathbf{K}\colon C_C[\Sigma] \to C_C[\Sigma]$ компактен.

Уравнение (44) можно рассматривать в классе непрерывных функций ($g \in C_C[\Sigma]$, ищется решение $\varphi \in C_C[\Sigma]$). Тогда для него выполнены теоремы Фредгольма. Кроме того, легко показать, что функция $\varphi \in A_C$ является решением уравнения (1) с правой частью $f \in H_C^{\mu}$, $\mu \in (0,1]$, тогда и только тогда, когда эта функция φ является решением уравнения (44) с правой частью (45). При этом справедливо утверждение, что если однородное уравнение, соответствующее уравнению (1), имеет в классе функций A_C только нулевое решение, то для любой правой части $f \in H_C^{\mu}$, $\mu \in (0,1]$, это уравнение имеет и при том единственное решение в классе A_C, причём $\varphi \in C_C^{1/2}$ и выполнена оценка

$$\|\varphi\|_{1/2,\Sigma} \leqslant C\|f\|_{\mu,\Sigma}, \tag{46}$$

константа C зависит от уравнения (множества Σ и функции B), а также от показателя μ. Это следует из теоремы 1 в [7]. Отметим, что указанная теорема была доказана в работе [7] для уравнения (1) с показателем $\alpha = 1$ в условии (2), но доказательство для более общего случая, рассматриваемого в настоящей статье, остаётся в силе с учётом леммы 1.

7. ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ПОЛНОГО УРАВНЕНИЯ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ

Теперь рассмотрим вопрос о численном решении уравнения (1) в случае его однозначной разрешимости (при выполнении оценки (46)).

Используем ту же аппроксимацию множества Σ системой треугольных ячеек σ_i, $i = \overline{1, M}$, что и при решении уравнения (7). Будем аппроксимировать уравнение (1) системой уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\varphi_j + \sum_{j=1}^{N} b_{ij}\varphi_j = f_i, \quad i = \overline{1, N}, \tag{47}$$

где $f_i = f(x_i)$; a_{ij} — те же коэффициенты, что и в системе (17), возникающей при решении уравнения (7); b_{ij} — коэффициенты, возникающие при аппроксимации оператора $\mathbf{B}$ (требования к ним опишем ниже); $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — комплексные неизвестные.

Введём оператор проектирования, который каждой функции $\varphi \in C_C[\Sigma]$ ставит в соответствие элемент $\varphi' = \Pi\varphi = (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_N)) \in \mathbb{C}^N$.

Наоборот, для любого элемента $\varphi' = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N) \in \mathbb{C}^N$ построим элемент $\tilde{\varphi} = \Pi^{-1}\varphi' \in C_C[\Sigma]$ по формуле

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{j=1}^{N} \varphi_i e_i(x), \quad x \in \Sigma, \tag{48}$$

где $e_i(x)$ — рассмотренные выше кусочно-линейные базисные функции, причём мы доопределим эти функции как $e_i(x) = 0$ при $x \in \Sigma \setminus \tilde{\Sigma}$.

Заметим, что если $\varphi \in C_C[\Sigma]$, то $\tilde{\varphi} = \Pi^{-1}\Pi\varphi$ есть кусочно-линейное приближение функции φ по формуле (14) (с тем замечанием, что теперь мы рассматриваем функцию $\tilde{\varphi}$ на всей поверхности Σ, полагая $\tilde{\varphi}(x) = 0$ при $x \in \Sigma \setminus \tilde{\Sigma}$).

В качестве коэффициентов b_{ij} можно взять коэффициенты

$$b_{ij}^0 = \int_{\Sigma} B(x_i, y)e_j(y)\,dy.$$

Тогда для любой функции $\tilde{\varphi}$ вида (48) будет выполнена формула

$$(\mathbf{B}\tilde{\varphi})(x_i) = \sum_{j=1}^{N} b^0_{i\,j}\varphi_j.$$

В общем случае будем предполагать, что коэффициенты $b_{i\,j}$ выбираются так, что

$$\sum_{j=1}^{N} |b_{i\,j} - b^0_{i\,j}| \leqslant \frac{\theta_1(h)}{\rho(x_i, \partial\Sigma)}, \quad i = \overline{1, N}, \tag{49}$$

где h — диаметр разбиения, $\theta_1(h) \to 0$ при $h \to 0$ (предполагается, что функция $\theta_1(h)$ не зависит от выбора разбиения при выполнении сформулированных ранее условий на разбиение).

