ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 9, с. 1205–1215

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.4

О СУЩЕСТВОВАНИИ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ ДИКМАНА–ЛОУ В СЛУЧАЕ КУСОЧНО-КОНСТАНТНЫХ ЯДЕР

М. В. Николаев[1], А. А. Никитин[2]

[1,2]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*
[2]*Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва*
e-mail: [1]nikolaev.mihail@inbox.ru, [2]nikitin@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 02.04.2024 г., после доработки 02.04.2024 г.; принята к публикации 04.06.2024 г.

Для модели логистической динамики, разработанной У. Дикманом и Р. Лоу, проведён анализ нелинейного интегрального уравнения, описывающего состояние равновесия одновидового сообщества при трёхпараметрическом замыкании третьего пространственного момента в случае, когда ядра разброса и конкуренции представляют собой кусочно-постоянные функции. Установлены достаточные условия разрешимости этого уравнения.

Ключевые слова: нелинейное интегральное уравнение, популяционная динамика

DOI: 10.31857/S0374064124090041, EDN: JXVOWU

1. ВВЕДЕНИЕ. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В статье анализируется модель динамики биологических сообществ, предложенная У. Дикманом и Р. Лоу в работах [1; 2], и рассматривается одновидовой случай, при этом основной интерес представляет так называемое состояние равновесия, т.е. состояние, при котором глобальные усреднённые характеристики сообщества перестают меняться во времени. Основным предметом изучения модели является возникающее нелинейное интегральное уравнение, описывающее состояние равновесия. Ставится вопрос о нахождении условий его разрешимости в случае, когда пространственная неоднородность модели имеет наиболее простую из возможных конфигураций.

Данное исследование является продолжением анализа, начатого в работе [3], для замыкания третьего пространственного момента более общего вида.

Приведём краткое описание модели. Пусть некоторое одновидовое сообщество неподвижных организмов обитает в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n=1,2,3)$. Свойства каждого индивида описываются следующими гомогенными по пространству параметрами: $d\geqslant 0$ — естественная смертность, $s>0$ — агрессивность, $b>d$ — плодовитость; а также двумя функциями: $m(x)$ — ядро разброса, $w(x)$ — ядро конкуренции. Указанные ядра принадлежат классу

$$\mathcal{K}_n=\Big\{f\in L_1(\mathbb{R}^n)\colon \|f\|_{L_1}=1,\ \ f(x)=F(\|x\|)\geqslant 0,\ \ \lim_{r\to+\infty}F(r)=0\Big\} \tag{1}$$

и являются плотностями вероятности событий рождения новых особей и смерти существующих особей от конкуренции с сородичами соответственно. Данные параметры полностью описывают сообщество на локальном уровне.

Для описания глобального состояния сообщества используются так называемые пространственные моменты — статистические характеристики групп индивидов, усреднённые по всевозможным конфигурациям сообщества в данный момент времени t. Ниже рассматриваются три из них:

1) $N(t)$ — средняя плотность особей;

2) $C(x,t)$ — средняя плотность пар особей, в которых второй индивид сдвинут на x относительно первого;

3) $T(x,y,t)$ — средняя плотность троек особей, в которых второй индивид сдвинут на x, а третий — на y относительно первого.

Динамика первых двух моментов удовлетворяет системе

$$\dot N(t) = (b-d)N(t) - s\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(y,t)w(y)\,dy,$$

$$\dot C(x,t) = bm(x)N(t) + \int\limits_{\mathbb{R}^n} bm(y)C(x+y,t)\,dy - (d+sw(x))C(x,t) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} sw(y)T(x,y,t)\,dy, \qquad (2)$$

где $\cdot$ обозначает производную по переменной t, с дополнительным условием на бесконечности

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} C(x,t) = N^2(t). \qquad (3)$$

Вывод указанных уравнений можно найти, например, в [2]. Стационарная точка системы (2) называется *состоянием равновесия сообщества.* В состоянии равновесия пространственные моменты перестают зависеть от времени, поэтому всюду далее аргумент t не указывается.

Систему динамики можно расширять на моменты сколь угодно большого порядка, однако она всегда будет зависеть от момента следующего порядка. Кроме того, именно первые два момента несут самую существенную информацию о пространственной структуре сообщества. Учитывая эти два факта, имеет смысл замкнуть третий пространственный момент, т.е., используя эвристические соображения, вывести дополнительное соотношение, выражающее T через N и C, и подставить его в (2). Необходимые свойства, а также примеры замыканий были рассмотрены, в частности, в работе [4]. В настоящей статье будет использовано трёхпараметрическое замыкание второго порядка вида

$$T(x,y) = \widetilde\alpha\frac{C(x)C(y)}{N} + \widetilde\beta\frac{C(x)C(y-x)}{N} + \widetilde\gamma\frac{C(y)C(y-x)}{N} - \widetilde\beta N^3, \qquad (4)$$

где $\widetilde\alpha = \alpha/(\alpha+\gamma)$, $\widetilde\beta = \beta/(\alpha+\gamma)$ и $\widetilde\gamma = \gamma/(\alpha+\gamma)$, параметры $\alpha,\beta,\gamma \geqslant 0$ и $\alpha+\gamma>0$.

