ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 9, с. 1261–1275

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.642.7

ДВУХТОЧЕЧНЫЙ МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ РАЗБИЕНИЯХ

© 2024 г. А. С. Ненашев

Научно-технологический университет "Сириус", федеральная территория "Сириус"
Институт вычислительной математики имени Г.И. Марчука РАН, г. Москва
e-mail: nenashev.as@talantiuspeh.ru, nenashev_as@mail.ru

Поступила в редакцию 19.04.2024 г., после доработки 19.04.2024 г.; принята к публикации 04.06.2024 г.

Построена квадратурная формула для вычисления гиперсингулярного интеграла по отрезку с использованием концов интервалов разбиения отрезка в качестве узлов кусочно-постоянной интерполяции плотности интеграла, а также особым образом выбранных точек коллокации. Отличительной особенностью предложенной формулы является возможность вычисления значений интеграла от функций, имеющих конечное число точек разрыва первого рода на отрезке интегрирования. На основе полученной квадратурной формулы построена численная схема решения соответствующего характеристического гиперсингулярного интегрального уравнения при нерегулярном разбиении области поиска решения. Доказаны оценки скорости сходимости приближённых решений к точным в классе кусочно-гёльдеровских функций.

Ключевые слова: численный метод, гиперсингулярный интеграл, интегральное уравнение, квадратурная формула

DOI: 10.31857/S0374064124090088, EDN: JWKVJQ

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Метод интегральных уравнений находит широкое применение в ряде задач математической физики [1]. Особое место занимают уравнения, содержащие интегральные операторы с сильной особенностью в ядре, — так называемые *гиперсингулярные уравнения*. В прикладных задачах необходимо исследовать вопросы принадлежности решения к определённому классу функций и оценки скорости сходимости некоторой численной схемы решения соответствующего интегрального уравнения. Для этого в первую очередь анализируется характеристическое уравнение, содержащее главную особенность интегрального оператора, в частности, в одномерном случае важную роль играет уравнение на отрезке

$$\int\limits_a^b \frac{g(x)\,dx}{(x-x_0)^2} = f(x_0), \quad x_0 \in (a,b), \quad g(a)=g(b)=0, \tag{1}$$

где интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару:

$$\int\limits_a^b \frac{g(x)\,dx}{(x-x_0)^2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_a^{x_0-\varepsilon} \frac{g(x)\,dx}{(x-x_0)^2} + \int\limits_{x_0+\varepsilon}^b \frac{g(x)\,dx}{(x-x_0)^2} - \frac{2g(x_0)}{\varepsilon}\right).$$

При определённых условиях на функцию $g(x)$ [1, § 6] уравнение (1) эквивалентно следующему сингулярному уравнению относительно производной подынтегральной функции:

$$\int_a^b \frac{g'(x)\,dx}{(x-x_0)^2} = f(x_0), \quad x_0 \in (a,b), \tag{2}$$

вместе с дополнительным условием

$$\int_a^b g'(x)\,dx = 0.$$

Для исследования уравнения (2) вводится класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера [2, § 3] в окрестности внутренних точек интервала (a,b) и допускающих интегрируемую степенную особенность на концах $\{a,b\}$.

Определение 1. Будем обозначать, что функция $\varphi \in H_{(a,b)}(\alpha)$, если существуют константы $A>0$ и $\alpha \in (0,1]$ такие, что для любых $x,y \in (a,b)$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant A|x-y|^\alpha. \tag{3}$$

Определение 2. Будем обозначать, что функция $\varphi \in H^*_{(a,b)}(\alpha)$, если существуют константы $0<\lambda,\ \mu\leqslant 1$ и функция $\psi \in H_{(a,b)}(\alpha)$ такие, что для любого $x \in (a,b)$ φ представима в виде

$$\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{(x-a)^{1-\lambda}(b-x)^{1-\mu}}. \tag{4}$$

Для уравнения (2) показано [2, § 86], что если правая часть $f \in H^*_{(a,b)}(\alpha)$, то и его решение принадлежит тому же классу функций, т.е. $g' \in H^*_{(a,b)}(\alpha)$.

Среди численных методов решения уравнений вида (1) особое место занимает метод дискретных особенностей [1, § 13.5], являющийся разновидностью метода коллокации. Отличительная черта этого метода — использование равномерного разбиения интервала поиска решения или разбиения, диффеоморфного равномерному. Однако интересно создание численных схем, позволяющих искать приближённое решение интегральных уравнений на существенно неравномерных разбиениях. Такого рода схемы реализованы в [3–5], при этом в работах [4, 5] дано строгое обоснование скорости сходимости приближённого решения уравнения (1).

Следует отметить, что численные схемы в [3–5] эффективно работают при ограничении на правую часть: $f \in H^*_{(a,b)}(\alpha)$. Однако в ряде задач математической физики, в частности в моделировании источников питания проволочных антенн [6], возникает необходимость рассмотрения уравнения (1) в более широком классе функций:

$$\int_a^b \frac{g(x)\,dx}{(x-x_0)^2} = f(x_0) + \sum_{m=1}^{M} \frac{Q_m}{x_0-q_m}, \quad x_0 \in (a,b) \setminus \bigcup_{m=1}^{M} \{q_m\}, \tag{5}$$

$$f \in H^*_{(a,b)}(\alpha), \quad q_m \in [a,b], \quad Q_m \in \mathbb{R}, \quad m = \overline{1,M}.$$

В работах [6, 7] анализируется характеристическое уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{g(x)\,dx}{(x-x_0)^2} = \frac{1}{x_0-q}, \quad x_0 \in (-1,1)\setminus\{q\}, \quad q \in [-1,1]; \tag{6}$$

в [6] получено решение уравнения (6) в виде

$$g(x) = \arcsin x + \pi\,\mathrm{sgn}(q-x)/2, \quad x \in (-1,1), \quad q \in [-1,1], \tag{7}$$

а в [7] приведено обоснование применимости численного метода дискретных особенностей к решению уравнений вида (6). Опять отметим ограничение метода дискретных особенностей, связанное с равномерностью разбиения интервала поиска решения.

С другой стороны, анализ и численные исследования методов [3–5], построенных для неравномерных разбиений, показывают расходимость численного решения уравнения (6). Это обусловлено использованием аппроксимации производной искомой функции через конечную разность значений в точках коллокации на разных участках разбиения, что не подходит для функций, имеющих разрывы первого рода как в выражении (7).