Введём операторы $\mathbf{A}'\colon \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ и $\mathbf{B}'\colon \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$, определяемые формулами

$$f_i = \sum_{j=1}^{N} a_{i\,j}\varphi_j, \quad g_i = \sum_{j=1}^{N} b_{i\,j}\varphi_j,$$

где

$$(f_1, \ldots, f_N) = f' = \mathbf{A}\varphi', \quad (g_1, \ldots, g_N) = g' = \mathbf{B}\varphi', \quad \varphi' = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N) \in \mathbb{C}^N.$$

Пусть также

$$\mathbf{G}' = \mathbf{A}'^{-1}, \quad \mathbf{K}' = \mathbf{G}'\mathbf{B}'.$$

Заметим, что оператор $\mathbf{A}'$ обратим в силу теоремы 2.

Теперь система (17) запишется в операторном виде как

$$\mathbf{A}'\varphi' = f',$$

а система (47) — в виде

$$\mathbf{A}'\varphi' + \mathbf{B}'\varphi' = f'. \tag{50}$$

Применив оператор $\mathbf{G}'$ к уравнению (50), запишем уравнение

$$\varphi' + \mathbf{K}'\varphi' = g', \tag{51}$$

равносильное уравнению (50) при условии $g' = \mathbf{G}'f' \in \mathbb{C}^N$.

Получили следующую структуру пространств и уравнений. Имеется уравнение (44), которое решается в пространстве $L = C_C[\Sigma]$ с нормой $\|\varphi\|_L = \sup_{x\in\Sigma} |\varphi(x)|$. При каждом разбиении множества Σ на ячейки возникает конечномерное пространство $\tilde{L} \subset L$, элементами которого являются функции $\tilde{\varphi}(x)$ вида (48). Также мы ввели пространство $L' = \mathbb{C}^N$, в котором введём норму

$$\|\varphi'\|_{L'} = \max_{i=1,\ldots,N} |\varphi_i|, \quad \varphi' = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N) \in \mathbb{C}^N.$$

Мы ввели оператор проектирования $\Pi\colon L \to L'$, который является ограниченным. Обозначим как Π_0 сужение оператора Π на подпространство $\tilde{L}$. При этом оператор $\Pi_0\colon \tilde{L} \to L'$ — биекция и обратный оператор $\Pi_0^{-1}\colon L' \to \tilde{L}$ — оператор с нормой, равной единице.

Теперь для доказательства связи между решениями уравнений (51) и (44) воспользуемся теоремой Л.В. Канторовича [12], которая в наших обозначениях может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 4 [12]. *Пусть L — нормированное пространство, $\tilde{L}$ — его замкнутое подпространство, которое изоморфно пространству L'.*

Пусть $\Pi_0\colon \tilde{L}\to L'$ — взаимно-однозначное отображение, причём Π_0 и Π_0^{-1} ограничены, и существует ограниченный оператор $\Pi\colon L\to L'$, совпадающий с Π_0 на L'.