Подставив (4) в (2) и рассмотрев состояние равновесия, после некоторых преобразований получим систему

$$N = \frac{s}{b-d}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(y)w(y)\,dy,$$

$$0 = bm(x)N + b\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(x-y)m(y)\,dy - \big(sw(x)+\widetilde\alpha b + (1-\widetilde\alpha)d\big)C(x) -$$

$$-\widetilde\beta\frac{sC(x)}{N}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(x-y)w(y)\,dy - \widetilde\gamma\frac{s}{N}\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(x-y)w(y)C(y)\,dy + \widetilde\beta s N^3, \qquad (5)$$

называемую *системой равновесия.*

2. УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ

Будем исследовать случай, когда ядра разброса и конкуренции выглядят наиболее просто. Это позволит максимально упростить систему (5) и использовать её в дальнейшем для проверки различных гипотез, касающихся эволюции одновидовых сообществ, а также для корректировки численных методов. Исходя из определения класса (1), можно заключить, что искомые ядра должны равняться положительной константе в некотором шаре пространства $\mathbb{R}^n$ и быть равными нулю всюду вне него.

Пусть r_m и r_w — некоторые положительные числа, которые будут нести смысл радиуса разброса и радиуса конкуренции соответственно. Обозначим через B_m шар пространства $\mathbb{R}^n$ радиуса r_m с центром в нуле, B_w — шар радиуса r_w с центром в нуле, а μ_m и μ_w — объёмы этих шаров:

$$\mu_m = \frac{\pi^{n/2} r_m^n}{\Gamma(n/2+1)}, \quad \mu_w = \frac{\pi^{n/2} r_w^n}{\Gamma(n/2+1)}.$$

Поскольку L_1-норма ядер равна единице, заключаем, что

$$m(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_m}, & \text{если } \|x\| \leqslant r_m, \\ 0, & \text{если } \|x\| > r_m, \end{cases} \qquad w(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_w}, & \text{если } \|x\| \leqslant r_w, \\ 0, & \text{если } \|x\| > r_w. \end{cases} \tag{6}$$

Эти ядра называются *кусочно-постоянными* (или *кусочно-константными*). Подстановка (6) в (5) даёт

$$N = \frac{s}{\mu_w(b-d)} \int\limits_{B_w} C(y)\,dy,$$

$$0 = bm(x)N + \frac{b}{\mu_m}\int\limits_{B_m} C(x-y)\,dy - \big(sw(x) + \widetilde{\alpha}b + (1-\widetilde{\alpha})d\big)C(x) -$$

$$- \widetilde{\beta}\frac{sC(x)}{\mu_w N}\int\limits_{B_w} C(x-y)\,dy - \widetilde{\gamma}\frac{s}{\mu_w N}\int\limits_{B_w} C(x-y)C(y)\,dy + \widetilde{\beta}sN^3. \tag{7}$$

Сделаем в (7) замену переменной вида $Q(x) = C(x)/N^2 - 1$ и после некоторых преобразований получим систему

$$N = \frac{b-d}{s + (s/\mu_w)\int_{B_w} Q(y)\,dy},$$

$$0 = \frac{bm(x)}{N} + \frac{b}{\mu_m}\int\limits_{B_m} Q(x-y)\,dy - \big(sw(x) + \widetilde{\alpha}b + (1-\widetilde{\alpha})d\big)Q(x) - \widetilde{\beta}\frac{sNQ(x)}{\mu_w}\int\limits_{B_w} Q(x-y)\,dy -$$

$$- \widetilde{\gamma}\frac{sN}{\mu_w}\int\limits_{B_w} Q(x-y)Q(y)\,dy - (\widetilde{\beta}+\widetilde{\gamma})\frac{sN}{\mu_w}\int\limits_{B_w} Q(x-y)\,dy - \widetilde{\beta}sNQ(x) - sw(x), \tag{8}$$

