

УДК 519.624

## ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ПУАНКАРЕ–СТЕКЛОВА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПОКРЫТИЕМ

© 2024 г. А. А. Бобылев

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*

*e-mail: abobylov@gmail.com*

*Поступила в редакцию 08.06.2024 г., после доработки 08.06.2024 г.; принята к публикации 02.07.2024 г.*

Рассматривается оператор Пуанкаре–Стеклова для однородной изотропной упругой полуплоскости со стратифицированным упругим покрытием, отображающий на части границы покрытия нормальные напряжения в нормальные перемещения. Для построения передаточной функции этого оператора используется вариационная формулировка краевой задачи для трансформант перемещений. Дается определение и доказываются существование и единственность обобщенного решения вариационной задачи. Аппроксимация этой задачи проводится методом конечных элементов. Для численного решения полученной системы линейных алгебраических уравнений используется предобусловленный метод сопряженных градиентов. Проводится верификация разработанного вычислительного алгоритма.

*Ключевые слова:* оператор Пуанкаре–Стеклова, передаточная функция, упругая полуплоскость, стратифицированное покрытие

DOI: 10.31857/S0374064124090069, EDN: JWXCD0

### ВВЕДЕНИЕ

Одним из направлений повышения триботехнических характеристик материалов является использование покрытий, представляющих собой гетерогенные структуры (композиты) с изменяющимся по глубине фазовым составом и, как следствие, физико-механическими свойствами. При исследовании локального контактного взаимодействия тел с покрытиями в качестве расчётной схемы, как правило, выбирается упругая полоса или слой, сцепленные с основанием. Подробный обзор основных результатов для неоднородных покрытий, лежащих на деформируемом основании, приведён в монографии [1, введение].

Необходимость учёта поверхностного микрорельефа контактирующих тел в виде волнистости или шероховатости приводит к постановке задач дискретного (множественного) контакта. В работе [2] рассмотрены задачи одностороннего дискретного контакта для однородной упругой полуплоскости, а в [3] — для однородной упругой полосы, сцепленной с недеформируемым основанием. С использованием оператора Пуанкаре–Стеклова (ОПС) получены вариационные формулировки этих задач в виде граничных вариационных неравенств и задач минимизации граничных функционалов, при численном решении которых требуется дискретизировать только часть границы области — зону возможного контакта, что существенно уменьшает размерность получаемых дискретных задач и снижает вычислительные затраты.

Для упругой области ОПС  $Q: q_n \mapsto u_n$ , отображающий на части  $\Gamma_q$  границы (в зоне возможного контакта) нормальные напряжения  $q_n$  в нормальные перемещения  $u_n$ , имеет вид

$$u_n(x_1) = \int_{\Gamma_q} g(x_1 - \xi_1) q_n(\xi_1) d\xi_1, \quad (1)$$

где  $g(\cdot)$  — функция Грина. Получить представление этой функции в явном виде во многих случаях (в частности, для упругой полуплоскости со стратифицированным упругим покрытием) весьма затруднительно.

Учитывая, что правая часть равенства (1) является интегральным оператором типа свёртки, с помощью интегрального преобразования Фурье можно получить алгебраическое соотношение, связывающее трансформанты нормальных перемещений  $\tilde{u}_n(\alpha)$  и нормальных напряжений  $\tilde{q}_n(\alpha)$ :

$$\tilde{u}_n(\alpha) = G(\alpha) \tilde{q}_n(\alpha), \quad (2)$$

где  $\alpha$  — параметр преобразования Фурье,  $G(\alpha) = \tilde{g}(\alpha)$  — трансформанта функции Грина. Функцию  $G(\alpha)$ , следуя [4], будем называть *передаточной функцией*. Действие ОПС сводится к выполнению прямого и обратного преобразований Фурье и перемножению трансформант.

Анализ известных подходов к построению передаточных функций ОПС для неоднородных упругих полос приведён в статье [5], там же предложен новый алгоритм вычисления передаточной функции, основанный на использовании вариационной формулировки краевой задачи для трансформант перемещений. Аппроксимация вариационных уравнений проводится методом конечных элементов. Для численного решения задачи применяется линейный одношаговый нестационарный итерационный метод, на каждом шаге которого методом прогонки решаются две системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трёхдиагональными матрицами. Предложен эвристический алгоритм выбора последовательности параметров итерационного метода, обеспечивающий сходимость итерационного процесса для любых значений параметра  $\alpha$  преобразования Фурье. Разработанный в [5] вычислительный алгоритм использован при решении задач одностороннего дискретного контакта для многослойных [6] и функционально-градиентных [7] упругих полос, сцепленных с недеформируемым основанием.

Цель данной работы — обобщить алгоритм [5] на случай стратифицированной упругой полосы, сцепленной с однородной изотропной упругой полуплоскостью.

Постановка краевой задачи теории упругости, с помощью решения которой определяется ОПС, дана в п. 1. Краевая задача для трансформант перемещений, полученная в результате применения преобразования Фурье, приведена в п. 2. В п. 3 получена её вариационная формулировка, дано определение и доказаны существование и единственность обобщённого решения. Аппроксимация вариационной задачи методом конечных элементов приведена в п. 4. Для решения полученной СЛАУ в п. 5 предложен разработанный алгоритм предобусловленного метода сопряжённых градиентов (MSG), учитывающий структуру матрицы СЛАУ. Результаты верификации разработанного вычислительного алгоритма приведены в п. 6.

## 1. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Сформулируем краевую задачу, с помощью которой вводится исследуемый ОПС. Пусть невесомая однородная изотропная упругая полуплоскость в неподвижной прямоугольной декартовой системе координат  $Ox_1x_2$  занимает область  $\Omega_0 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \leq 0\}$ . По всей своей границе  $\Gamma_0$  полуплоскость сцеплена с покрытием — стратифицированной упругой полосой толщины  $h$ , занимающей область  $\Omega_1 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1 \in \mathbb{R}, 0 \leq x_2 \leq h\}$ .

Границу полосы  $x_2 = h$  обозначим через  $\Gamma_1$ . Параметры Ламе  $\lambda_0$  и  $\mu_0$  материала полуплоскости являются постоянными в  $\Omega_0$ , а параметры Ламе материала полосы — произвольными ограниченными функциями координаты  $x_2$ :  $\lambda_1 = \lambda_1(x_2)$  и  $\mu_1 = \mu_1(x_2)$ . Требования к гладкости этих функций будут сформулированы ниже. Из физических соображений следует, что существуют постоянные  $\lambda^* > 0$  и  $\mu^* > 0$  такие, что

$$\lambda_0 \geq \lambda^*, \quad \mu_0 \geq \mu^*, \quad \lambda_1(x_2) \geq \lambda^*, \quad \mu_1(x_2) \geq \mu^*, \quad 0 \leq x_2 \leq h. \quad (3)$$

Под  $u_i^{(n)}(\mathbf{x})$ ,  $\sigma_{ij}^{(n)}(\mathbf{x})$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $n = 0, 1$ , будем понимать, соответственно, компоненты вектора перемещений и тензора напряжений в точке  $\mathbf{x} \in \Omega_n$ . Для упрощения обозначений всюду, где это возможно, говоря о параметрах, относящихся к конкретной области  $\Omega_n$ , будем опускать индекс, указывающий на эту область.