Пусть также $\mathbf{K}\colon L\to L$ и $\mathbf{K}'\colon L'\to L'$ — линейные операторы, связанные условиями:

j1) существует константа ε_1 такая, что для всех $\tilde{\varphi}\in\tilde{L}$ выполнено неравенство

$$\|\Pi\mathbf{K}\tilde{\varphi}-\mathbf{K}'\Pi\tilde{\varphi}\|_{L'}\leqslant\varepsilon_1\|\varphi\|_L; \tag{52}$$

j2) существует константа ε_2 такая, что для любого $\varphi\in L$ найдётся элемент $\psi\in\tilde{L}$ такой, что

$$\|\psi-\mathbf{K}\varphi\|_L\leqslant\varepsilon_2\|\varphi\|_L. \tag{53}$$

Тогда если оператор $I+\mathbf{K}$ имеет ограниченный обратный оператор, определённый на всем пространстве L, и константы ε_1 и ε_2 достаточно малы, а точнее, если

$$(\|\Pi\|\|I+\mathbf{K}\|\varepsilon_2+\varepsilon_1+\varepsilon_2\varepsilon_1)\|(I+\mathbf{K})^{-1}\|\|\Pi_0^{-1}\|=q<1,$$

то уравнение $(I+\mathbf{K}')\varphi'=f'$ имеет для любого $f'\in L'$ некоторое решение $\varphi'\in L'$, удовлетворяющее оценке

$$\|\varphi'\|\leqslant C_{\mathbf{K}}\|f'\|,\quad C_{\mathbf{K}}=\frac{(1+\varepsilon_2)\,\|(I+\mathbf{K})^{-1}\|\|\Pi\|\|\Pi_0^{-1}\|}{1-q}. \tag{54}$$

Заметим, что если пространство L' конечномерное, то указанное в теореме 4 решение φ' единственно, и значит, существует оператор $(I+\mathbf{K}')^{-1}$, норма которого ограничена константой $C_{\mathbf{K}}$ из оценки (54).

Используя теорему 4, докажем следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (1), единственно. Пусть $f\in H^\mu(\Sigma)$, $\mu\in(0,1)$, $\varphi\in A_C$ — решение уравнения (1). Выберем константу $\nu>0$ так, что $\nu\leqslant\mu$ и $\nu<2-\alpha$.*

Тогда существуют константы C и $h_0>0$, зависящие от уравнения (1), параметров μ, ν, а также от параметров θ, C_ε, C_Σ из условий i1)–i3) такие, что при любом разбиении, удовлетворяющем условиям i1)–i3) с диаметром $h<h_0$, система (47) однозначно разрешима и её решение с правыми частями $f_i=f(x_i)$ связано с решением уравнения (1) оценкой

$$|\varphi(x_i)-\varphi_i|\leqslant C\|f\|_{\mu,\Sigma}(\theta_1(h)+h^{1/2}+h^\nu),\quad i=\overline{1,N}.$$

Доказательство. Будем обозначать через C константы, зависящие от уравнения (1), параметров μ, ν, а также от параметров θ, C_ε, C_Σ из условий i1)–i3), причём в различных оценках значения констант могут быть различными.

Покажем, что в рассматриваемом нами случае выполнены оценки (52) и (53), в которых можно выбрать величины ε_1 и ε_2 зависящими от h (диаметра разбиения множества Σ) и стремящимися к нулю при $h\to 0$.

Проверим выполнение условия (52). Пусть $\tilde{\varphi}\in\tilde{L}$, причём $\tilde{\varphi}$ имеет вид (48), где $(\varphi_1,\ldots,\varphi_N)=$ $=\varphi'\in L'$. При этом $\varphi'=\Pi_0\varphi$. Обозначим $\psi=\mathbf{K}\tilde{\varphi}$, $\psi'=\mathbf{K}'\varphi'$. Справедливы соотношения $\psi=\mathbf{G}f$, где $f=\mathbf{B}\varphi$; $\psi'=\mathbf{G}'f'$, $f'=(f_1,\ldots,f_N)=\mathbf{B}'\varphi'$.