В связи с этим интерес представляет возможность построения численной схемы решения уравнения типа (5), ориентированной на неравномерное разбиение интервала поиска решения, что является предметом исследования данной работы.

2. ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ

Для построения эффективной численной схемы решения уравнения (5) проанализируем соответствующее пространство решений. Нетрудно заметить, что справедлива следующая декомпозиция искомой функции $g(x)$:

$$g(x) = \sum_{m=0}^{M} g_m(x), \tag{8}$$

где каждая из функций $g_m(x)$ удовлетворяет соответствующему интегральному уравнению

$$\int_a^b \frac{g_0(x)\,dx}{(x-x_0)^2} = f(x_0), \quad x_0 \in (a,b), \quad f \in H^*_{(a,b)}(\alpha), \tag{9}$$

$$\int_a^b \frac{g_m(x)\,dx}{(x-x_0)^2} = \frac{Q_m}{x_0-q_m}, \quad q_m \in [a,b], \quad x_0 \in (a,b)\setminus\{q_m\}, \quad m = \overline{1,M}. \tag{10}$$

Примем для общности рассмотрения, что концы отрезка $[a,b]$ также входят в множество точек q_m, $m=\overline{1,M}$. Объединив свойства решений уравнения (9), а также системы уравнений (10) с учётом свойств решения характеристического уравнения (6), получим, что функция g на каждом из интервалов (q_m, q_{m+1}) удовлетворяет условию Гёльдера (3), а её производная g' на концах интервала (a,b) имеет интегрируемую степенную особенность типа (4).

Введём теперь строгое определение соответствующих классов функций.

Определение 3. Будем говорить, что функция φ является *кусочно-гёльдеровской на интервале* (a,b) и обозначать $\varphi \in PH_{(a,b)}(\alpha)$, если существуют константы $A>0$ и $\alpha \in (0,1]$, а также конечный набор точек $a = q_1 < q_2 < \ldots < q_{M-1} < q_M = b$ такие, что для любых $x, y \in (q_m, q_{m+1})$, $m = \overline{1, M-1}$, выполняется неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant A|x-y|^{\alpha}.$$

Обобщим данное определение для функций, имеющих интегрируемую степенную особенность на концах интервала (a,b).

Определение 4. Будем обозначать, что функция $\varphi \in PH^*_{(a,b)}(\alpha)$, если существуют константы $0<\lambda,\ \mu \leqslant 1$ и функция $\psi \in PH_{(a,b)}(\alpha)$ такие, что для любого $x\in(a,b)$ φ представима в виде (4).

Учитывая свойства разложения (8), в дальнейшем будем рассматривать решения уравнения (5) в пространстве функций g таких, что $g'\in PH^*_{(a,b)}(\alpha)$.

3. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

Рассмотрим отрезок $[a,b]$, разбитый произвольным образом на N смежных интервалов точками $a=x_1<x_2<\ldots<x_N<x_{N+1}=b$. Учитывая тот факт, что квадратурные формулы строятся для интегралов от функций, имеющих разрыв в конечном наборе точек $q_1,\ \ldots,\ q_M$, введём дополнительное ограничение, что $\{q_1,\ldots,q_M\}\subset\{x_1,\ldots,x_N\}$. Данное требование означает, что подынтегральная функция не испытывает разрывов внутри каждого из интервалов разбиения (x_j,x_{j+1}). Существенным преимуществом применения неравномерного разбиения в данном случае является тот факт, что для произвольного расположения точек разрыва $q_1,\ \ldots,\ q_M$ сложно подобрать равномерное разбиение, обеспечивающее попадание всех точек разрыва на узлы равномерной сетки.

Внутри каждого из интервалов разбиения (x_j,x_{j+1}) выберем две точки коллокации $x_{0j}^{(1)}$ и $x_{0j}^{(2)}$, правило выбора которых будет оговорено позже. В данной работе исследуются приближённые квадратурные формулы

$$\int\limits_a^b \frac{g(x)\,dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2} \approx g(x_j^+)\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}+\sum_{k=1,\ k\neq j}^{N}\big(\alpha_{j,k}^{(1)}g(x_k^+)+\beta_{j,k}^{(1)}g(x_{k+1}^-)\big)\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}, \tag{11}$$

$$\int\limits_a^b \frac{g(x)\,dx}{\big(x-x_{0j}^{(2)}\big)^2} \approx g(x_{j+1}^-)\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(2)}\big)^2}+\sum_{k=1,\ k\neq j}^{N}\big(\alpha_{j,k}^{(2)}g(x_k^+)+\beta_{j,k}^{(2)}g(x_{k+1}^-)\big)\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(2)}\big)^2}, \tag{12}$$

$$\alpha_{j,k}^{(1,2)}=\frac{x_{k+1}-z_{jk}^{(1,2)}}{x_{k+1}-x_k},\quad \beta_{j,k}^{(1,2)}=1-\alpha_{j,k}^{(1,2)},\quad k\neq j, \tag{13}$$

$$z_{jk}^{(1,2)}=\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{x\,dx}{\big(x-x_{0j}^{(1,2)}\big)^2}\Bigg(\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(1,2)}\big)^2}\Bigg)^{-1},\quad k\neq j, \tag{14}$$

где $g(x_k^+)$ и $g(x_k^-)$ — правый и левый пределы значения функции $g(x)$ в точке $x=x_k$ соответственно.

Установим следующее базовое свойство квадратурных формул (11), (12).

Теорема 1. *Для констант $\alpha_{j,k}^{(1,2)}$ и $\beta_{j,k}^{(1,2)}$, заданных выражениями (13), (14), справедливо условие $\alpha_{j,k}^{(1,2)},\beta_{j,k}^{(1,2)}\in[0,1]$.*

Доказательство. Так как точки коллокации $x_{0j}^{(1,2)}\notin[x_k,x_{k+1}]$ при $k\neq j$, то согласно обобщённой теореме о среднем для определённых интегралов

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{x\,dx}{\big(x-x_{0j}^{(1,2)}\big)^2}=z_{jk}^{(1,2)}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(1,2)}\big)^2},\quad x_k\leqslant z_{jk}^{(1,2)}\leqslant x_{k+1},$$

что совпадает с определением $z_{jk}^{(1,2)}$ в выражении (14). Отсюда с учётом формул (13) непосредственно вытекают ограничения на диапазон значений $\alpha_{j,k}^{(1,2)}$ и $\beta_{j,k}^{(1,2)}$. Теорема доказана.