Предполагается, что полуплоскость и полоса находятся в условиях плоской деформации, деформации малы, а массовые силы и напряжения в недеформированном состоянии отсутствуют. Напряжённо-деформированное состояние областей  $\Omega_n$  описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)u_{1,1} + \lambda u_{2,2}, & \sigma_{22} &= \lambda u_{1,1} + (\lambda + 2\mu)u_{2,2}, & \sigma_{12} &= \mu(u_{1,2} + u_{2,1}), \\ \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} &= 0, & \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} &= 0 & \text{в } \Omega_n, & n = 0, 1. \end{aligned} \quad (4)$$

На части границы полосы  $\Gamma_q \subset \Gamma_1$  приложена нормальная нагрузка:

$$\sigma_{22} = q, \quad \sigma_{21} = 0 \quad \text{на } \Gamma_q. \quad (5)$$

Остальная часть границы  $\Gamma_1$  свободна от внешних нагрузок:

$$\sigma_{22} = \sigma_{21} = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \setminus \Gamma_q. \quad (6)$$

Предполагается, что участок  $\Gamma_q$  границы является конечным, а главный вектор внешних усилий отличен от нуля и имеет ограниченную величину:

$$\text{diam } \Gamma_q < \infty, \quad 0 < \left| \int_{\Gamma_q} q d\Gamma_q \right| < +\infty. \quad (7)$$

Условия полного сцепления полуплоскости и полосы имеют вид

$$u_1^{(0)} = u_1^{(1)}, \quad u_2^{(0)} = u_2^{(1)}, \quad \sigma_{12}^{(0)} = \sigma_{12}^{(1)}, \quad \sigma_{22}^{(0)} = \sigma_{22}^{(1)} \quad \text{на } \Gamma_0. \quad (8)$$

Для выделения класса единственности решения в рассматриваемой краевой задаче необходимо наложить дополнительные условия на поведение решения на бесконечности и на сцепления полуплоскости с покрытием как жёсткого целого.

В работе [8, § 90] для упругой полуплоскости рассмотрен случай, когда на бесконечности напряжения и вращение стремятся к нулю. Показано, что эти условия обеспечивают единственность поля напряжений. Если при этом отсутствуют массовые силы, а главный вектор внешних поверхностных усилий имеет ограниченную величину и отличен от нуля, то напряжения и соответствующие им перемещения имеют асимптотические представления

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad u_i(\mathbf{x}) = O(\ln |\mathbf{x}|), \quad i, j = 1, 2, \quad \text{при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Смещения  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  полуплоскости с покрытием как жёсткого целого находятся как

$$v_1(\mathbf{x}) = \lambda_1 - \omega x_2, \quad v_2(\mathbf{x}) = \lambda_2 + \omega x_1, \quad (10)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — компоненты поступательного перемещения,  $\omega$  — поворот полуплоскости как жёсткого целого. Для соответствия со случаем, рассмотренным в [8, § 90], положим

$$\omega = 0. \quad (11)$$

2. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРАНСФОРМАНТ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Аналогично [5] сформулируем краевую задачу для трансформант перемещений упругой полосы, решение которой используется для вычисления передаточной функции ОПС.

Введём преобразования Фурье от компонент перемещений и напряжений по формулам

$$\tilde{u}_k(\alpha, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_k(x_1, x_2) \exp\{-i\alpha x_1\} dx_1, \quad \tilde{\sigma}_{kl}(\alpha, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{kl}(x_1, x_2) \exp\{-i\alpha x_1\} dx_1. \quad (12)$$

Будем полагать, что все выполняемые далее преобразования Фурье (12) существуют.

Умножим уравнения (4) для области  $\Omega_1$  на  $\exp\{-i\alpha x_1\}$  и проинтегрируем по  $x_1$  на всей числовой прямой. В результате получим систему равенств, которые после интегрирования по частям превращаются в следующую систему соотношений относительно трансформант  $\tilde{u}_k, \tilde{\sigma}_{kl}$  и их производных, рассматриваемых как функции переменной  $x_2$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11} &= i\alpha(\lambda + 2\mu)\tilde{u}_1 + \lambda\tilde{u}'_2, & \tilde{\sigma}_{12} &= \mu(\tilde{u}'_1 + i\alpha\tilde{u}_2), & \tilde{\sigma}_{22} &= i\alpha\lambda\tilde{u}_1 + (\lambda + 2\mu)\tilde{u}'_2, \\ i\alpha\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{\sigma}'_{12} &= 0, & i\alpha\tilde{\sigma}_{12} + \tilde{\sigma}'_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Исключив из полученной системы трансформанты напряжений  $\tilde{\sigma}_{kl}$ , сделав замену

$$\tilde{u}_1(\alpha, x_2) = v_1(\alpha, x_2), \quad \tilde{u}_2(\alpha, x_2) = iv_2(\alpha, x_2) \quad (14)$$

и положив, что

$$\lambda(x_2) \in C^1[0, h], \quad \mu(x_2) \in C^1[0, h], \quad (15)$$

получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для трансформант перемещений упругой полосы:

$$-(\mu v'_1)' + \alpha(\mu v_2)' + \alpha\lambda v'_2 + \alpha^2(\lambda + 2\mu)v_1 = 0, \quad -((\lambda + 2\mu)v'_2)' - \alpha(\lambda v_1)' - \alpha\mu v'_1 + \alpha^2\mu v_2 = 0. \quad (16)$$

Применим далее преобразование Фурье к граничным условиям (5), (6), предполагая существование преобразования Фурье для тривиального продолжения функции  $q(x_1)$  на  $\Gamma_1$ :

$$\tilde{q}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(x_1) \exp\{-i\alpha x_1\} dx_1. \quad (17)$$

В результате с учётом (13)–(15) получим краевые условия для системы (16) в точке  $x_2 = h$ :

$$\mu v'_1 - \alpha\mu v_2 = 0, \quad -(\lambda + 2\mu)v'_2 - \alpha\lambda v_1 = p, \quad (18)$$

где

$$p(\alpha) = i\tilde{\sigma}_{22}(\alpha, h) = i\tilde{q}(\alpha). \quad (19)$$

Далее сформулируем краевые условия в точке  $x_2 = 0$ . Для этого используем условия (8) и соотношения, связывающие компоненты перемещений и напряжений на границе  $\Gamma_0$  упругой полуплоскости  $\Omega_0$  [9, § 2.4]:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, 0) &= -\frac{S_1}{\pi} \int_{\Gamma_0} \sigma_{12}(\xi_1, 0) \ln|x_1 - \xi_1| d\xi_1 + S_2 \int_{\Gamma_0} \sigma_{22}(\xi_1, 0) \operatorname{sgn}(x_1 - \xi_1) d\xi_1 + \lambda_1, \\ u_2(x_1, 0) &= -\frac{S_1}{\pi} \int_{\Gamma_0} \sigma_{22}(\xi_1, 0) \ln|x_1 - \xi_1| d\xi_1 - S_2 \int_{\Gamma_0} \sigma_{12}(\xi_1, 0) \operatorname{sgn}(x_1 - \xi_1) d\xi_1 + \lambda_2, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$S_1 = (\lambda_0 + 2\mu_0)/(2\mu_0(\lambda_0 + \mu_0)), \quad S_2 = 1/(4(\lambda_0 + \mu_0)).$$

Отметим, что соотношения (20) записаны с учётом (11).

Применим к равенствам (20) преобразование Фурье, полагая  $\alpha \neq 0$ . В результате получим алгебраические соотношения, связывающие трансформанты компонент перемещений и напряжений в точке  $x_2 = 0$ :

$$\tilde{u}_1 = S_1 \tilde{\sigma}_{12}/|\alpha| + 2iS_2 \tilde{\sigma}_{22}/\alpha, \quad \tilde{u}_2 = S_1 \tilde{\sigma}_{22}/|\alpha| - 2iS_2 \tilde{\sigma}_{12}/\alpha,$$

которые можно разрешить относительно трансформант напряжений:

$$\tilde{\sigma}_{12} = S_3 \tilde{u}_1 |\alpha| - iS_4 \tilde{u}_2 \alpha, \quad \tilde{\sigma}_{22} = S_3 \tilde{u}_2 |\alpha| + iS_4 \tilde{u}_1 \alpha,$$

где

$$S_3 = 2\mu_0(\lambda_0 + 2\mu_0)/(\lambda_0 + 3\mu_0), \quad S_4 = 2\mu_0^2/(\lambda_0 + 3\mu_0). \quad (21)$$

Используя далее (13)–(15), получим краевые условия для системы (16) в точке  $x_2 = 0$ :

$$\mu v_1' - \alpha \mu v_2 = |\alpha| S_3 v_1 + \alpha S_4 v_2, \quad (\lambda + 2\mu) v_2' + \alpha \lambda v_1 = |\alpha| S_3 v_2 + \alpha S_4 v_1. \quad (22)$$

Следовательно, справедлива

**Теорема 1.** Если существуют преобразования Фурье (12) и (17), а также выполняются условия (15), то трансформанты компонент перемещений в области  $\Omega_1$  решения краевой задачи (3)–(11) с учётом (14) удовлетворяют краевой задаче (16), (18), (22).