Сравним f и f'. Можем записать

$$f(x_i)=\int\limits_\Sigma B(x_i,y)\tilde{\varphi}(y)\,dy=\sum_{j=1}^N b_{ij}^0\varphi_j,$$

тогда

$$f(x_i) - f_i = \sum_{j=1}^{N} (b^0_{i\,j} - b_{i\,j})\varphi_j.$$

Используя предположение (49), заключаем, что

$$|f(x_i) - f_i| \leqslant \frac{\theta_1(h)}{\rho(x_i, \partial\Sigma)} \|\tilde{\varphi}\|_{L'}, \quad i = \overline{1, N}. \tag{55}$$

Далее, функция ψ является решением уравнения $\mathbf{A}\psi = f$ в классе функций $\psi \in A_C$, причём

$$f \in H^\nu_C, \quad \|f\|_{\nu,\Sigma} \leqslant C\|\varphi\|_L,$$

где $\nu > 0$ — константа из леммы 3. Элемент ψ' — решение уравнения $\mathbf{A}'\psi' = f'$, при этом элемент f' можно представить в виде

$$f' = f'_0 + \Delta f',$$

где

$$f'_0 = (f(x_1), \ldots, f(x_N)), \quad \Delta f' = (f_1 - f(x_1), \ldots, f_n - f(x_N)).$$

Тогда из теорем 2, 3 и неравенства (55) следует оценка

$$|\psi(x_i) - \psi_i| \leqslant (\theta_1(h) + h^{1/2} + h^\nu)\, \|\tilde{\varphi}\|_{L'}.$$

Таким образом, существует константа C такая, что выполнена оценка (52) с

$$\varepsilon_1 = C(\theta_1(h) + h^{1/2} + h^\nu). \tag{56}$$

Проверим выполнение условия (53). Пусть $\varphi \in L$, $f = \mathbf{K}\varphi$. Тогда $f \in H^{1/2}_C(\Sigma)$, $\|f\|_{1/2,\Sigma} \leqslant$ $\leqslant C\|\varphi\|_L$, и если положить $\psi = \Pi^{-1}\Pi f$, то

$$\|\psi - f\|_L \leqslant Ch^{1/2}\|\varphi\|_L.$$

Значит, существует константа C такая, что выполнена оценка (53) с

$$\varepsilon_2 = Ch^{1/2}. \tag{57}$$

Из теоремы 4 с учётом оценок (56) и (57) следует, что найдутся константы C и $h_0 > 0$ такие, что при $h < h_0$ существует оператор $(I + \mathbf{K}')^{-1}$ и

$$\|(I + \mathbf{K}')^{-1}\| \leqslant C.$$

Теперь получим оценку, связывающую решения уравнений (44) и (51) при условии $g' =$ $= G'\Pi f \in \mathbb{C}^N$. Пусть $\varphi \in L$ — решение уравнения (44), $\varphi' \in L$ — решение уравнения (51) с указанной правой частью. Тогда выполнено соотношение

$$(\varphi' + \mathbf{K}'\varphi') - (\Pi\varphi + \Pi\mathbf{K}\varphi) = g' - \Pi g,$$

которое можно записать в виде

$$\varphi' - \Pi\varphi + \mathbf{K}'(\varphi' - \Pi\varphi) = \Delta g',$$

где

$$\Delta g' = \Delta g_1' + \Delta g_2', \quad \Delta g_1' = g' - \Pi g, \quad \Delta g_2' = \Pi \mathbf{K}\varphi - \mathbf{K}'\Pi\varphi.$$

Заметим, что в данном случае g — точное решение характеристического уравнения (7) с рассматриваемой правой частью f, а $g' = (g_1, \ldots, g_N)$ — соответствующее решение системы (17). По теореме 3 заключаем, что

$$\|\Delta g_1'\| \leqslant C\|f\|_{\mu,\Sigma}(h^{1/2} + h^{\mu}).$$

Разность $\Delta g_2' = \Pi\mathbf{K}\varphi - \mathbf{K}'\Pi\varphi$ представим в виде

$$\Delta g_2' = \Delta g_{21}' + \Delta g_{22}',$$
$$\Delta g_{21}' = \Pi\mathbf{K}\varphi - \Pi\mathbf{K}\tilde{\varphi}, \quad \Delta g_{22}' = \Pi\mathbf{K}\tilde{\varphi} - \mathbf{K}'\Pi\varphi,$$