4. ТОЧКИ КОЛЛОКАЦИИ

Для выбора точек коллокации будем использовать решения нелинейных уравнений

$$\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{(x-x_j)\,dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}=0, \tag{15}$$

$$\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{(x-x_{j+1})\,dx}{\big(x-x_{0j}^{(2)}\big)^2}=0 \tag{16}$$

относительно неизвестных $x_{0j}^{(1,2)}\in(x_j,x_{j+1})$. Исследуем вопрос разрешимости этих уравнений.

Теорема 2. *Уравнения (15) и (16) имеют единственные решения, лежащие внутри интервала (x_j,x_{j+1}) и определяемые соотношениями*

$$x_{0j}^{(1)}=\frac{x_j+\tau x_{j+1}}{1+\tau},\quad x_{0j}^{(2)}=\frac{\tau x_j+x_{j+1}}{1+\tau}, \tag{17}$$

где $\tau\in\mathbb{R}_+$ является единственным корнем трансцендентного уравнения

$$\tau=e^{-1-\tau}. \tag{18}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала уравнение (15), представив его в виде

$$\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)\,dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}=\big(x_j-x_{0j}^{(1)}\big)\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}.$$

Вычислив интегралы в уравнении, получим

$$\ln\bigg(\frac{x_{j+1}-x_{0j}^{(1)}}{x_{0j}^{(1)}-x_j}\bigg)=\big(x_j-x_{0j}^{(1)}\big)\bigg(\frac{1}{x_{0j}^{(1)}-x_{j+1}}-\frac{1}{x_{0j}^{(1)}-x_j}\bigg),\quad -\ln\bigg(\frac{x_{0j}^{(1)}-x_j}{x_{j+1}-x_{0j}^{(1)}}\bigg)=1+\frac{x_{0j}^{(1)}-x_j}{x_{j+1}-x_{0j}^{(1)}},$$

$$-\ln\tau=1+\tau,$$

где

$$\tau=\frac{x_{0j}^{(1)}-x_j}{x_{j+1}-x_{0j}^{(1)}}.$$

Таким образом, получено уравнение (18). Заметим, что с учётом введённого обозначения для τ принадлежность $x_{0j}^{(1)}$ интервалу (x_j,x_{j+1}) эквивалентно условию $\tau\in\mathbb{R}_+$. Кроме того, справедливо выражение для $x_{0j}^{(1)}$ из соотношений (17).

Исследуем теперь вопрос разрешимости уравнения (18), представив его в следующем виде:

$$\tau=f(\tau),\quad f(\tau)=e^{-1-\tau}.$$

Функция $f(\tau)$ переводит полное метрическое пространство $\mathbb{R}_+\cup\{0\}$ в себя, при этом $f(0)\neq 0$. Кроме того, $|f'(\tau)|\leqslant 1/e<1$ при $\tau\geqslant 0$, т.е. отображение $f(\tau)$ является сжимающим и, соответственно, имеет единственную неподвижную точку [8, с. 48], которая и является искомым значением $\tau>0$. Поэтому исходное уравнение (15) также имеет единственное решение, лежащее строго внутри интервала (x_j,x_{j+1}).

Обратимся теперь к уравнению (16). Заметим, что при заменах $x_j\leftrightarrows x_{j+1}$ и $x_{0j}^{(2)}\to x_{0j}^{(1)}$ оно переходит в уравнение (15), поэтому для него справедливы аналогичные утверждения о существовании и единственности решения, а также соотношения (17) с учётом введённых подстановок. Теорема доказана.

5. СХОДИМОСТЬ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

Исследуем свойства функций, производные которых являются кусочно-гёльдеровскими с интегрируемыми особенностями на краях (4).

Нам потребуется следующее неравенство [2, § 5], справедливое для любых $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ и $\theta \in (0,1]$:

$$\left|\sigma_1^\theta - \sigma_2^\theta\right| \leqslant |\sigma_1 - \sigma_2|^\theta.$$

Теорема 3. *Пусть функция $g(x)$ имеет производную, представимую в виде*

$$g'(x) = \frac{\psi(x)}{(x-a)^{1-\lambda}(b-x)^{1-\mu}}, \quad \psi \in H_{(c,d)}(\alpha), \quad (c,d) \subseteq (a,b), \quad 0 < \lambda, \mu \leqslant 1.$$

Тогда $g \in H_{(c,d)}(\min\{\lambda,\mu\})$ и для любых $x, y \in (c,d)$ существует константа $B > 0$ такая, что

$$|g(x) - g(y) - g'(y)(x-y)| \leqslant \frac{B|x-y|^{1+\beta}}{(y-a)(b-y)}, \tag{19}$$

где $\beta = \min\{\alpha, \lambda, \mu\}$.

Доказательство. Представим производную функции $g(x)$ следующим образом:

$$g'(x) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{\psi(x)(b-x)^\mu}{(x-a)^{1-\lambda}} + \frac{\psi(x)(x-a)^\lambda}{(b-x)^{1-\mu}}\right) = \frac{\psi_1(x)}{(x-a)^{1-\lambda}} + \frac{\psi_2(x)}{(b-x)^{1-\mu}} = g_1'(x) + g_2'(x),$$

где согласно свойствам гёльдеровских функций [2, § 5] $\psi_1 \in H_{(c,d)}(\beta_1)$, $\beta_1 = \min\{\alpha, \mu\}$ и $\psi_2 \in H_{(c,d)}(\beta_2)$, $\beta_2 = \min\{\alpha, \lambda\}$.