при этом условие (3) переходит в условие стремления функции $Q(x)$ к нулю на бесконечности. Видно, что в (8) первый момент N однозначно определяется через функцию $Q(x)$, поэтому мы можем свести систему к одному уравнению, считая, что N выражается через $Q(x)$ как

$$N(Q) = \frac{b-d}{s + (s/\mu_w)\int_{B_w} Q(y)\,dy}.$$

Запишем систему (8) в виде операторного уравнения, т.е. в виде $Q=\mathcal{A}Q$. Для этого введём обозначение

$$D(Q,x)=sw(x)+\widetilde{\alpha}b+(1-\widetilde{\alpha})d+\widetilde{\beta}sN(Q). \tag{9}$$

После подстановки (9) в (8) и алгебраических преобразований получим уравнение

$$\begin{aligned}Q(x)=\frac{b}{D(Q,x)}\left(\frac{m(x)}{N(Q)}+\frac{1}{\mu_m}\int\limits_{B_m}Q(x-y)\,dy\right)-\frac{s}{D(Q,x)}\left(w(x)+\frac{\widetilde{\beta}+\widetilde{\gamma}}{\mu_w}N(Q)\int\limits_{B_w}Q(x-y)\,dy\right)-\\-\frac{sN(Q)}{\mu_w D(Q,x)}\left(\widetilde{\beta}Q(x)\int\limits_{B_w}Q(x-y)\,dy+\widetilde{\gamma}\int\limits_{B_w}Q(x-y)Q(y)\,dy\right),\end{aligned} \tag{10}$$

которое будем называть *уравнением равновесия*. Вопрос разрешимости этого уравнения составляет основной предмет изучения данной статьи.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Прежде чем приступать к дальнейшему анализу уравнения равновесия (10), рассмотрим несколько вспомогательных утверждений, касающихся составляющих его частей. Введём обозначение

$$\mathfrak{B}^+(R)=\{f\in L_1(\mathbb{R}^n)\colon \|f\|_{L_1}\leqslant R,\ \ f(x)\geqslant 0\},$$

где $R>0$, и будем считать, что неизвестная функция $Q(x)$ принадлежит множеству данного вида.

Лемма 1. *Если* $Q\in\mathfrak{B}^+(R)$, *то*

$$\frac{b-d}{s(1+R/\mu_w)}\leqslant N(Q)\leqslant\frac{b-d}{s}.$$

Доказательство. Так как $Q(x)\geqslant 0$, то

$$0\leqslant\int\limits_{B_w}Q(y)\,dy\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q(y)\,dy=\|Q\|_{L_1}\leqslant R.$$

Отсюда, в силу положительности чисел $b-d$ и s, заключаем, что

$$\frac{b-d}{s+(s/\mu_w)R}\leqslant\frac{b-d}{s+(s/\mu_w)\int\limits_{B_w}Q(y)\,dy}\leqslant\frac{b-d}{s}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если* $Q\in\mathfrak{B}^+(R)$, *то*

$$d+\left(\widetilde{\alpha}+\frac{\widetilde{\beta}}{1+R/\mu_w}\right)(b-d)\leqslant D(Q,x)\leqslant d+(\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta})(b-d)+\frac{s}{\mu_w}.$$

Доказательство. Ясно, что $0\leqslant sw(x)\leqslant s/\mu_w$. С учётом оценок из леммы 1 имеем

$$\widetilde{\beta}\frac{b-d}{1+R/\mu_w}\leqslant\widetilde{\beta}sN(Q)\leqslant\widetilde{\beta}(b-d).$$

После применения указанных выше оценок к определению величины $D(Q,x)$ и перегруппировки слагаемых получаем утверждение леммы.

Докажем следующее утверждение о свойствах оператора свёртки с единицей.

Лемма 3. *Пусть $B(r)$ — некоторый шар пространства $\mathbb{R}^n$ радиуса $r>0$ с центром в нуле. Оператор $\mathcal{C}_r$, действующий на функции из пространства $L_1(\mathbb{R}^n)$ по правилу*

$$\mathcal{C}_r Q(x) = \int\limits_{B(r)} Q(x-y)\,dy,$$

является компактным.

Доказательство. В силу линейности оператора нам достаточно показать, что образ единичного шара пространства $L_1(\mathbb{R}^n)$ под действием оператора $\mathcal{C}_r$ является предкомпактным. Воспользуемся критерием Рисса предкомпактности множеств в L_1, согласно которому множество $M\subset L_1(\mathbb{R}^n)$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и равностепенно непрерывно в среднем, т.е. для любого числа $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любого элемента $f\in M$ и любого вектора $h\in\mathbb{R}^n$ с нормой, не превосходящей δ, выполняется неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \bigl|f(x+h)-f(x)\bigr|\,dx \leqslant \varepsilon.$$