где $\tilde{\varphi} = \Pi^{-1}\Pi\varphi \in \tilde{L}$ — кусочно-линейная аппроксимация функции φ. Заметим, что $\varphi \in H_C^{1/2}$ и $\|\varphi\|_{1/2,\Sigma} \leqslant C\|f\|_{\mu,\Sigma}$. Тогда легко показать, что

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_L \leqslant C\|f\|_{\mu,\Sigma} h^{1/2}.$$

Так как $\mathbf{K}\colon C_C[\Sigma] \to C_C[\Sigma]$ — ограниченный оператор, заключаем, что

$$\|\Delta g_{21}'\| \leqslant C\|f\|_{\mu,\Sigma} h^{1/2}.$$

Наконец, для оценки разности $\Delta g_{22}'$ заметим, что $\tilde{\varphi} \in \tilde{L}$ и $\Pi\varphi = \Pi\tilde{\varphi}$. Тогда для функции $\tilde{\varphi}$ выполнено условие j1) теоремы 4 с ε_1 вида (56) и с оценкой

$$\|\tilde{\varphi}\| \leqslant C\|f\|_{1/2,\Sigma}.$$

Собирая полученные оценки, можем записать

$$\|\Delta g'\| \leqslant \|f\|_{\mu,\Sigma}(\theta_1(h) + h^{1/2} + h^{\nu}).$$

Тогда

$$\|\varphi' - \Pi\varphi\|_L \leqslant C\|f\|_{\mu,\Sigma}(\theta_1(h) + h^{1/2} + h^{\nu}).$$

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Доказана равномерная сходимость на сетке для приближённых решений уравнения (1) с применением численной схемы (47), в основе которой лежит аппроксимация уравнения на конформной треугольной сетке. При этом сетка может быть достаточно произвольной, а для обеспечения сходимости численных решений должны быть выполнены условия i1), i2), которые, по сути, не позволяют при сгущении сетки появиться треугольникам со сколь угодно малыми углами.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-286.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лифанов, И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент / И.К. Лифанов.— М. : Янус, 1995. — 520 с.
2. Сетуха, А.В. Трёхмерная краевая задача Неймана с обобщёнными граничными условиями и уравнение Прандтля / А.В. Сетуха // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 9. — С. 1208–1208.
3. Вайникко, Г.М. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г.М. Вайникко, И.К. Лифанов, Л.Н. Полтавский. — М. : Янус, 2001. — 508 с.
4. О численном решении двумерного гиперсингулярного интегрального уравнения и о распространении звука в городской застройке / В.А. Гутников, В.Ю. Кирякин, И.К. Лифанов, А.В. Сетуха // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2007. — Т. 47, № 12. — С. 2088–2100.
5. Даева, С.Г. О численном решении краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца методом гиперсингулярных интегральных уравнений / С.Г. Даева, А.В. Сетуха // Вычислит. методы и программирование. — 2015. — Т. 16. — С. 421–435.
6. Daeva, S.G. Numerical simulation of scattering of acoustic waves by inelastic bodies using hypersingular boundary integral equation / S.G. Daeva, A.V. Setukha // AIP Conf. Proc. — 2015. — V. 1648. — P. 390004-1–390004-4.
7. Лебедева, С.Г. О численном решении полного двумерного гиперсингулярного интегрального уравнения методом дискретных особенностей / С.Г. Лебедева, А.В. Сетуха // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 2. — С. 223–233.
8. Сетуха, А.В. Сходимость метода кусочно-линейных аппроксимаций и коллокаций для некоторого гиперсингулярного интегрального уравнения на замкнутой поверхности / А.В. Сетуха, А.В. Семенова // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 9. — С. 1265–1280.
9. Сетуха, А.В. О численном решении некоторого поверхностного интегрального уравнения методами кусочно-линейных аппроксимаций и коллокаций / А.В. Сетуха, А.В. Семенова // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2019. — Т. 59, № 6. — С. 990–1006.
10. Сетуха, А.В. Метод граничных интегральных уравнений с гиперсингулярными интегралами в краевых задачах / А.В. Сетуха // Итоги науки и техники. Серия Совр. математика и её приложения. Темат. обзоры. — 2019. — Т. 160. — С. 114–125.
11. Сетуха, А.В. Метод интегральных уравнений в математической физике / А.В. Сетуха. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2023. — 316 с.
12. Канторович, Л.В. Функциональный анализ и прикладная математика / Л.В. Канторович // Успехи мат. наук. — 1948. — Т. 3, № 6 (28). — С. 89–185.