Исследуем отдельно свойства функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$. Для $g_1(x)$ справедлива оценка

$$|g_1(x) - g_1(y)| = \left|\int_x^y \frac{\psi_1(t)\,dt}{(t-a)^{1-\lambda}}\right| \leqslant \frac{C_1}{\lambda}\left|(y-a)^\lambda - (x-a)^\lambda\right| \leqslant \frac{C_1|x-y|^\lambda}{\lambda},$$

где $C_1 = \max_{x\in(c,d)}\{|\psi(x)|\}$, поэтому $g_1 \in H_{(c,d)}(\lambda)$. Далее рассмотрим функцию

$$G_1(x,y) = \frac{g_1(x) - g_1(y)}{x-y} - g_1'(y) = \int_0^1 \left[g_1'(y+\theta(x-y)) - g_1'(y)\right] d\theta =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\psi_1(y+\theta(x-y))}{(y+\theta(x-y)-a)^{1-\lambda}} - \frac{\psi_1(y)}{(y-a)^{1-\lambda}}\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{y-a}\int_0^1 \left[\psi_1(y+\theta(x-y))(y+\theta(x-y)-a)^\lambda - \psi_1(y)(y-a)^\lambda\right] d\theta - \frac{1}{y-a}\int_0^1 \frac{\psi_1(y+\theta(x-y))\theta(x-y)\,d\theta}{(y+\theta(x-y)-a)^{1-\lambda}} =$$

$$= \frac{1}{y-a}F_1(x,y) - \frac{1}{y-a}F_2(x,y).$$

Для $F_1(x,y)$ справедлива оценка

$$|F_1(x,y)| \leqslant \int_0^1 \left|\psi_1(y+\theta(x-y))(y+\theta(x-y)-a)^\lambda - \psi_1(y)(y-a)^\lambda\right| d\theta \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \int_0^1 |\theta(x-y)|^\beta\, d\theta = C_2\frac{|x-y|^\beta}{1+\beta},$$

где $\beta = \min\{\alpha, \lambda, \mu\}$.

Преобразуем $F_2(x,y)$:

$$F_2(x,y)=\int_0^1 \frac{\psi_1(y+\theta(x-y))\theta(x-y)\,d\theta}{(y+\theta(x-y)-a)^{1-\lambda}}=\int_0^1 g_1'(y+\theta(x-y))\theta(x-y)\,d\theta=$$

$$=\int_0^1 \theta\frac{dg_1(y+\theta(x-y))}{d\theta}\,d\theta=g_1(x)-\int_0^1 g_1(y+\theta(x-y))\,d\theta.$$

Для $|F_2(x,y)|$ справедлива оценка

$$|F_2(x,y)|\leqslant|g_1(x)-g_2(y)|+\int_0^1|g_1(y+\theta(x-y))-g_1(y)|\,d\theta\leqslant C_1\frac{|x-y|^\lambda}{1+\lambda}+C_1\frac{|x-y|^\lambda}{(1+\lambda)^2}.$$

Объединяя оценки для $|F_1(x,y)|$ и $|F_2(x,y)|$, получаем

$$|G_1(x,y)|\leqslant B_1\frac{|x-y|^\beta}{y-a},$$

откуда непосредственно следует, что

$$|g_1(x)-g_1(y)-g_1'(y)(x-y)|\leqslant B_1\frac{|x-y|^{1+\beta}}{y-a}.$$

Проведя аналогичные рассуждения относительно $g_2(x)$, будем иметь, что $g_2\in H_{(c,d)}(\mu)$ и

$$|g_2(x)-g_2(y)-g_2'(y)(x-y)|\leqslant B_2\frac{|x-y|^{1+\beta}}{b-y}.$$

Объединив две последние оценки, получим справедливость соотношения (19). Кроме того, с учётом свойств гёльдеровских функций [2, § 5]

$$g=(g_1+g_2)\in H_{(c,d)}(\min\{\lambda,\mu\}).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос сходимости квадратурных формул (11), (12).

Теорема 4. *Для любого разбиения отрезка $[a,b]$ на N произвольных частей последовательностью точек $a=x_1<x_2<\ldots<x_N<x_{N+1}=b$, удовлетворяющего условию*

$$h_{\max}\leqslant\gamma h_{\min}, \tag{20}$$

где $h_{\max}=\max_{i=\overline{1,N}}\{h_i\}$, $h_{\min}=\min_{i=\overline{1,N}}\{h_i\}$, $h_i=x_{i+1}-x_i$, и функции $g(x)$, имеющей производную $g'\in PH^*_{(a,b)}(\alpha)$, справедливы оценки

$$\left|\int_a^b\frac{g(x)\,dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}-S_N^{(1)}\big(x_{0j}^{(1)}\big)\right|\leqslant C_1\frac{h_{\max}^\beta}{\big(x_{0j}^{(1)}-a\big)\big(b-x_{0j}^{(1)}\big)},\quad j=\overline{1,N}, \tag{21}$$

$$\left|\int_a^b\frac{g(x)\,dx}{\big(x-x_{0j}^{(2)}\big)^2}-S_N^{(2)}\big(x_{0j}^{(2)}\big)\right|\leqslant C_2\frac{h_{\max}^\beta}{\big(x_{0j}^{(2)}-a\big)\big(b-x_{0j}^{(2)}\big)},\quad j=\overline{1,N}, \tag{22}$$

где $\beta=\min\{\alpha,\lambda,\mu\}$,

$$S_N^{(1)}\big(x_{0j}^{(1)}\big)=g(x_j^+)\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}+\sum_{k=1,\;k\neq j}^{N}(\alpha_{j,k}^{(1)}g(x_k^+)+\beta_{j,k}^{(1)}g(x_{k+1}^-))\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2},\tag{23}$$

$$S_N^{(2)}\big(x_{0j}^{(2)}\big)=g(x_{j+1}^-)\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(2)}\big)^2}+\sum_{k=1,\;k\neq j}^{N}(\alpha_{j,k}^{(2)}g(x_k^+)+\beta_{j,k}^{(2)}g(x_{k+1}^-))\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(2)}\big)^2},\tag{24}$$

коэффициенты $\alpha_{j,k}^{(1,2)}$, $\beta_{j,k}^{(1,2)}$ *определяются соотношениями (13), (14), а точки коллокации* $x_{0j}^{(1)}$ *и* $x_{0j}^{(1)}$ *— соотношениями (15)–(18).*