Пусть $\|Q\|_{L_1}\leqslant 1$. Тогда, применив теорему Фубини и стандартные интегральные неравенства, получим

$$\|\mathcal{C}_r Q\|_{L_1} = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Biggl|\int\limits_{B(r)} Q(x-y)\,dy\Biggr|\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{B(r)}\Bigl|Q(x-y)\Bigr|\,dy\,dx = \int\limits_{B(r)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Bigl|Q(x-y)\Bigr|\,dx\,dy =$$

$$= \frac{\pi^{n/2}r^n}{\Gamma(n/2+1)}\|Q\|_{L_1} \leqslant \frac{\pi^{n/2}r^n}{\Gamma(n/2+1)},$$

т.е. образ единичного шара ограничен. Покажем, что он равностепенно непрерывен в среднем. Для начала заметим, что оператор $\mathcal{C}_r$ можно записать в альтернативной форме:

$$\mathcal{C}_r Q(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Q(x-y)\chi_r(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Q(y)\chi_r(x-y)\,dy,$$

где χ_r — характеристическая функция шара $B(r)$. При этом ясно, что для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое число $\delta>0$, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \bigl|\chi_r(x+h)-\chi_r(x)\bigr|\,dy \leqslant \varepsilon$$

как только $\|h\|\leqslant\delta$, поскольку указанный интеграл определяет меру симметрической разности шара $B(r)$ и его копии, сдвинутой на вектор h, а эта мера стремится к нулю, когда норма сдвига стремится к нулю. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{C}_r Q(x+h)-\mathcal{C}_r Q(x)|\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |Q(y)|\,|\chi_r(x+h-y)-\chi_r(x-y)|\,dy\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |Q(y)| \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\chi_r(x+h)-\chi_r(x)|\,dx\,dy \leqslant \varepsilon\|Q\|_{L_1} \leqslant \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим свойства нелинейных операторов, входящих в уравнение равновесия (10).

Лемма 4. *Оператор самосвёртки $\mathcal{S}$, действующий на функции $Q\in\mathfrak{B}^+(R)$ по правилу*

$$\mathcal{S}Q(x) = \int\limits_{B_w} Q(x-y)Q(y)\,dy,$$

является липшицевым с константой $2R$.

Доказательство. Пусть $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{B}^+(R)$. Тогда, применив теорему Фубини и стандартные интегральные неравенства, будем иметь

$$\|\mathcal{S}Q_1 - \mathcal{S}Q_2\|_{L_1} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \int\limits_{B_w} \big[Q_1(x-y)Q_1(y) - Q_2(x-y)Q_2(y)\big]\, dy \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{B_w} |Q_1(x-y)Q_1(y) - Q_2(x-y)Q_2(y)|\, dy\, dx =$$

$$= \int\limits_{B_w} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |Q_1(x-y)Q_1(y) - Q_1(x-y)Q_2(y)|\, dx\, dy + \int\limits_{B_w} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |Q_1(x-y)Q_2(y) - Q_2(x-y)Q_2(y)|\, dx\, dy =$$

$$= \int\limits_{B_w} |Q_1(y) - Q_2(y)| \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |Q_1(x-y)|\, dx \right) dy + \int\limits_{B_w} |Q_2(y)| \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |Q_1(x-y) - Q_2(x-y)|\, dx \right) dy =$$

$$= \|Q_1 - Q_2\|_{L_1} \|Q_1\|_{L_1} + \|Q_2\|_{L_1} \|Q_1 - Q_2\|_{L_1} = (\|Q_1\|_{L_1} + \|Q_2\|_{L_1}) \|Q_1 - Q_2\|_{L_1} \leqslant 2R \|Q_1 - Q_2\|_{L_1}.$$

Лемма доказана.

Аналогичным способом доказывается следующая

Лемма 5. *Оператор $\mathcal{P}$ умножения на свёртку, действующий на функции $Q \in \mathfrak{B}^+(R)$ по правилу*

$$\mathcal{P}Q(x) = Q(x) \int\limits_{B_w} Q(x-y)\, dy,$$

является липшицевым с константой $2R$.

4. РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Далее найдём достаточные условия разрешимости уравнения равновесия (10). Ясно, что задача о нахождении решения этого уравнения равносильна задаче нахождения неподвижной точки задаваемого им оператора. Широко известны два принципа неподвижных точек: Банаха и Лере–Шаудера. Ниже воспользуемся их обобщением, предложенным М.А. Красносельским в статье [5].