CONVERGENCE OF THE METHOD OF PIECEWISE LINEAR APPROXIMATIONS AND COLLOCATIONS FOR A TWO-DIMENSIONAL HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATION ON A SET WITH BOUNDARY

 A. V. Setukha

Lomonosov Moscow State University, Russia
Marchuk Institute of Numerical Mathematics of RAS, Moscow, Russia
e-mail: setuhaav@rambler.ru

A hypersingular integral equation on a convex bounded set on the plane with an integral understood in the sense of a finite part in the sense of Hadamard is considered. Equations of this type, in particular, arise when solving the Neumann boundary value problem for the Lapalse and Helmholtz equations on a flat screen in the case where the solution is sought in the form of a double layer potential. To numerically solve the equation, a numerical scheme is used based on piecewise linear approximation of the unknown function on a triangular conformal mesh and the collocation method. The uniform convergence of numerical solutions to an exact solution on a grid when the maximum cell diameter tends to zero has been proven.

Keywords: numerical method, hypersingular integral, integral equation, quadrature formula

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-286.

REFERENCES

1. Lifanov, I.K., *Singular Integral Equations and Discrete Vortices*, VSP, 1996.
2. Setukha, A.V., The three-dimensional Neumann problem with generalized boundary conditions and the Prandtl equation, *Differ. Equat.*, 2003, vol. 39, no. 9, pp. 1249–1262.
3. Vainikko, G.M., Lifanov, I.K., and Poltavskii, L.N., *Hypersingular Integral Equations and Their Applications*, Chapman and Hall CRC, 2004.
4. Gutnikov, V.A., Kiryakin,V.Y., Lifanov, I.K., and Setukha, A.V., Numerical solution to a two-dimensional hypersingular integral equation and sound propagation in urban areas, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2007, vol. 47, no. 12, pp. 2002–2013.
5. Daeva, S. and Setukha, A., On the numerical solution of the Neumann boundary value problem for the Helmholtz equation using the method of hypersingular integral equations, *Vychislitel'nye Metody i Programmirovanie* (Numerical Methods and Programming), 2015, vol. 16, pp. 421–435.
6. Daeva, S.G. and Setukha, A.V., Numerical simulation of scattering of acoustic waves by inelastic bodies using hypersingular boundary integral equation, *AIP Conf. Proc.*, 2015, vol. 1648, pp. 390004-1–390004-4.
7. Lebedeva, S.G. and Setukha, A.V., On the numerical solution of a complete two-dimensional hypersingular integral equations by the method of discrete singularities, *Differ. Equat.*, 2013, vol. 49, no. 2, pp. 224–234.
8. Setukha, A.V. and Semenova, A.V. Convergence of the piecewise linear approximation and collocation method for a hypersingular integral equation on a closed surface, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 9, pp. 1231–1246.
9. Setukha, A.V. and Semenova, A.V., Numerical solution of a surface hypersingular integral equation by piecewise linear approximation and collocation methods, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2019, vol. 59, no. 6, pp. 942–957.
10. Setukha, A.V., Method of boundary integral equations with hypersingular integrals in boundary-value problems, *J. Math. Sci.*, 2021, vol. 257, no. 1, pp. 114–126.
11. Setukha, A.V., *Method Integral'nykh uravneni v mathematcheskoy phizike* (Integral Equation Method in Mathematical Physics), Moscow: MSU Press, 2023.
12. Kantorovich, L.V., Functional analysis and applied mathematics, *Usp. Mat. Nauk*, 1948, vol. 3, no. 6 (28), pp. 89–185.