Доказательство. Докажем сначала оценку для квадратурной формулы $S_N^{(1)}$. Имеем

$$I=\int\limits_a^b\frac{g(x)\,dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}-S_N^{(1)}\big(x_{0j}^{(1)}\big)\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{g(x)-g(x_j^+)}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}\,dx+$$

$$+\sum_{k=1,\;k\neq j}^{N}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{g(x)-\alpha_{j,k}^{(1)}g(x_k^+)-\beta_{j,k}^{(1)}g(x_{k+1}^-)}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}\,dx=I_1+I_2,$$

$$I_1=\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{g(x)-g(x_j^+)}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}\,dx=\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{g(x)-g\big(x_{0j}^{(1)}\big)-g'\big(x_{0j}^{(1)}\big)\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}\,dx-$$

$$-\big(g(x_j^+)-g\big(x_{0j}^{(1)}\big)-g'\big(x_{0j}^{(1)}\big)\big(x_j-x_{0j}^{(1)}\big)\big)\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}+g'\big(x_{0j}^{(1)}\big)\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{(x-x_j)\,dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}=I_{1,1}-I_{1,2}+I_{1,3}.$$

Заметим, что с учётом соотношения (15) справедливо, что $I_{1,3}=0$. Из теоремы 3 следует

$$|I_{1,1}|\leqslant\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{\big|g(x)-g\big(x_{0j}^{(1)}\big)-g'\big(x_{0j}^{(1)}\big)\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)\big|}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{B}{\big(x_{0j}^{(1)}-a\big)\big(b-x_{0j}^{(1)}\big)}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{\big|x-x_{0j}^{(1)}\big|^{1+\beta}\,dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}\leqslant\frac{2Bh_j^\beta}{\beta\big(x_{0j}^{(1)}-a\big)\big(b-x_{0j}^{(1)}\big)}.$$

Аналогично

$$|I_{1,2}|\leqslant\big|g(x_j^+)-g\big(x_{0j}^{(1)}\big)-g'\big(x_{0j}^{(1)}\big)\big(x_j-x_{0j}^{(1)}\big)\big|\left|\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{Bh_j^{1+\beta}}{\big(x_{0j}^{(1)}-a\big)\big(b-x_{0j}^{(1)}\big)}\left(\frac{1}{x_{j+1}-x_{0j}^{(1)}}+\frac{1}{x_{0j}^{(1)}-x_j}\right).$$

Из соотношений (17) находим

$$x_{0j}^{(1)}-x_j=\frac{\tau h_j}{1+\tau},\quad x_{j+1}-x_{0j}^{(1)}=\frac{h_j}{1+\tau},$$

поэтому

$$|I_{1,2}|\leqslant\frac{Bh_j^{\beta}(1+\tau)^2}{\tau\big(x_{0j}^{(1)}-a\big)\big(b-x_{0j}^{(1)}\big)}.$$

Объединяя оценки для $I_{1,1}$, $I_{1,2}$, $I_{1,3}$, получаем

$$|I_1|\leqslant\frac{A_1h_{\max}^{\beta}}{\big(x_{0j}^{(1)}-a\big)\big(b-x_{0j}^{(1)}\big)}.$$

Оценим теперь значение I_2. Введём обозначение $d_j^{(1)}=\min\big\{x_{0j}^{(1)}-a,b-x_{0j}^{(1)}\big\}$. Заметим, что $d_j^{(1)}\geqslant\tau h_j/(1+\tau)$. Разобьём множество $K=\{k\in\mathbb{N}\colon k=\overline{1,N},\ \ k\neq j\}$ на два подмножества:

$$K_1=\big\{k\in K\colon (x_k,x_{k+1})\subseteq\big(x_{0j}^{(1)}-d_j^{(1)}/2,x_{0j}^{(1)}+d_j^{(1)}/2\big)\big\},\quad K_2=K\setminus K_1.$$

Тогда

$$I_2=\sum_{k\in K_1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{g(x)-\alpha_{j,k}^{(1)}g(x_k^+)-\beta_{j,k}^{(1)}g(x_{k+1}^-)}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}\,dx+\sum_{k\in K_2}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{g(x)-\alpha_{j,k}^{(1)}g(x_k^+)-\beta_{j,k}^{(1)}g(x_{k+1}^-)}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}\,dx=$$
$$=I_{2,1}+I_{2,2}.$$

Обозначим центр отрезка $[x_k,x_{k+1}]$ как c_k, тогда

$$I_{2,1}=\sum_{k\in K_1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{g(x)-g(c_k)-g'(c_k)(x-c_k)}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}\,dx-$$
$$-\sum_{k\in K_1}\alpha_{j,k}^{(1)}\left(g(x_k^+)-g(c_k)-g'(c_k)(x_k-c_k)\right)\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}-$$
$$-\sum_{k\in K_1}\beta_{j,k}^{(1)}\left(g(x_{k+1}^-)-g(c_k)-g'(c_k)(x_{k+1}-c_k)\right)\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}+$$
$$+\sum_{k\in K_1}g'(c_k)\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{\alpha_{j,k}^{(1)}(x-x_k)+\beta_{j,k}^{(1)}(x-x_{k+1})}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}\,dx=I_{2,1,1}-I_{2,1,2}-I_{2,1,3}+I_{2,1,4}.$$

С учётом выражений для коэффициентов $\alpha_{j,k}^{(1)}$ и $\beta_{j,k}^{(1)}$ выполняется равенство

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{\alpha_{j,k}^{(1)}(x-x_k)+\beta_{j,k}^{(1)}(x-x_{k+1})}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}\,dx=0,$$

поэтому $I_{2,1,4}=0$. Далее, из теоремы 3 следует

$$|I_{2,1,1}|\leqslant\sum_{k\in K_1}\frac{Bh_k^{1+\beta}}{(c_k-a)(b-c_k)}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}\leqslant\frac{2Bh_{\max}^{1+\beta}}{(b-a)\big(d_j^{(1)}/2\big)}\sum_{k\in K_1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{4Bh_{\max}^{1+\beta}}{\big(b-x_{0j}^{(1)}\big)\big(x_{0j}^{(1)}-a\big)}\Bigg(\int\limits_{\min\{x_{0j}^{(1)}-d_j/2,x_j\}}^{x_j}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}+\int\limits_{x_{j+1}}^{\max\{x_{0j}^{(1)}+d_j/2,x_{j+1}\}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}\Bigg)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{4Bh_{\max}^{1+\beta}}{\big(b-x_{0j}^{(1)}\big)\big(x_{0j}^{(1)}-a\big)}\bigg(\frac{4}{d_j}+\frac{1}{x_{0j}^{(1)}-x_j}+\frac{1}{x_{j+1}-x_{0j}^{(1)}}\bigg)\leqslant\frac{A_2h_{\max}^{\beta}}{\big(b-x_{0j}^{(1)}\big)\big(x_{0j}^{(1)}-a\big)}.$$