Теорема 1 [5]. *Пусть на некотором выпуклом замкнутом ограниченном подмножестве B банахова пространства $\mathbb{B}$ заданы операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, причём первый из них компактный, а второй — сжимающий. Пусть также при любых $x, y \in B$ выполнено условие $\mathcal{A}x + \mathcal{B}y \in B$. Тогда найдётся такой элемент $z \in B$, что $\mathcal{A}z + \mathcal{B}z = z$.*

Теперь идея заключается в том, чтобы представить оператор, задаваемый уравнением равновесия (10), в виде суммы компактного и сжимающего операторов в некотором выпуклом замкнутом ограниченном подмножестве пространства $L_1(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 6. *Операторы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{D}$, задаваемые выражениями*

$$\mathcal{B}Q(x) = \frac{b}{D(Q,x)} \left(\frac{m(x)}{N(Q)} + \frac{1}{\mu_m} \int\limits_{B_m} Q(x-y)\, dy \right),$$

$$\mathcal{D}Q(x) = \frac{s}{D(Q,x)} \left(w(x) + \frac{\widetilde{\beta} + \widetilde{\gamma}}{\mu_w} N(Q) \int\limits_{B_w} Q(x-y)\, dy \right),$$

являются компактными в $\mathfrak{B}^+(R)$ при любом $R > 0$.

Доказательство. Нетрудно убедиться в том, что сдвиг и умножение на отличное от нуля число не влияют на предкомпактность множества. Исходя из лемм 1 и 2, величины $N(Q)$ и $D(Q,x)$ равномерно отделены от нуля и бесконечности. Значит, компактность $\mathcal{B}$ и $\mathcal{D}$ напрямую следует из леммы 3, постулирующей компактность оператора $\mathcal{C}_r$, который входит в определение указанных операторов. Лемма доказана.

Лемма 7. *Оператор $\mathcal{R}$, определяемый выражением*

$$\mathcal{R}Q(x)=\frac{sN(Q)}{\mu_w D(Q,x)}\biggl(\widetilde{\beta}Q(x)\int\limits_{B_w}Q(x-y)\,dy+\widetilde{\gamma}\int\limits_{B_w}Q(x-y)Q(y)\,dy\biggr),$$

является сжимающим в $\mathfrak{B}^+(R)$, где

$$R<\frac{\mu_w}{2}\frac{\alpha}{\beta+\gamma}.$$

Доказательство. Принимая во внимание леммы 1 и 2, можно показать, что для любого $Q\in\mathfrak{B}^+(R)$ и любого $x\in\mathbb{R}^n$ справедливы соотношения

$$\left|\frac{sN(Q)}{\mu_w D(Q,x)}\right|\leqslant\frac{b-d}{\mu_w\Bigl(d+\Bigl(\widetilde{\alpha}+\frac{\widetilde{\beta}}{1+R/\mu_w}\Bigr)(b-d)\Bigr)}<\frac{b-d}{\mu_w(\widetilde{\alpha}b+(1-\widetilde{\alpha})d)}=\frac{b-d}{\mu_w(\widetilde{\alpha}b+\widetilde{\gamma}d)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{b-d}{\mu_w(\widetilde{\alpha}b-\widetilde{\alpha}d+\widetilde{\alpha}d+\widetilde{\gamma}d)}=\frac{b-d}{\mu_w(\widetilde{\alpha}(b-d)+(\widetilde{\alpha}+\widetilde{\gamma})d)}\leqslant\frac{1}{\mu_w\widetilde{\alpha}}.$$

Пусть теперь $Q_1,Q_2\in\mathfrak{B}^+(R)$. Воспользуемся леммами 4 и 5 о липшицевости операторов самосвёртки и умножения на свёртку, а также найденной выше оценкой и получим

$$\|\mathcal{R}Q_1-\mathcal{R}Q_2\|_{L_1}<\frac{1}{\mu_w\widetilde{\alpha}}\bigl(\widetilde{\beta}\|\mathcal{P}Q_1-\mathcal{P}Q_2\|_{L_1}+\widetilde{\gamma}\|\mathcal{S}Q_1-\mathcal{S}Q_2\|_{L_1}\bigr)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2R(\widetilde{\beta}+\widetilde{\gamma})}{\mu_w\widetilde{\alpha}}\|Q_1-Q_2\|_{L_1}=\frac{2R(\beta+\gamma)}{\mu_w\alpha}\|Q_1-Q_2\|_{L_1}.$$

Таким образом, для сжимаемости оператора $\mathcal{R}$ достаточно, чтобы

$$\frac{2R(\beta+\gamma)}{\mu_w\alpha}<1,$$

откуда вытекает оценка R утверждения леммы.