**Определение 1.** Решение краевой задачи (16), (18), (22), принадлежащее классу функций  $[C^2(0, h)]^2 \cap [C^1[0, h]]^2$ , называют классическим решением.

**Лемма 1.** Передаточная функция  $G(\alpha)$  для  $\alpha \neq 0$  вычисляется с помощью решения краевой задачи (16), (18), (22) по формуле

$$G(\alpha) = -v_2(\alpha, h)/p(\alpha). \quad (23)$$

**Доказательство.** Выражение (23) следует из формул (2), (14), (17)–(19).

**Следствие 1.** Передаточная функция  $G(\alpha)$  является вещественной функцией.

**Замечание.** Случай  $\alpha = 0$  в данной работе не рассматривается. Известно [10, § 6.5], что для упругой полуплоскости при  $\alpha \rightarrow 0$  передаточная функция  $G(\alpha) \rightarrow \infty$ . Вычислительные аспекты этого случая подробно рассмотрены, например, в работе [11].

### 3. ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Переход к вариационной формулировке позволяет определить обобщённое решение задачи и ослабить требования (15) к гладкости исходных данных  $\{\lambda(x_2), \mu(x_2)\}$ . Далее будем полагать, что

$$\lambda(x_2) \in L_\infty(0, h), \quad \mu(x_2) \in L_\infty(0, h). \quad (24)$$

Вектор-функции  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  трансформант перемещений будем считать элементами функционального пространства  $\mathbf{U} = U \times U$ , где  $U \equiv W_2^1(0, h)$  — пространство Соболева. Пространство  $\mathbf{U}$  является гильбертовым относительно скалярного произведения

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_{\mathbf{U}} = (v_1, w_1)_U + (v_2, w_2)_U, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2), \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbf{U}.$$

Введём на  $U$  билинейные и линейную формы

$$\begin{aligned} a_1(v, w) &= [\mu v', w'] + \alpha^2[(\lambda + 2\mu)v, w], & a_2(v, w) &= [(\lambda + 2\mu)v', w'] + \alpha^2[\mu v, w], \\ b_1(v, w) &= \alpha[\mu v, w'] - \alpha[\lambda v', w], & b_2(v, w) &= \alpha[\mu v', w] - \alpha[\lambda v, w'], \\ s_3(v, w) &= |\alpha|S_3v(0)w(0), & s_4(v, w) &= \alpha S_4v(0)w(0), & l_2(w) &= -p(\alpha)w(h), \end{aligned}$$

где  $[\cdot, \cdot]$  — стандартное скалярное произведение в пространстве  $L_2(0, h)$ .

**Лемма 2.** Для любого фиксированного  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ , при выполнении условий (3) и (24) билинейные формы  $a_1(\cdot, \cdot)$  и  $a_2(\cdot, \cdot)$  являются непрерывными и положительно определёнными на  $U$ .

**Доказательство.** Симметричность билинейных форм очевидна, непрерывность несложно показать, используя условие (24), а коэрцитивность — неравенства (3).

**Лемма 3.** Для любого фиксированного  $\alpha \in \mathbb{R}$  при выполнении условий (24) билинейные формы  $b_1(\cdot, \cdot)$  и  $b_2(\cdot, \cdot)$  являются непрерывными на  $U$ .

**Доказательство.** Непрерывность билинейных форм можно показать, используя условие (24), неравенство Коши–Буняковского и неравенство  $rs \leq (r^2 + s^2)/2$ ,  $r, s \in \mathbb{R}$ .

**Лемма 4.** Если существует преобразование Фурье (17), то линейная форма  $l_2(\cdot)$  непрерывна на  $U$ .

**Доказательство** следует из теоремы вложения Соболева  $(W_2^1(0, h) \hookrightarrow C[0, h])$  [12, § 9].

**Лемма 5.** Для любого фиксированного  $\alpha \in \mathbb{R}$  при выполнении условий (3) билинейные формы  $s_3(\cdot, \cdot)$  и  $s_4(\cdot, \cdot)$  являются симметричными и непрерывными на  $U$ .

**Доказательство.** Симметричность билинейных форм очевидна, а непрерывность следует из теоремы вложения Соболева  $(W_2^1(0, h) \hookrightarrow C[0, h])$ .

**Лемма 6.** Для любого фиксированного  $\alpha \in \mathbb{R}$  при выполнении условий (3) билинейная форма  $s_3(\cdot, \cdot)$  является неотрицательно определённой на  $U$ .

**Доказательство** следует из выполнения условий (3) и (21).

Рассмотрим далее вариационную задачу: для фиксированного  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ , найти вектор-функцию  $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in U$ , удовлетворяющую системе вариационных уравнений

$$\begin{aligned} a_1(v_1, w_1) - b_1(v_2, w_1) + s_3(v_1, w_1) + s_4(v_2, w_1) &= 0 \quad \text{для любого } w_1 \in U, \\ a_2(v_2, w_2) - b_2(v_1, w_2) + s_3(v_2, w_2) + s_4(v_1, w_2) - l_2(w_2) &= 0 \quad \text{для любого } w_2 \in U. \end{aligned} \quad (25)$$

**Теорема 2.** Классическое решение  $(v_1, v_2)$  краевой задачи (16), (18), (22) является решением вариационной задачи (25).

**Доказательство.** Пусть  $w_1$  и  $w_2$  — две произвольные функции из пространства  $U$ . Умножим уравнения (16), соответственно, на  $w_1$  и  $w_2$  и далее проинтегрируем по отрезку  $[0, h]$ :

$$\begin{aligned} - \int_0^h (\mu v_1')' w_1 dx_2 + \alpha \int_0^h (\mu v_2)' w_1 dx_2 + \alpha \int_0^h \lambda v_2' w_1 dx_2 + \alpha^2 \int_0^h (\lambda + 2\mu) v_1 w_1 dx_2 &= 0, \\ - \int_0^h ((\lambda + 2\mu) v_2')' w_2 dx_2 - \alpha \int_0^h (\lambda v_1)' w_2 dx_2 - \alpha \int_0^h \mu v_1' w_2 dx_2 + \alpha^2 \int_0^h \mu v_2 w_2 dx_2 &= 0. \end{aligned}$$

Первые два интеграла в каждом из полученных уравнений возьмём по частям:

$$\int_0^h \mu v_1' w_1' dx_2 - \alpha \int_0^h \mu v_2 w_1' dx_2 + \alpha \int_0^h \lambda v_2' w_1 dx_2 + \alpha^2 \int_0^h (\lambda + 2\mu) v_1 w_1 dx_2 + [(-\mu v_1' + \alpha \mu v_2) w_1] \Big|_0^h = 0,$$

$$\int_0^h (\lambda + 2\mu)v_2'w_2' dx_2 + \alpha \int_0^h \lambda v_1 w_2' dx_2 - \alpha \int_0^h \mu v_1' w_2 dx_2 + \alpha^2 \int_0^h \mu v_2 w_2 dx_2 - [((\lambda + 2\mu)v_2' + \alpha \lambda v_1)w_2] \Big|_0^h = 0,$$

откуда с учётом краевых условий (18) и (22) получим вариационные уравнения (25). Теорема доказана.