Аналогично

$$|I_{2,1,2}+I_{2,1,3}|\leqslant\sum_{k\in K_1}\alpha_{j,k}^{(1)}\big|g(x_k^+)-g(c_k)-g'(c_k)(x_k-c_k)\big|\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}+$$

$$+\sum_{k\in K_1}\beta_{j,k}^{(1)}\big|g(x_{k+1}^-)-g(c_k)-g'(c_k)(x_{k+1}-c_k)\big|\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k\in K_1}\frac{Bh_k^{1+\beta}}{(c_k-a)(b-c_k)}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}\leqslant\frac{A_2h_{\max}^{\beta}}{\big(b-x_{0j}^{(1)}\big)\big(x_{0j}^{(1)}-a\big)}.$$

Объединяя результаты для $I_{2,1,2}$, $I_{2,1,3}$, $I_{2,1,4}$, получаем оценку

$$|I_{2,1}|\leqslant\frac{2A_2h_{\max}^{\beta}}{\big(b-x_{0j}^{(1)}\big)\big(x_{0j}^{(1)}-a\big)}.$$

Оценим теперь $I_{2,2}$ с учётом того, что $g\in H_{(x_k,x_{k+1})}(\min\{\lambda,\mu\})\subseteq H_{(x_k,x_{k+1})}(\beta)$, $k=\overline{1,N}$. Заметим, что для всех интервалов $(x_k,x_{k+1})\not\subset\big(x_{0j}^{(1)}-d_j^{(1)}/2,x_{0j}^{(1)}+d_j^{(1)}/2\big)$, $k\neq j$, справедлива цепочка неравенств

$$\inf_{x\in(x_k,x_{k+1})}|x-x_{0j}^{(1)}|\geqslant\frac{d_j^{(1)}}{2}-h_{\max}\geqslant\frac{d_j^{(1)}}{2}-\frac{h_j}{\gamma}\geqslant\frac{d_j^{(1)}}{2}-\frac{1+\tau}{\tau\gamma}\inf_{x\in(x_k,x_{k+1})}|x-x_{0j}^{(1)}|,$$

поэтому

$$\inf_{x\in(x_k,x_{k+1})}|x-x_{0j}^{(1)}|\geqslant\bigg(1+\frac{1+\tau}{\tau\gamma}\bigg)^{-1}\frac{d_j^{(1)}}{2}=\theta d_j^{(1)},\quad\theta>0.$$

Тогда

$$|I_{2,2}|\leqslant\sum_{k\in K_2}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{\big|g(x)-\alpha_{j,k}^{(1)}g(x_k^+)-\beta_{j,k}^{(1)}g(x_{k+1}^-)\big|\,dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}\leqslant\sum_{k\in K_2}A_3h_k^{\beta}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}\leqslant$$

$$\leqslant A_3h_{\max}^{\beta}\sum_{k\in K_2}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}\leqslant A_3h_{\max}^{\beta}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{x_{0j}^{(1)}-\theta d_j}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}+\int\limits_{x_{0j}^{(1)}+\theta d_j}^{+\infty}\frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(1)}\big)^2}\Bigg)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2A_3h_{\max}^{\beta}}{\theta d_j}\leqslant\frac{2A_3(b-a)h_{\max}^{\beta}}{\theta\big(b-x_{0j}^{(1)}\big)\big(x_{0j}^{(1)}-a\big)}.$$

Объединяя результаты для I_1, $I_{2,1}$ и $I_{2,2}$, выводим оценку точности (21) квадратурной формулы (23). Доказательство оценки точности (22) квадратурной формулы (24) проводится аналогично. Теорема доказана.

6. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим теперь вопрос применимости квадратурных формул (23) и (24) к численному решению интегрального уравнения

$$\int\limits_a^b \frac{g(x)\,dx}{(x-x_0)^2} = f(x_0), \quad x_0 \in (a,b). \tag{25}$$

Будем считать, что его решение лежит в пространстве функций g, производные которых удовлетворяют условию $g' \in PH^*_{(a,b)}(\alpha)$.

Запишем это уравнение в операторной форме:

$$Ag = f. \tag{26}$$

Пусть задано разбиение отрезка $[a,b]$ на N произвольных частей последовательностью точек $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_N < x_{N+1} = b$, которое будем обозначать как E^{N+1}. Ему соответствует последовательность точек коллокации $E_0^{2N} = (x_{01}^{(1)}, x_{01}^{(2)}, \ldots, x_{0N}^{(1)}, x_{0N}^{(2)})$, однозначно определяемых соотношениями (15)–(18). Выберем такие разбиения E^{N+1}, что точки разрыва функции g принадлежат узлам E^{N+1}.

Введём операторы дискретизации в пространствах оригинала и образа оператора A из уравнения (26):

$$T_{2N}g = (g(x_1^+), g(x_2^-), g(x_2^+), \ldots, g(x_N^-), g(x_N)^+, g(x_{N+1}^-))^T,$$

$$T'_{2N}f = (f(x_{01}^{(1)}), f(x_{01}^{(2)}), \ldots, f(x_{0N}^{(1)}), f(x_{0N}^{(2)}))^T.$$

Будем искать приближённое решение уравнения (26) в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$A_{2N}\bar{g}_{2N} = T'_{2N}f, \tag{27}$$

где

$$\bar{g}_{2N} = (g_1, \ldots, g_{2N})^T, \quad A_{2N} = \{a_{p,q}\}, \quad p,q = \overline{1,2N},$$

$$a_{2j+m-2,2j+m-2} = \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{\big(x - x_{0j}^{(m)}\big)^2}, \quad a_{2j-1,2j} = a_{2j,2j-1} = 0,$$

$$a_{2j+m-2,k} = \begin{cases} \alpha_{j,l}^{(m)} \displaystyle\int\limits_{x_l}^{x_{l+1}} \frac{dx}{\big(x - x_{0j}^{(m)}\big)^2}, & k = 2l-1, \\ \beta_{j,l}^{(m)} \displaystyle\int\limits_{x_l}^{x_{l+1}} \frac{dx}{\big(x - x_{0j}^{(m)}\big)^2}, & k = 2l, \end{cases} \quad l \in \{1,\ldots,N\} \setminus \{j\}, \quad j = \overline{1,N}, \quad m = 1,2,$$

а коэффициенты $\alpha_{j,l}^{(1,2)}$ и $\beta_{j,l}^{(1,2)}$ определяются соотношениями (13), (14).