Лемма 8. *Если*

$$\frac{b}{b-d}\geqslant\frac{\mu_m}{\mu_w}\geqslant1 \tag{11}$$

и

$$\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}\leqslant\frac{1}{2+2R}, \tag{12}$$

то при любых $Q\in\mathfrak{B}^+(R)$ выполняется неравенство

$$\mathcal{B}Q(x)-\mathcal{D}Q(x)-\mathcal{R}Q(x)\geqslant0. \tag{13}$$

Доказательство. Умножим неравенство (13) на положительную (по лемме 2) величину $D(Q,x)$ и разделим на s. После этого, объединив отрицательные интегральные слагаемые под единый интеграл и упростив, получим равносильное неравенство вида

$$\frac{bm(x)}{sN(Q)}+\frac{b}{s\mu_m}\int\limits_{B_m}Q(x-y)\,dy-w(x)-\frac{N(Q)}{\mu_w}\int\limits_{B_w}\bigl(\widetilde{\beta}(1+Q(x))+\widetilde{\gamma}(1+Q(y))\bigr)Q(x-y)\,dy\geqslant0.$$

По лемме 1 $N(Q)\geqslant(b-d)/s$, поэтому с учётом (11)

$$\frac{bm(x)}{sN(Q)}-w(x)\geqslant\frac{b}{b-d}m(x)-w(x)\geqslant 0.$$

Тогда нам достаточно доказать неравенство

$$\frac{b}{\mu_m}\int\limits_{B_m}Q(x-y)\,dy-\frac{b-d}{\mu_w}\int\limits_{B_w}\big(\widetilde{\beta}(1+Q(x))+\widetilde{\gamma}(1+Q(y))\big)Q(x-y)\,dy\geqslant 0,$$

которое, исходя из (11), равносильно

$$\int\limits_{B_m}Q(x-y)\,dy\geqslant\int\limits_{B_w}\big(\widetilde{\beta}(1+Q(x))+\widetilde{\gamma}(1+Q(y))\big)Q(x-y)\,dy,$$

что следует из условия (12). Лемма доказана.

Теорема 2 (о разрешимости уравнения равновесия). *Пусть* $2(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)>\alpha\gamma$,

$$\mu_w\geqslant\frac{bs}{(b-d)^2}\,\frac{\alpha+\gamma}{\alpha}\,\frac{(\alpha+2\beta+2\gamma)^2}{2(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)-\alpha\gamma},\qquad R<\frac{\mu_w}{2}\,\frac{\alpha}{\beta+\gamma} \tag{14}$$

и выполнены условия (11), (12). Тогда уравнение равновесия (10) имеет хотя бы одно решение $Q\in\mathfrak{B}^+(R)$. *При этом если* $d>0$, *то решение гарантированно нетривиальное.*

Доказательство. Уравнение равновесия имеет вид $Q=\mathcal{B}Q-\mathcal{D}Q-\mathcal{R}Q$. По лемме 6 оператор $\mathcal{B}-\mathcal{D}$ компактен, а по лемме 7 оператор $-\mathcal{R}$ сжимающий в $\mathfrak{B}^+(R)$. Если мы сможем показать, что при любых $Q_1,Q_2\in\mathfrak{B}^+(R)$ выполнено

$$\mathcal{B}Q_1-\mathcal{D}Q_1-\mathcal{R}Q_2\in\mathfrak{B}^+(R),$$

то по теореме 1 исходное уравнение будет иметь хотя бы одну неподвижную точку в $\mathfrak{B}^+(R)$. Лемма 8 гарантирует, что указанное выражение будет неотрицательным. Остаётся убедиться, что оно по норме не превосходит R.

Исследуем оценку снизу из леммы 2. Принимая во внимание выражение для R, имеем

$$1+\frac{R}{\mu_w}<1+\frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{\beta+\gamma},$$

т.е.

$$\widetilde{\alpha}+\frac{\widetilde{\beta}}{1+R/\mu_w}>\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}+\frac{\beta/(\alpha+\gamma)}{1+\alpha/(2\beta+2\gamma)}=\frac{\alpha(\alpha+2\beta+2\gamma)+2\beta(\beta+\gamma)}{(\alpha+\gamma)(\alpha+2\beta+2\gamma)}=\xi.$$

Это значит, что при любом $Q\in\mathfrak{B}^+(R)$ и любом $x\in\mathbb{R}^n$ верна оценка

$$\frac{1}{D(Q,x)}<\frac{1}{d+\xi(b-d)}.$$

Пусть $Q_1\in\mathfrak{B}^+(R)$, тогда после применения теоремы Фубини, стандартных интегральных неравенств и указанной выше оценки получим

$$\|\mathcal{B}Q_1\|_{L_1}<\frac{b}{d+\xi(b-d)}\bigg(\frac{s(1+R/\mu_w)}{b-d}+R\bigg).$$