**Определение 2.** Решение вариационной задачи (25) называют *обобщённым решением краевой задачи* (16), (18), (22).

Используя известные приёмы [13, § 2.14], можно показать, что справедлива

**Теорема 3.** *Решение вариационной задачи (25), если оно существует и обладает вторыми производными (хотя бы обобщёнными), удовлетворяет (почти всюду) уравнениям (16) и краевым условиям (18), (22).*

Образует на  $\mathbf{U}$  билинейные и линейную формы

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= a_1(v_1, w_1) + a_2(v_2, w_2), & b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= b_1(v_2, w_1) + b_2(v_1, w_2), \\ s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= s_3(v_1, w_1) + s_3(v_2, w_2) + s_4(v_1, w_2) + s_4(v_2, w_1), & l(\mathbf{w}) &= l_2(w_2). \end{aligned}$$

Используя леммы 2–4, несложно показать, что имеют место следующие утверждения.

**Лемма 7.** *Для любого фиксированного  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ , при выполнении условий (3) и (24) билинейная форма  $a(\cdot, \cdot)$  является непрерывной и положительно определённой на  $\mathbf{U}$ .*

**Лемма 8.** *Для любого фиксированного  $\alpha \in \mathbb{R}$  при выполнении условий (24) билинейная форма  $b(\cdot, \cdot)$  является непрерывной на  $\mathbf{U}$ .*

**Лемма 9.** *Если существует преобразование Фурье (17), то линейная форма  $l(\cdot)$  непрерывна на  $\mathbf{U}$ .*

Кроме того, справедлива

**Лемма 10.** *Для любого фиксированного  $\alpha \in \mathbb{R}$  при выполнении условий (3) билинейная форма  $s(\cdot, \cdot)$  является непрерывной симметричной и неотрицательно определённой на  $\mathbf{U}$ .*

**Доказательство.** Непрерывность и симметричность билинейной формы следуют из леммы 5, а неотрицательную определённость можно показать, используя условия (3) и неравенства

$$0 < S_{34} = 2S_4/S_3 = 2\mu_0/(\lambda_0 + 2\mu_0) < 1. \quad (26)$$

Лемма доказана.

Введём на  $\mathbf{U}$  билинейную форму

$$k(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (27)$$

и рассмотрим вариационную задачу: для фиксированного  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ , найти вектор-функцию  $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$ , удовлетворяющую вариационному уравнению

$$k(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - l(\mathbf{w}) = 0 \quad \text{для любого } \mathbf{w} \in \mathbf{U}. \quad (28)$$

**Лемма 11.** *Вариационное уравнение (28) эквивалентно системе уравнений (25).*

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  — решение системы уравнений (25). Сложив эти уравнения, получим с учётом (27) вариационное уравнение (28). Обратно, выбирая в (28)  $\mathbf{w} = (w_1, 0)$ , получаем первое уравнение (25), а выбирая  $\mathbf{w} = (0, w_2)$  — второе уравнение (25). Лемма доказана.

Разрешимость вариационной задачи (28) зависит от свойств билинейной формы  $k(\cdot, \cdot)$ . Покажем, что она является непрерывной и положительно определённой на  $\mathbf{U}$ .

Из лемм 7–10 следует

**Лемма 12.** Для любого фиксированного  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ , при выполнении условий (24) билинейная форма  $k(\cdot, \cdot)$  является непрерывной на  $U$ .

Непосредственно проверяется, что справедлива

**Лемма 13.** Билинейная форма  $k(\cdot, \cdot)$  является симметричной на  $U$ .

Для доказательства коэрцитивности билинейной формы  $k(\cdot, \cdot)$  на  $U$  потребуется ряд вспомогательных утверждений. Введём гильбертово пространство вектор-функций  $Y = [L_2(0, h)]^4$ , оснащённое скалярным произведением

$$(\hat{y}, \check{y})_Y = [\hat{y}_1, \check{y}_1] + [\hat{y}_2, \check{y}_2] + [\hat{y}_3, \check{y}_3] + [\hat{y}_4, \check{y}_4], \quad \hat{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \hat{y}_4), \quad \check{y} = (\check{y}_1, \check{y}_2, \check{y}_3, \check{y}_4) \in Y,$$

и определим оператор  $j: U \rightarrow Y$  такой, что  $jz = (z_1, z'_1, z_2, z'_2)$  для любого  $z = (z_1, z_2) \in U$ .

Зададим на  $Y$  билинейную форму

$$d(\hat{y}, \check{y}) = (D\hat{y}, \check{y})_Y, \tag{29}$$

где квадратная симметричная матрица-функция четвёртого порядка

$$D(x_2, \alpha) = \begin{bmatrix} \alpha^2(\lambda(x_2) + 2\mu(x_2)) & 0 & 0 & \alpha\lambda(x_2) \\ 0 & \mu(x_2) & -\alpha\mu(x_2) & 0 \\ 0 & -\alpha\mu(x_2) & \alpha^2\mu(x_2) & 0 \\ \alpha\lambda(x_2) & 0 & 0 & \lambda(x_2) + 2\mu(x_2) \end{bmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что справедлива

**Лемма 14.** Для любых  $\hat{z}, \check{z} \in U$  выполняется равенство

$$d(j\hat{z}, j\check{z}) = a(\hat{z}, \check{z}) - b(\hat{z}, \check{z}). \tag{30}$$

Матрицу-функцию  $D(x_2, \alpha)$  при фиксированных значениях  $x_2$  и  $\alpha$  можно рассматривать как квадратную симметричную матрицу четвёртого порядка с постоянными коэффициентами. Современные системы компьютерной алгебры позволяют аналитически вычислить её собственные значения и соответствующие им собственные векторы. В данной работе с помощью системы SageMath установлено, что справедлива

**Лемма 15.** При выполнении условий (3) и (24) матрица  $D(x_2, \alpha)$  для любого  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ , почти всюду на  $[0, h]$  имеет четыре вещественных собственных значения:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = [(1 + \alpha^2)(\lambda + 2\mu) - \kappa]/2, \quad \omega_3 = \mu(1 + \alpha^2), \quad \omega_4 = [(1 + \alpha^2)(\lambda + 2\mu) + \kappa]/2,$$

которым соответствуют ортонормированные собственные векторы

$$f_1 = (0, 1, 1/\alpha, 0)/\gamma_1, \quad f_2 = (1, 0, 0, \theta - \vartheta)/\gamma_2, \quad f_3 = (0, 1, -\alpha, 0)/\gamma_3, \quad f_4 = (1, 0, 0, \theta + \vartheta)/\gamma_4,$$

где

$$\begin{aligned} \kappa &= [(1 - \alpha^2)^2(\lambda + 2\mu)^2 + 4\alpha^2\lambda^2]^{1/2}, \quad \theta = (\lambda + 2\mu)(1 - \alpha^2)/(2\alpha\lambda), \quad \vartheta = \kappa/(2\alpha\lambda), \\ \gamma_1 &= (1 + \alpha^2)^{1/2}/\alpha, \quad \gamma_2 = (1 + (\theta - \vartheta)^2)^{1/2}, \quad \gamma_3 = (1 + \alpha^2)^{1/2}, \quad \gamma_4 = (1 + (\theta + \vartheta)^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

**Следствие 2.** Для любого  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ , собственные значения матрицы  $D(x_2, \alpha)$  ограничены почти всюду на  $[0, h]$  и удовлетворяют условиям

$$\omega_4 > \omega_3 \geq \omega_2 > \omega_1 = 0. \tag{31}$$

Введём квадратную матрицу-функцию  $\mathbf{F}(x_2, \alpha)$  четвёртого порядка, столбцами которой являются вектор-функции  $\mathbf{f}_n(x_2, \alpha)$ ,  $n = \overline{1, 4}$ . При фиксированных значениях  $x_2$  и  $\alpha$  её можно рассматривать как квадратную матрицу четвёртого порядка с постоянными коэффициентами. Из известных результатов линейной алгебры [14, гл. 7] следует, что справедлива

**Лемма 16.** Матрица  $\mathbf{F}(x_2, \alpha)$  для любого  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ , почти всюду на  $[0, h]$  является ортогональной, т.е.