Обозначим конечномерные пространства, в которых действует оператор A_{2N}, как X_{2N} и Y_{2N}, т.е.

$$X_{2N} \xrightarrow{A_{2N}} Y_{2N}.$$

Введём следующие нормы в пространствах X_{2N} и Y_{2N}:

$$\|\bar{g}_{2N}\|_{X_{2N}} = \max_{i=\overline{1,2N}} \{|g_i|\},$$

$$\|\bar{f}_{2N}\|_{Y_{2N}} = \max_{i=\overline{1,N}} \big\{ \big(x_{0i}^{(1)} - a\big)\big(b - x_{0i}^{(1)}\big)|f_{2i-1}|, \big(x_{0i}^{(2)} - a\big)\big(b - x_{0i}^{(2)}\big)|f_{2i}| \big\}.$$

Справедлива следующая

Теорема 5. *Для оператора A_{2N} справедливо неравенство*

$$\|A_{2N}\bar{g}_{2N}\|_{Y_{2N}} \geqslant (b-a)\|\bar{g}_{2N}\|_{X_{2N}}.$$

Доказательство. В первую очередь отметим, что матрица оператора A_{2N} имеет диагональное преобладание. Действительно,

$$a_{2j-2+m,2j-2+m} = \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(m)}\big)^2} = \frac{1}{x_{0j}^{(m)}-x_{j+1}} - \frac{1}{x_{0j}^{(m)}-x_j} < 0, \quad j=\overline{1,N}, \quad m=1,2,$$

т.е. диагональные элементы строго отрицательны. Внедиагональные элементы неотрицательны, так как равны нулю или являются интегралом от положительной функции. Кроме того, сумма элементов строки матрицы отрицательна, так как

$$\sum_{k=1}^{N} a_{2j+m-2,k} = \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(m)}\big)^2} + \sum_{l=1,\, l\neq j}^{N} \Bigg[\alpha_{j,l}^{(m)} \int\limits_{x_l}^{x_{l+1}} \frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(m)}\big)^2} + \beta_{j,l}^{(m)} \int\limits_{x_l}^{x_{l+1}} \frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(m)}\big)^2}\Bigg] =$$

$$= \sum_{l=1}^{N} \int\limits_{x_l}^{x_{l+1}} \frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(m)}\big)^2} = \int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{\big(x-x_{0j}^{(m)}\big)^2} = \frac{1}{x_{0j}^{(m)}-b} - \frac{1}{x_{0j}^{(m)}-a} = -\frac{b-a}{\big(x_{0j}^{(m)}-a\big)\big(b-x_{0j}^{(m)}\big)} < 0,$$

поэтому

$$\sum_{\substack{k=1\\ k\neq 2j+m-2}}^{2N} |a_{2j+m-2,k}| < |a_{2j+m-2,2j+m-2}|, \quad j=\overline{1,N}, \quad m=1,2.$$

Выберем теперь такие j^* и m^*, что значение $|g_{2j^*+m^*-2}|$ максимально, тогда

$$\|A_{2N}\bar{g}_{2N}\|_{Y_{2N}} \geqslant \big(x_{0j^*}^{(m^*)}-a\big)\big(b-x_{0j^*}^{(m^*)}\big)\Bigg|\sum_{k=1}^{N} g_k a_{2j^*+m^*-2,k}\Bigg| \geqslant$$

$$\geqslant \big(x_{0j^*}^{(m^*)}-a\big)\big(b-x_{0j^*}^{(m^*)}\big)|g_{2j^*+m^*-2}|\Bigg(|a_{2j^*+m^*-2,k}| - \sum_{\substack{k=1\\ k\neq 2j^*+m^*-2}}^{2N} |a_{2j^*+m^*-2,k}|\Bigg) =$$

$$= \big(x_{0j^*}^{(m^*)}-a\big)\big(b-x_{0j^*}^{(m^*)}\big)\|\bar{g}_{2N}\|_{X_{2N}}\Bigg(-\sum_{k=1}^{2N} a_{2j^*+m^*-2,k}\Bigg) = (b-a)\|\bar{g}_{2N}\|_{X_{2N}}.$$

Теорема доказана.

Сформулируем теперь утверждение относительно оценки точности приближённого решения уравнения (25).

Теорема 6. *Пусть задано точное решение $g(x)$ уравнения (25), производная которого удовлетворяет условию $g' \in PH^*_{(a,b)}(\alpha)$. На отрезке (a,b) задано разбиение E^{N+1}, удовлетворяющее условию (20), тогда справедлива следующая оценка точности приближённого решения, полученного из уравнения (27):*

$$\|\bar{g}_{2N} - T_{2N}g\|_{X_{2N}} \leqslant Ch_{\max}^{\beta}, \quad \beta = \min\{\alpha, \lambda, \mu\}. \tag{28}$$

Доказательство. По результатам теорем 4, 5 получим

$$\|\bar{g}_{2N}-T_{2N}g\|_{X_{2N}} \leqslant \frac{\|A_{2N}\bar{g}_{2N}-T_{2N}g\|_{Y_{2N}}}{b-a} = \frac{\|T'_{2N}Ag-T_{2N}g\|_{Y_{2N}}}{b-a} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{b-a}\max_{j=\overline{1,N},\, m=1,2}\left\{\left(x_{0j}^{(m)}-a\right)\left(b-x_{0j}^{(m)}\right)\frac{C_m h_{\max}^{\beta}}{\left(x_{0j}^{(m)}-a\right)\left(b-x_{0j}^{(m)}\right)}\right\} \leqslant Ch_{\max}^{\beta}.$$

Теорема доказана.

7. ПРИМЕР РАСЧЁТА

В качестве примера рассмотрим численное решение уравнения (6). Положим, что особая точка правой части $q=0$. Разобьём отрезок интегрирования $[-1,1]$ так, что отрезок $[-1,0]$ разбивается на N_1 равных частей, а отрезок $[0,1]$ — на N_2 равных частей. При $N_1 \neq N_2$ получим нарушение равномерности разбиения в точке особенности $q=0$. Сравнительный анализ приближённого и точного решений приведён на рисунке при $N_1=20$ и $N_2=40$.