С другой стороны,
$$\|\mathcal{D}Q_1\|_{L_1}\geqslant 0,\quad \|\mathcal{R}Q_2\|_{L_1}\geqslant 0.$$
С учётом неотрицательности выражения и неотрицательности каждого из его составляющих имеем
$$\|\mathcal{B}Q_1-\mathcal{D}Q_1-\mathcal{R}Q_2\|_{L_1}\leqslant\|\mathcal{B}Q_1\|_{L_1}-\|\mathcal{D}Q_1\|_{L_1}-\|\mathcal{R}Q_2\|_{L_1}\leqslant\|\mathcal{B}Q_1\|_{L_1}.$$
Для выполнения теоремы достаточно, чтобы последнее выражение не превосходило R, а это будет выполнено, по крайней мере, если
$$\frac{b}{d+\xi(b-d)}\left(\frac{s(1+R/\mu_w)}{b-d}+R\right)\leqslant R.$$
Домножим обе части неравенства на $d+\xi(b-d)$, перегруппируем слагаемые, а также подставим явное выражение для R:
$$\frac{bs}{b-d}\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{\beta+\gamma}\right)\leqslant\frac{\mu_w}{2}\,\frac{\alpha}{\beta+\gamma}(\xi-1)(b-d),$$
при этом
$$\xi-1=\frac{2(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)-\alpha\gamma}{(\alpha+\gamma)(\alpha+2\beta+2\gamma)}>0.$$
В итоге
$$\frac{bs}{(b-d)^2}\,\frac{\alpha+2\beta+2\gamma}{\alpha(\xi-1)}\leqslant\mu_w,$$
что равносильно условию (14).

Таким образом, в $\mathfrak{B}^+(R)$ уравнение равновесия имеет решение. Допустим, что оно тривиально, т.е. $Q=\theta$. Тогда
$$\theta(x)=\frac{b}{D(\theta,x)}\left(\frac{sm(x)}{b-d}+0\right)-\frac{s}{D(\theta,x)}(w(x)+0)-\frac{b-d}{\mu_w D(\theta,x)}(0+0)=\frac{s}{D(\theta,x)}\left(\frac{bm(x)}{b-d}-w(x)\right),$$
где
$$D(\theta,x)=sw(x)+\widetilde{\alpha}b+\widetilde{\gamma}d+\widetilde{\beta}(b-d)>0.$$
Домножив обе части уравнения на $D(\theta,x)/s$ и проинтегрировав по всему пространству $\mathbb{R}^n$, получим
$$0=\frac{b}{b-d}-1,$$
что возможно, только если $d=0$, т.е. в рамках теоремы решение уравнения равновесия нетривиально. Теорема доказана.

Пример выполнения условий теоремы. Рассмотрим одномерный случай. Пусть $d=b/100$, $s=b/300$, $\alpha=5\gamma$, $\beta=2\gamma$, $\gamma>0$, $r_m=10/33$, $r_w=3/10$. При этих условиях $\mu_m=2r_m=20/33$, $\mu_w=2r_w=3/5$ и $R=(\mu_w/2)(\alpha/(\beta+\gamma))=1/2$. Тогда
$$2(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)-\alpha\gamma=2\gamma\cdot 3\gamma-5\gamma\cdot\gamma=\gamma^2>0,$$
$$\frac{b}{b-d}=\frac{100}{99}=\frac{\mu_m}{\mu_w}\geqslant 1,\quad \widetilde{\gamma}=\frac{1}{6}<\widetilde{\beta}=\frac{1}{3}=\frac{1}{2+2R},$$
$$\frac{bs}{(b-d)^2}\,\frac{\alpha+\gamma}{\alpha}\,\frac{(\alpha+2\beta+2\gamma)^2}{2(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)-\alpha\gamma}=\frac{100}{3\cdot 99\cdot 99}\,\frac{6}{5}\,\frac{121}{1}=\frac{4840}{9801}<\frac{3}{5}=\mu_w.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведён анализ разрешимости уравнения (10), описывающего соотношение первого и второго равновесных пространственных моментов при трёхпараметрическом замыкании второго порядка вида (4) в случае, когда пространственная неоднородность разброса и конкуренции задаётся функциями наиболее простой структуры (6). Отметим, что хотя в работах, опубликованных ранее (см., например, [6, 7]), проводился анализ более сложных случаев, выбор кусочно-постоянных ядер позволил максимально упростить уравнение, что дало возможность провести более точное исследование его свойств.

Показано, что оператор, задаваемый уравнением равновесия (10), можно представить в виде суммы компактного и сжимающего операторов, действующих на множестве неотрицательных функций из пространства $L_1(\mathbb{R}^n)$, ограниченных по норме некоторым числом R. Определены достаточные условия на биологические параметры модели, описывающие плодовитость, агрессивность и смертность, а также параметры замыкания, гарантирующие существование нетривиального равновесия.