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^T \quad \text{и} \quad \|\mathbf{F}\mathbf{r}\|_{\mathbb{E}^4} = \|\mathbf{r}\|_{\mathbb{E}^4} \quad \text{для любого} \quad \mathbf{r} \in \mathbb{E}^4,$$

где  $\mathbb{E}^4$  — евклидово пространство, и имеет место равенство

$$\mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F} = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4).$$

**Следствие 3.** Для любого  $\mathbf{r} \in \mathbb{E}^4$  и  $\mathbf{p} = \mathbf{F}^T \mathbf{r}$  выполняются равенства

$$(\mathbf{D}\mathbf{r}, \mathbf{r})_{\mathbb{E}^4} = (\mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F} \mathbf{p}, \mathbf{p})_{\mathbb{E}^4} = \omega_2 p_2^2 + \omega_3 p_3^2 + \omega_4 p_4^2. \tag{32}$$

**Лемма 17.** Пусть  $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  из условия

$$S_3 t_1^2 + 2S_4 t_1 t_2 + S_3 t_2^2 < \varepsilon \tag{33}$$

следует, что

$$t_i^2 < 2\varepsilon/S_3, \quad i = 1, 2. \tag{34}$$

**Доказательство.** Преобразуем условие (33) к виду

$$t_1^2 + S_{34} t_1 t_2 + t_2^2 < \varepsilon/S_3.$$

Выполнив замену переменных  $t_1 = r \cos \varphi$  и  $t_2 = r \sin \varphi$ , получим неравенство

$$r^2(1 + S_{34} \sin(2\varphi)/2) < \varepsilon/S_3,$$

из которого с учётом оценки (26) следует неравенство (34).

**Теорема 4.** Для любого фиксированного  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ , билинейная форма  $k(\cdot, \cdot)$  является коэрцитивной на  $\mathbf{U}$ , т.е. существует постоянная  $\varrho > 0$  такая, что

$$k(\mathbf{z}, \mathbf{z}) \geq \varrho \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{U}}^2 \quad \text{для любого} \quad \mathbf{z} \in \mathbf{U}.$$

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{U}_1 = \{\mathbf{z} \in \mathbf{U} : \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{U}} = 1\}$ , тогда можно положить

$$\varrho = \inf_{\mathbf{z} \in \mathbf{U}_1} k(\mathbf{z}, \mathbf{z}).$$

Из соотношений (27), (29), (30) и (32) следует, что для любого  $\mathbf{z} \in \mathbf{U}_1$  и  $\mathbf{q} = \mathbf{F}^T j \mathbf{z}$  имеем

$$k(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = [\omega_2 q_2, q_2] + [\omega_3 q_3, q_3] + [\omega_4 q_4, q_4] + s(\mathbf{z}, \mathbf{z}).$$

Из этого равенства, леммы 10 и условий (31) следует, что  $\varrho \geq 0$ . Покажем, что  $\varrho > 0$ . Доказательство проведём методом от противного. Пусть  $\varrho = 0$ . Тогда, поскольку  $\omega_2, \omega_3, \omega_4$  ограничены почти всюду на  $[0, h]$  (следствие 2), для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{z}_1, \hat{z}_2) \in \mathbf{U}_1$  такой, что выполняются неравенства

$$s(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}}) < \varepsilon, \tag{35}$$

$$[\hat{q}_n, \hat{q}_n] < \varepsilon, \quad n = 2, 3, 4, \tag{36}$$

где

$$\hat{q}_2 = (\hat{z}_1 + (\theta - \vartheta)\hat{z}'_2)/\gamma_2, \quad (37)$$

$$\hat{q}_3 = (\hat{z}'_1 - \alpha\hat{z}_2)/\gamma_3, \quad (38)$$

$$\hat{q}_4 = (\hat{z}_1 + (\theta + \vartheta)\hat{z}'_2)/\gamma_4. \quad (39)$$

Из неравенства (35) и леммы 17 вытекает оценка

$$\hat{z}_2^2(0) < 2\varepsilon/(|\alpha|S_3). \quad (40)$$

Из равенств (37) и (39) следует, что

$$\hat{z}_1 = (\theta(\gamma_2\hat{q}_2 - \gamma_4\hat{q}_4) + \vartheta(\gamma_2\hat{q}_2 + \gamma_4\hat{q}_4))/(2\vartheta), \quad \hat{z}'_2 = -(\gamma_2\hat{q}_2 - \gamma_4\hat{q}_4)/(2\vartheta).$$

Возведём обе части каждого из этих равенств в квадрат и проинтегрируем по отрезку  $[0, h]$ . С помощью неравенств Коши–Буняковского и (36) несложно получить оценки

$$[\hat{z}_1, \hat{z}_1] < \hat{c}_1\varepsilon, \quad [\hat{z}'_2, \hat{z}'_2] < \hat{c}_4\varepsilon, \quad (41)$$

где  $\hat{c}_1 > 0$  и  $\hat{c}_4 > 0$  — константы, не зависящие от  $\varepsilon$  и  $\hat{z}$ .

Далее используем неравенство Фридрикса [15, гл. 18]

$$[\hat{z}_2, \hat{z}_2] \leq c_3[\hat{z}'_2, \hat{z}'_2] + c_0\hat{z}_2^2(0), \quad (42)$$

где  $c_3 > 0$  и  $c_0 > 0$  — константы, не зависящие от  $\hat{z}_2$ . Из (42) и (40) следует оценка

$$[\hat{z}_2, \hat{z}_2] < \hat{c}_3\varepsilon, \quad (43)$$

где  $\hat{c}_3 = c_3\hat{c}_4 + 2c_0/(|\alpha|S_3)$ . Из равенства (38) имеем

$$\hat{z}'_1 = \gamma_3\hat{q}_3 + \alpha\hat{z}_2.$$

Возведём обе части этого равенства в квадрат и проинтегрируем по отрезку  $[0, h]$ . С помощью неравенства Коши–Буняковского и неравенств (36) и (43) получим оценку

$$[\hat{z}'_1, \hat{z}'_1] < \hat{c}_2\varepsilon, \quad (44)$$

где  $\hat{c}_2 > 0$  — константа, не зависящая от  $\varepsilon$  и  $\hat{z}$ .

В результате из (41), (43) и (44) следует, что

$$\|\hat{z}\|_{\mathcal{U}}^2 < \hat{c}\varepsilon, \quad (45)$$

где  $\hat{c} = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 + \hat{c}_3 + \hat{c}_4 > 0$  — константа, не зависящая от  $\varepsilon$  и  $\hat{z}$ . Выбрав в (45)  $\varepsilon < 1/\hat{c}$ , получим неравенство  $\|\hat{z}\|_{\mathcal{U}} < 1$ , противоречащее условию  $\hat{z} \in \mathcal{U}_1$ . Теорема доказана.