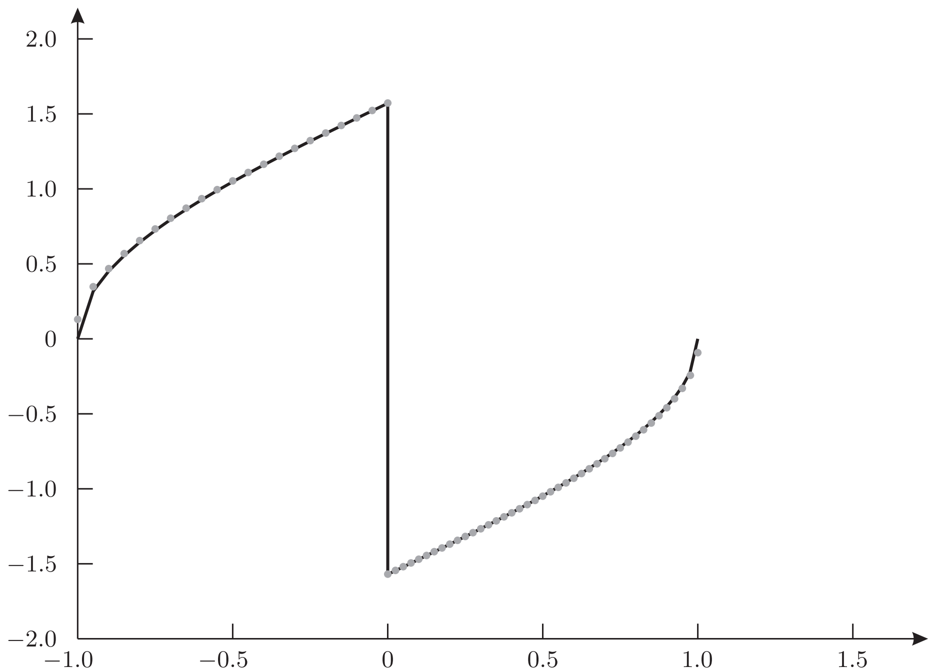

Рисунок. Точное решения уравнения (6) (линия) и приближённые значения, полученные на основе численного решения (точки)

Полученные результаты подтверждают эффективность применения предложенной численной схемы на неравномерных разбиениях в приложении к функциям, имеющим разрыв первого рода.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по соглашению № 075-10-2021-093.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лифанов, И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн / И.К. Лифанов. — М. : ТОО “Янус”, 1995. — 519 с.
2. Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Наука, 1968. — 511 с.
3. Дворак, А.В. Модифицированный метод дискретных вихрей для решения сингулярных интегральных уравнений на отрезке / А.В. Дворак, Е.М. Ивенина, С.В. Филимонов // Науч. вестн. Моск. гос. техн. ун-та гражданской авиации. — 2011. — С. 103–106.
4. Сетуха, А.В. Сходимость численного метода решения гиперсингулярного интегрального уравнения на отрезке с применением кусочно-линейных аппроксимаций на неравномерной сетке / А.В. Сетуха // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 2. — С. 237–249.
5. Ненашев, А.С. Модификация метода дискретных особенностей для неравномерных сеток в приложении к одномерным интегральным уравнениям с сильной особенностью в ядре / А.С. Ненашев // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 8. — С. 1078–1089.
6. Лифанов, И.К. Гиперсингулярные интегральные уравнения и теория проволочных антенн / И.К. Лифанов, А.С. Ненашев // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 1. — С. 121–137.
7. Лифанов И.К. Исследование некоторых вычислительных схем для гиперсингулярного интегрального уравнения на отрезке / И.К. Лифанов, А.С. Ненашев // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 9. — С. 1270–1275.
8. Шилов, Г.Е. Математический анализ. Спец. курс / Г.Е. Шилов. — 2-е изд. — М. : Физматгиз, 1961. — 436 с.

A TWO-POINT COLLOCATION METHOD FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATIONS ON NONUNIFORM PARTITIONS

A. S. Nenashev

Sirius University of Science and Technology, Krasnodar region, “Sirius” Federal Territory, Russia
Marchuk Institute of Numerical Mathematics of RAS, Moscow, Russia
e-mail: nenashev.as@talantiuspeh.ru, nenashev_ as@mail.ru

A quadrature formula has been constructed for calculating the hypersingular integral over a segment, which uses the ends of the segment partition intervals as nodes of piecewise constant interpolation of the integral density, as well as specially selected collocation points. A distinctive feature of the proposed quadrature formula is the ability to calculate the integral of functions that suffer a finite number of discontinuities of the first kind on the integration interval. On the basis of quadrature formula constructed, a numerical scheme for solving the characteristic hypersingular integral equation on non-regular grid is developed. Estimate of the rate of convergence of approximate solutions to exact ones is proved in the class of piecewise Hölder functions.

Keywords: numerical method, hypersingular integral, integral equation, quadrature formula

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under agreement no. 075-10-2021-093.

REFERENCES

1. Lifanov, I.K., *Singular Integral Equations and Discrete Vortices*, VSP, 1996.
2. Muskhelishvili, N.I., *Singulyarnye integral'nye uravnenija* (Singular Integral Equations), Moscow: Nauka, 1968.
3. Dvorak, A.V., Ivenina, E.M., and Filimonov, S.V., Modified discrete vortices method for singular integral equation on an interval, *Civil Aviation High Technologies*, 2011, pp. 103–106.

4. Setuha, A.V., Convergence of a numerical method for solving a hypersingular integral equation on a segment with the use of piecewise linear approximations on a nonuniform grid, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 2, pp. 234–247.
5. Nenashev, A.S., Modification of the discrete singularity method for nonuniform grids as applied to one-dimensional integral equations with a strong singularity in the kernel, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 8, pp. 1070–1081.
6. Lifanov, I.K. and Nenashev, A.S., Hypersingular integral equations and the theory of wire antennas, *Differ. Equat.*, 2005, vol. 41, no. 1, pp. 126–145.
7. Lifanov, I.K. and Nenashev, A.S., Analysis of some computational schemes for a hypersingular integral equation on an interval, *Differ. Equat.*, 2005, vol. 41, no. 9, pp. 1343–1348.
8. Shilov, G.E., *Matematicheskij analiz. Special'nyj kurs* (Mathematical Analysis. Special Course), Moscow: Fizmatgiz, 1961.