Отметим, что были найдены лишь достаточные условия разрешимости уравнения равновесия, поэтому поиск необходимых условий (а также анализ устойчивости решения по параметрам модели) может стать перспективным направлением дальнейших исследований. Немаловажной задачей является и анализ единственности решения. Кроме того, вид уравнения позволяет предполагать, что по крайней мере при некоторых наборах параметров его решение можно получить в явном виде.

Авторы выражают благодарность У. Дикману и Е. Галкину за постановку задачи и плодотворные обсуждения результатов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Результаты пп. 1, 2 настоящей работы получены Никитиным А.А. при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00042). Результаты пп. 3, 4 получены авторами при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Law, R. Moment approximations of individual-based models / R. Law, U. Dieckmann // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity. — Cambridge : Cambridge University Press, 2000. — P. 252–270.
2. Dieckmann, U. Relaxation projections and the method of moments / U. Dieckmann, R. Law // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity. — Cambridge : Cambridge University Press, 2000. — P. 412–455.
3. Николаев, М.В. Исследование разрешимости системы нелинейных интегральных уравнений, возникающей в модели логистической динамики в случае кусочно-константных ядер / М.В. Николаев, А.А. Никитин, У. Дикман // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2024. — Т. 515, № 1. — P. 44–49.
4. Murrell, D. On moment closures for population dynamics in continuous space / D. Murrell, U. Dieckmann, R. Law // J. Theor. Biol. — 2004. — V. 229, № 3. — P. 421–432.
5. Красносельский, М.А. Два замечания о методе последовательных приближений / М.А. Красносельский // Успехи мат. наук. — 1955. — Т. 10, № 1 (63). — С. 123–127.

6. Николаев, М.В. Принцип Лере–Шаудера в применении к исследованию одного нелинейного интегрального уравнения / М.В. Николаев, А.А. Никитин // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 9. — С. 1209–1217.
7. Николаев, М.В. Применение специальных функциональных пространств к исследованию нелинейных интегральных уравнений, возникающих в равновесной пространственной логистической динамике / М.В. Николаев, А.А. Никитин, У. Дикман // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2021. — Т. 499, № 1. — С. 35–39.

ON THE EXISTENCE OF EQUILIBRIUM IN THE DIECKMANN–LAW'S MODEL IN THE CASE OF THE PIECEWISE CONSTANT KERNELS

 M. V. Nikolaev[1], A. A. Nikitin[2]

[1,2]Lomonosov Moscow State University, Russia
[2]V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia
e-mail: [1]nikolaev.mihail@inbox.ru, [2]nikitin@cs.msu.ru

The logistic dynamics model developed by U. Dieckmann and R. Law is considered in the article. The analysis of a nonlinear integral equation describing the equilibrium state of a single-species community with a three-parameter closure of the third spatial moment is carried out in the case when the dispersion and competition kernels are piecewise constant functions. Sufficient conditions for the mentioned equation solvability are established.

Keywords: nonlinear integral equation, population dynamics

FUNDING

The results in Sections 1, 2 were obtained by A. Nikitin with financial support from the Russian Science Foundation, project no. 22-11-00042. The results in Sections 3, 4 were obtained by the authors with support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-284.

REFERENCES

1. Law, R. and Dieckmann, U., Moment approximations of individual-based models, in *The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity*, Cambridge: Cambridge University Press, 2000, p. 252–270.
2. Dieckmann, U. and Law, R., Relaxation projections and the method of moments, in *The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity*, Cambridge: Cambridge University Press, 2000, p. 412–455.
3. Nikolaev, M.V., Nikitin, A.A., and Dieckmann, U., Solvability analysis of the nonlinear integral equations system arising in the logistic dynamics model in the case of piecewise constant kernels, *Dokl. Math.*, 2024, vol. 109, no. 1, pp. 33–37.
4. Murrell, D., Dieckmann, U., and Law, R., On moment closures for population dynamics in continuous space, *J. Theor. Biol.*, 2004, vol. 229, no. 3, pp. 421–432.
5. Krasnosel'skii, M.A., Two remarks on the method of successive approximations, *Usp. Mat. Nauk*, 1955, vol. 10, no. 1 (63), pp. 123–127.
6. Nikolaev, M.V. and Nikitin, A.A., The Leray–Schauder principle applied to the study of a nonlinear integral equation, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 9, pp. 1164–1173.
7. Nikolaev, M.V., Dieckmann, U., and Nikitin, A.A., Application of special function spaces to the study of nonlinear integral equations arising in equilibrium spatial logistic dynamics, *Dokl. Math.*, 2021, vol. 104, no. 1, pp. 188–192.