Поскольку билинейная форма  $k(\cdot, \cdot)$  является непрерывной и положительно определённой на  $\mathcal{U}$ , а линейная форма  $l(\cdot)$  — непрерывной на  $\mathcal{U}$ , то из известных результатов (см. [16, гл. 2]) следует

**Теорема 5.** *Решение вариационной задачи (28) существует и единственно.*

## 4. КОНЕЧНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Для аппроксимации вариационной задачи (28) применим метод конечных элементов. Пространство  $U$  аппроксимируем конечномерным подпространством  $U^* \subset U$  кусочно-линейных функций. Разобьём отрезок  $[0, h]$  на  $M - 1$  двухузловых конечных элементов первого порядка и применим стандартную процедуру метода Бубнова–Галёркина к вариационному уравнению (28). В результате получим СЛАУ

$$KV = L, \quad (46)$$

где

$$K = A_s - B_s, \quad A_s = A + S_a, \quad B_s = B - S_b, \quad A = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & B_1 \\ B_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$S_a = \begin{bmatrix} S_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_3 \end{bmatrix}, \quad S_b = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & S_4 \\ S_4 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ L_2 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}; \quad (47)$$

$A_1, A_2, B_1, B_2, S_3, S_4$  — квадратные матрицы порядка  $M$ , полученные в результате аппроксимации билинейных форм  $a_1(\cdot, \cdot), a_2(\cdot, \cdot), b_1(\cdot, \cdot), b_2(\cdot, \cdot), s_3(\cdot, \cdot)$  и  $s_4(\cdot, \cdot)$  соответственно;  $L_2 \in \mathbb{R}^M$  — вектор, полученный в результате аппроксимации линейной формы  $l_2(\cdot)$ ;  $V \in \mathbb{R}^{2M}$  — вектор узловых значений искомой вектор-функции  $v = (v_1, v_2) \in U$ .

**Лемма 18.** Матрицы  $A_1, A_2, A, A_s$  и  $K$  являются симметричными и положительно определёнными, а матрица  $S_3$  — симметричной и неотрицательно определённой.

**Доказательство.** Поскольку  $U^* \subset U$ , то справедливость леммы следует из положительной определённости билинейных форм  $a_1(\cdot, \cdot), a_2(\cdot, \cdot), a(\cdot, \cdot), k(\cdot, \cdot)$  и неотрицательной определённости билинейной формы  $s_3(\cdot, \cdot)$ . Лемма доказана.

Для вычисления элементов матриц  $A_1, A_2, B_1$  и  $B_2$  применяются квадратурные формулы. Тип используемых формул определяется конкретным законом изменения упругих свойств (функций  $\lambda(x_2)$  и  $\mu(x_2)$ ) по толщине полосы. При наличии у функций  $\lambda(x_2)$  и  $\mu(x_2)$  разрывов первого рода, а именно такие разрывы могут быть у модулей упругости реальных слоистых тел, сетку конечных элементов следует адаптировать так, чтобы точки разрывов совпадали с узлами сетки. Такой подход позволяет применять при вычислении элементов указанных выше матриц квадратурные формулы для непрерывных функций.

Несложно показать, что при использовании двухузловых конечных элементов первого порядка матрицы  $A_1, A_2, B_1$  и  $B_2$  являются трёхдиагональными и, кроме того,  $B_1 = B_2^T$ . Матрицы  $S_3$  и  $S_4$  имеют всего по одному ненулевому элементу, расположенному на главной диагонали в строке, номер которой совпадает с номером узла конечно-элементной сетки, расположенного в точке  $x_2 = 0$ . Оба эти элемента имеют положительные значения.

## 5. ПРЕДОБУСЛОВЛЕННЫЙ МЕТОД СОПРЯЖЁННЫХ ГРАДИЕНТОВ

Аналогично [5] для решения СЛАУ (46) можно использовать линейный одношаговый нестационарный итерационный метод. В [5] предложен эвристический алгоритм выбора последовательности параметров этого метода, обеспечивающий его практическую сходимость, однако теоретическое доказательство сходимости отсутствует. В настоящей работе для решения СЛАУ (46) с симметричной и положительно определённой матрицей  $K$  применяется предобусловленный МСГ. В качестве предобуславливателя слева используется матрица  $A_s^{-1}$ . Отметим, что произведение  $A_s^{-1}K$  самосопряжён по отношению к скалярному произведению, задаваемому матрицей  $A_s$ :

$$(V, W)_{A_s} \equiv (A_s V, W) = (V, A_s W).$$

Из соотношений (47) следует, что  $\mathbf{A}_s^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{I} - \mathbf{A}_s^{-1}\mathbf{B}_s$ , а вычисление матрично-векторных произведений  $\mathbf{W} = \mathbf{A}_s^{-1}\mathbf{V}$  сводится к решению двух независимых СЛАУ:

$$\mathbf{A}_1^s \mathbf{W}_1 = \mathbf{V}_1, \quad \mathbf{A}_2^s \mathbf{W}_2 = \mathbf{V}_2, \quad (48)$$

где  $\mathbf{A}_1^s = \mathbf{A}_1 + \mathbf{S}_3$ ,  $\mathbf{A}_2^s = \mathbf{A}_2 + \mathbf{S}_3$ . Поскольку матрицы  $\mathbf{A}_1^s$  и  $\mathbf{A}_2^s$  являются трёхдиагональными, то для численного решения СЛАУ (48) применяется метод прогонки. Несложно показать, что в случае  $\alpha \neq 0$  обе матрицы  $\mathbf{A}_1^s$  и  $\mathbf{A}_2^s$  имеют диагональное преобладание. Следовательно, алгоритм метода прогонки является корректным и устойчивым [17, гл. II].

Пусть  $\mathbf{V}_i$ ,  $i=0, 1, \dots$ , — приближённое решение СЛАУ (46). Обозначим через  $\mathbf{R}_i = \mathbf{L} - \mathbf{K}\mathbf{V}_i$  невязку исходной системы, а через  $\mathbf{Q}_i = \mathbf{A}_s^{-1}\mathbf{R}_i$  — невязку предобусловленной системы. Итерационный процесс МСГ для предобусловленной системы определяется как [18, гл. 9]

$$\mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{V}_i + \alpha_i \mathbf{P}_i, \quad \mathbf{P}_{i+1} = \mathbf{Q}_{i+1} + \beta_i \mathbf{P}_i,$$

где  $\mathbf{P}_i$  — вектор, задающий направление движения из точки  $\mathbf{V}_i$ ,  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{Q}_0$ ;  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  — числовые множители, определяемые, соответственно, из условий попарной ортогональности векторов  $\mathbf{Q}_i$  и сопряжённости векторов  $\mathbf{P}_i$ . Используя далее стандартную схему преобразований МСГ, получим следующие расчетные формулы:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_i &= (\mathbf{I} - \mathbf{A}_s^{-1}\mathbf{B}_s)\mathbf{P}_i, \quad \alpha_i = (\mathbf{R}_i, \mathbf{Q}_i)/(\mathbf{R}_i, \mathbf{Y}_i), \quad \mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{V}_i + \alpha_i \mathbf{P}_i, \quad \mathbf{Q}_{i+1} = \mathbf{Q}_i - \alpha_i \mathbf{Y}_i, \\ \mathbf{R}_{i+1} &= \mathbf{A}_s \mathbf{Q}_{i+1}, \quad \beta_i = (\mathbf{R}_{i+1}, \mathbf{Q}_{i+1})/(\mathbf{R}_i, \mathbf{Q}_i), \quad \mathbf{P}_{i+1} = \mathbf{Q}_{i+1} + \beta_i \mathbf{P}_i. \end{aligned} \quad (49)$$

Отметим, что приведённая выше формула для вычисления  $\alpha_i$  отличается от известной формулы [18, с. 3] из-за учёта структуры матриц  $\mathbf{A}_s$  и  $\mathbf{K}$ , определяемых соотношениями (47).

В качестве условия остановки итерационного процесса используется одно из следующих условий:

$$\|\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_{i-1}\| < \varepsilon_1 \|\mathbf{V}_i\|, \quad (50)$$

$$\|\mathbf{R}_{i+1}\| < \varepsilon_2,$$

где  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  — параметры, определяющие погрешность приближённого решения;  $\|\cdot\|$  — одна из гёльдеровских норм:  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  или  $\|\cdot\|_\infty$ . Учитывая немонотонную сходимость алгоритма МСГ, целесообразно требовать выполнения условия (50) на нескольких последовательных итерациях.

Сходимость итерационного процесса (49) следует из общих результатов относительно сходимости предобусловленного МСГ [18, гл. 9] и свойств симметричности и положительной определённости матриц  $\mathbf{A}_s$  и  $\mathbf{K}$ .

## 6. ВЕРИФИКАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА

Разработанный алгоритм вычисления передаточной функции реализован на алгоритмическом языке FORTRAN 2008 в виде пакета модулей. При верификации вычислительного алгоритма и программного обеспечения в качестве тестовых выбирались краевые задачи для однородной изотропной упругой полуплоскости с упругим покрытием одного из следующих типов:

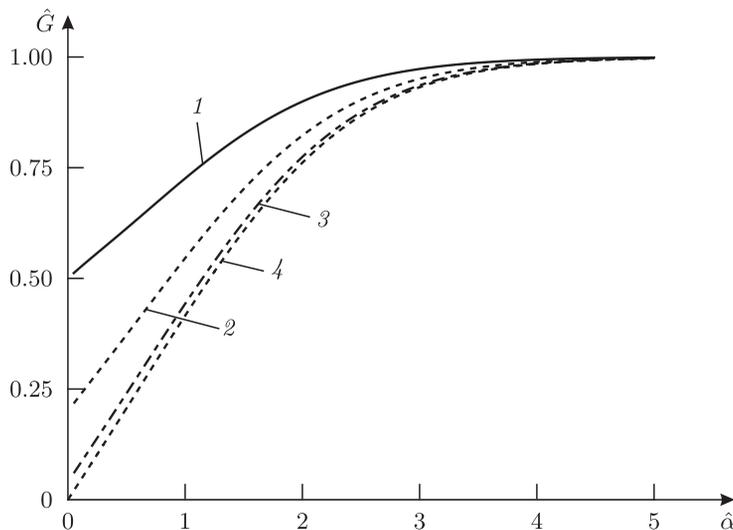
- однородная изотропная полоса;
- непрерывно-неоднородная полоса, параметры Ламе материала которой являются экспоненциальными функциями:  $\lambda(x_2) = \lambda_c \exp\{\vartheta x_2\}$  и  $\mu(x_2) = \mu_c \exp\{\vartheta x_2\}$ , где  $\lambda_c$ ,  $\mu_c$  и  $\vartheta$  — константы;
- кусочно-однородная полоса с полностью сцепленными слоями.

В работе [19] показано, что решение краевой задачи для системы уравнений (16) с краевыми условиями (18) вблизи точки  $x_2 = h$  представляет собой решение типа погранслоя. Поэтому при решении задачи использовались адаптивные конечно-элементные сетки, для построения которых применялся алгоритм, предложенный в [5]. Задавались количество узлов сетки  $M$  и размер  $l(\alpha)$  наименьшего конечного элемента, одним из узлов которого является точка  $x_2 = h$ . Размеры остальных элементов вычислялись таким образом, чтобы образовывать геометрическую прогрессию по мере удаления элементов от точки  $x_2 = h$ . С учётом результатов работы [19] для повышения точности решения полагалось  $l(\alpha) = 10^{-5}s$ , где  $s = 2\pi/\alpha$  — длина волны, соответствующая волновому числу  $\alpha$ . При решении тестовых задач количество узлов сетки выбиралось равным  $M = 501$ . Вычисления проводились с двойной точностью до выполнения условия (50) с нормой  $\|\cdot\|_2$  и параметром  $\varepsilon_1 = 10^{-8}$ .

В качестве примера на рисунке приведены результаты расчётов для полуплоскости с покрытием первого типа (однородная полоса) для различных значений отношения модулей Юнга полуплоскости  $E_0$  и полосы  $E_1$ , и для безразмерных величин  $\hat{G} = \alpha G(\alpha)/E^*$ ,  $\hat{\alpha} = \alpha h$ , где  $E^* = 2(1 - \nu_1^2)/E_1$ . Коэффициенты Пуассона полагались равными  $\nu_0 = \nu_1 = 0.3$ . Кривая 4 соответствует аналитическому решению [20, § 11] для однородной изотропной упругой полосы, сцепленной с недеформируемым основанием ( $E_0/E_1 = \infty$ ):

$$G(\alpha) = \frac{E^* C_{22}(\alpha h)}{\alpha C_0(\alpha h)},$$

где  $C_{22}(t) = 2\kappa \operatorname{sh}(2t) - 4t$ ,  $C_0(t) = 2\kappa \operatorname{ch}(2t) + \kappa^2 + 1 + 4t^2$ ,  $\kappa = 3 - 4\nu_1$ .



**Рисунок.** Результаты расчётов для полуплоскости с покрытием первого типа:  
1 —  $E_0/E_1 = 2$ ; 2 —  $E_0/E_1 = 5$ ; 3 —  $E_0/E_1 = 25$ ; 4 —  $E_0/E_1 = \infty$

Для случая  $E_0 = E_1$  (полуплоскость с покрытием из того же материала) известно аналитическое выражение для передаточной функции [10, § 6.5]

$$G(\alpha) = E^*/|\alpha|. \quad (51)$$

Сравнение аналитического (51) и полученного численного решений показало, что последнее содержит шесть верных значащих цифр.

Отметим, что выражение (51) совпадает с главным членом асимптотического разложения передаточной функции ОПС при  $\alpha \rightarrow \infty$  для упругой полосы, сцепленной с недеформируемым

основанием, а два последующих члена этого разложения для однородной полосы равны нулю [19]. Относительное расхождение численных решений для  $E_0/E_1 = 2, 5$  и  $25$  (см. кривые 1–3 на рисунке) с асимптотическим разложением (51) для  $\alpha h = 5$  составило, соответственно, 0.12%, 0.22% и 0.31%.

Проведена также оценка вычислительной эффективности разработанного алгоритма решения СЛАУ (46). В таблице приведены усреднённые данные о количествах итераций и оценки числа операций итерационных процессов для трёх алгоритмов — алгоритма 1 из [5], предложенного в данной работе алгоритма 2 и стандартного алгоритма МСГ без предобуславливания (алгоритм 3). С учётом структуры матриц  $A_s$  и  $B_s$  общее количество операций (умножения и сложения) на одной итерации алгоритма 1 оценивается как  $26M$ , алгоритма 2 — как  $41M$ , а алгоритма 3 — как  $32M$ . Усреднение выполнялось для конечно-элементных сеток с одинаковым количеством узлов  $M$  по всем проведённым расчётам для 100 значений параметра  $\alpha$  преобразования Фурье и указанных выше типов упругих покрытий. В качестве начального приближения решения использовался нулевой вектор.

**Таблица.** Количество итераций и оценка числа операций для трёх алгоритмов

Число узлов сетки $M$	Алгоритм 1		Алгоритм 2		Алгоритм 3	
	Количество итераций	Число операций	Количество итераций	Число операций	Количество итераций	Число операций
501	38	$988M$	23	$943M$	2499	$79\,968M$
1001	38	$988M$	23	$943M$	4173	$133\,536M$
2001	38	$988M$	23	$943M$	7164	$229\,248M$

Из приведённых в таблице данных следует, что минимальное количество итераций требуется для алгоритма 2, однако общее количество операций для алгоритмов 1 и 2 практически совпадает. Применение при решении рассматриваемой задачи предобуславливающей матрицы  $A_s^{-1}$  позволяет существенно уменьшить количество итераций. Кроме того, при использовании предобуславливания количество итераций оставалось неизменным при изменении числа конечных элементов в диапазоне  $10^2$ – $10^5$ , тогда как для алгоритма без предобуславливания количество итераций увеличивалось почти пропорционально числу конечных элементов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование вариационной формулировки краевой задачи для трансформант перемещений позволило разработать эффективный алгоритм вычисления передаточной функции оператора Пуанкаре–Стеклова, отображающего на части границы стратифицированной упругой полосы, полностью сцепленной с однородной изотропной упругой полуплоскостью, нормальные напряжения в нормальные перемещения. Разработанный вычислительный алгоритм может быть применён и в более общем случае — при наличии на части границы полосы касательных напряжений, изменится лишь вид линейной формы  $l(\mathbf{w})$ .

Отметим также, что предложенный подход к вычислению передаточной функции может быть обобщён на случай, когда на границе раздела полуплоскости и полосы заданы граничные условия скользящей заделки.

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред / С.М. Айзикович, В.М. Александров, А.В. Белоконь [и др.]. — М. : Физматлит, 2006. — 240 с.
2. Бобылев, А.А. Применение метода сопряженных градиентов к решению задач дискретного контакта для упругой полуплоскости / А.А. Бобылев // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 2022. — № 2. — С. 154–172.
3. Бобылев, А.А. Алгоритм решения задач дискретного контакта для упругой полосы / А.А. Бобылев // Прикл. математика и механика. — 2022. — Т. 86, № 3. — С. 404–423.
4. Ватульян, А.О. К исследованию контактной задачи для неоднородной упругой полосы / А.О. Ватульян, Д.К. Плотников // Прикл. математика и механика. — 2021. — Т. 85, № 3. — С. 283–293.
5. Бобылев, А.А. Численное построение трансформанты ядра интегрального представления оператора Пуанкаре–Стеклова для упругой полосы / А.А. Бобылев // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 1. — С. 115–129.
6. Бобылев, А.А. Алгоритм решения задач одностороннего дискретного контакта для многослойной упругой полосы / А.А. Бобылев // Прикл. механика и техн. физика. — 2024. — Т. 65, № 2. — С. 230–242.
7. Бобылев, А.А. Задача одностороннего дискретного контакта для функционально-градиентной упругой полосы / А.А. Бобылев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2024. — № 2. — С. 58–69.
8. Мухелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. — 5-е изд., испр. и доп. — М. : Наука, 1966. — 708 с.
9. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон ; пер. с англ. В.Э. Наумова, А.А. Спектора ; под ред. Р.В. Гольдштейна. — М. : Мир, 1989. — 510 с.
10. Barber, J.R. Contact Mechanics / J.R. Barber. — Cham : Springer, 2018. — 585 p.
11. Ju, Y.Q. Spectral analysis of two-dimensional contact problems / Y.Q. Ju, T.N. Farris // ASME J. Tribol. — 1996. — V. 118, № 2. — P. 320–328.
12. Треногин, В.А. Функциональный анализ : учебник для вузов / В.А. Треногин. — 3-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2002. — 488 с.
13. Колтунов, М.А. Прикладная механика деформируемого твёрдого тела : учеб. пособие / М.А. Колтунов, А.С. Кравчук, В.П. Майборода. — М. : Высшая школа, 1983. — 349 с.
14. Годунов, С.К. Современные аспекты линейной алгебры / С.К. Годунов. — Новосибирск : Научная книга, 1997. — 390 с.
15. Ректорис, К. Вариационные методы в математической физике и технике / К. Ректорис ; пер. с англ. под ред. К.И. Бабенко и Б.Е. Победри. — М. : Мир, 1985. — 590 с.
16. Лебедев, В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика : учеб. пособие / В.И. Лебедев. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : Физматлит, 2005. — 296 с.
17. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. — М. : Наука, 1978. — 592 с.
18. Саад, Ю. Итерационные методы для разреженных линейных систем : учеб. пособие : в 2-х т. / Ю. Саад ; пер. с англ. Х.Д. Икрамова, В.В. Воеводина ; под ред. Х.Д. Икрамова. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2014. — Т. 2. — 306 с.
19. Бобылев, А.А. О вычислении передаточной функции оператора Пуанкаре–Стеклова для функционально-градиентной упругой полосы / А.А. Бобылев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2023. — № 5. — С. 52–60.
20. Ворович, И.И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И.И. Ворович, В.М. Александров, В.А. Бабешко. — М. : Наука, 1974. — 456 с.

**CONSTRUCTION OF THE TRANSFER FUNCTION OF THE POINCARÉ–STEKLOV OPERATOR FOR A COATED ELASTIC HALF-PLANE**

© 2024 / A. A. Bobylev

*Lomonosov Moscow State University, Russia*  
e-mail: abobylov@gmail.com

For a homogeneous isotropic elastic half-plane with a stratified elastic coating we consider the Poincaré–Steklov operator that maps normal stresses into normal displacements on part of the boundary. To construct the transfer function of this operator, the variational formulation of the boundary value problem for transforms of displacements is used. A definition is given and the existence and uniqueness are proved for a generalized solution of the variational problem. This problem is approximated by the finite element method. To numerically solve the resulting system of linear algebraic equations, the preconditioned conjugate gradient method is used. The developed computational algorithm was verified.

*Keywords:* Poincaré–Steklov operator, transfer function, elastic half-plane, stratified coating

REFERENCES

1. Aizikovich, S.M., Aleksandrov, V.M., Belokon', A.V. [et al.], *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti dlya neodnorodnyh sred* (Contact Problems in the Theory of Elasticity for Inhomogeneous Media), Moscow: Fizmatlit, 2006.
2. Bobylev, A.A., Application of the conjugate gradient method to solving discrete contact problems for an elastic half-plane, *Mechanics of Solids*, 2022, vol. 57, no. 2, pp. 317–332.
3. Bobylev, A.A., Algorithm for solving discrete contact problems for an elastic strip, *Mechanics of Solids*, 2022, vol. 57, no. 7, pp. 1766–1780.
4. Vatulyan, A.O. and Plotnikov, D.K., On a study of the contact problem for an inhomogeneous elastic strip, *Mechanics of Solids*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 1379–1387.
5. Bobylev, A.A., Numerical construction of the transform of the kernel of the integral representation of the Poincaré–Steklov operator for an elastic strip, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 1, pp. 119–134.
6. Bobylev, A.A., Algorithm for solving unilateral discrete contact problems for a multilayer elastic strip, *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2024, vol. 65, no. 2.
7. Bobylev, A.A., The unilateral discrete contact problem for a functionally graded elastic strip, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2024, vol. 79, no. 2, pp. 56–68.
8. Muskhelishvili, N.I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Dordrecht: Springer, 1977.
9. Johnson, K.L., *Contact Mechanics*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
10. Barber, J.R., *Contact Mechanics*, Cham: Springer, 2018.
11. Ju, Y.Q. and Farris, T.N., Spectral analysis of two-dimensional contact problems, *ASME J. Tribol.*, 1996, vol. 118, no. 2, pp. 320–328.
12. Trenogin, V.A., *Funktsional'nyj analiz* (Functional Analysis), Moscow: Fizmatlit, 2002.
13. Koltunov, M.A., Kravchuk, A.S., and Maiboroda, V.P., *Prikladnaya mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* (Applied Mechanics of Deformable Solids), Moscow: Vysshaya shkola, 1983.
14. Godunov, S.K., *Sovremennye aspekty lineinoi algebrы* (Modern Aspects of Linear Algebra), Novosibirsk: Nauch. Kniga, 1997.
15. Rektorys, K., *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*, Dordrecht: Springer, 2012.
16. Lebedev, V.I., *Funktsional'nyj analiz i vychislitel'naya matematika* (Functional Analysis and Computational Mathematics), Moscow: Fizmatlit, 2005.
17. Samarskii, A.A. and Nikolaev, E.S., *Metody resheniya setochnykh uravnenii* (Methods for Solving Grid Equations), Moscow: Nauka, 1978.
18. Saad, Y., *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, Philadelphia: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
19. Bobylev, A.A., Computing a transfer function of the Poincaré–Steklov operator for a functionally graded elastic strip, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2023, vol. 78, no. 5, pp. 134–142.
20. Vorovich, I.I., Aleksandrov, V.M., and Babeshko, V.A., *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti* (Nonclassical Mixed Problems of Elasticity Theory), Moscow: Nauka, 1974.