

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968+517.956.22

ОБЪЁМНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ НИЗКОЧАСТОТНОГО
РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
В АНИЗОТРОПНЫХ СТРУКТУРАХ© 2024 г. А. Б. Самохин¹, А. С. Самохина², И. А. Юрченков³^{1,3}МИРЭА — Российский технологический университет, г. Москва²Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москваe-mail: ¹absamokhin@yandex.ru, ²asamokhina@yandex.ru, ³yurchenkov@mirea.ru

Поступила в редакцию 18.04.2024 г., после доработки 18.04.2024 г.; принята к публикации 04.06.2024 г.

Изучен спектр интегральных операторов объёмных сингулярных интегральных уравнений, описывающих задачи низкочастотного рассеяния электромагнитных волн в ограниченных трёхмерных анизотропных структурах. Представлена в явном виде область расположения спектра оператора на комплексной плоскости для низкочастотного случая. Описан обобщённый метод простой итерации, для применения которого необходимо знание области расположения спектра оператора на комплексной плоскости. Для дискретизации интегральных уравнений применён метод коллокации на равномерной сетке, что позволило, используя быстрое дискретное преобразование Фурье, построить алгоритм быстрого умножения матрицы системы линейных уравнений на вектор. Приведены результаты численного решения рассматриваемых задач.

Ключевые слова: объёмное интегральное уравнение, быстрое преобразование Фурье, обобщённый метод простой итерации, спектр оператора

DOI: 10.31857/S0374064124090035, EDN: JYFDCO

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматриваются объёмные сингулярные интегральные уравнения, для решения которых можно использовать только численные методы. В этом случае интегральные уравнения должны быть аппроксимированы системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), при этом размерность матрицы СЛАУ, как правило, очень велика. Основными критериями эффективности вычислительного алгоритма решения СЛАУ являются число T арифметических операций для решения с заданной точностью и объём M требуемой памяти при реализации алгоритма. Для большинства реальных задач использование прямых методов решения СЛАУ практически невозможно, так как приводит к значительным вычислительным затратам. При использовании итерационных методов указанные критерии эффективности описываются следующими формулами:

$$M \sim M_A, \quad T \sim LT_A, \quad (1)$$

где M_A — количество элементов массива чисел, которые необходимы для алгоритма умножения матрицы СЛАУ на вектор; L — количество итераций для получения решения с заданной точностью; T_A — число арифметических операций для умножения матрицы СЛАУ на вектор. Для плотных матриц произвольного вида $M_A = N^2$, $T_A \sim N^2$. Однако для плотных матриц,

обладающих определёнными свойствами, эти величины могут быть значительно меньше. Нашей целью при построении вычислительных алгоритмов является минимизация величин L и T_A .

Ниже будем рассматривать задачи рассеяния, в которых диаметр области неоднородности (*диаметром области* называется максимальное расстояние между точками границы) значительно меньше длины волны электромагнитного поля. Тогда можно описать в явном виде область расположения спектра оператора интегрального уравнения на комплексной плоскости [1, с. 117–119; 2]. Поэтому для численного решения задачи можно использовать обобщённый метод простой итерации, который имеет в этом случае хорошую сходимость. Для дискретизации рассматриваемых интегральных уравнений будем применять метод коллокации на равномерной сетке, тогда матрица получившейся СЛАУ будет иметь структуру, близкую к теплоцевой. Далее, используя алгоритмы дискретного преобразования Фурье, получим значение T_A практически пропорциональным размерности матрицы СЛАУ. Численные результаты подтверждают эффективность предлагаемых вычислительных алгоритмов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующий класс задач электродинамики. В конечной трёхмерной области Q среда характеризуется тензор-функцией диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$, вне Q диэлектрическая проницаемость постоянна и изотропна, т.е. $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$ и везде $\mu = \mu_0 = \text{const}$. Требуется определить электромагнитное поле, возбуждаемое в данной среде внешним полем $\vec{E}^0$ с временной зависимостью в виде множителя $\exp\{-i\omega t\}$. Соответствующая математическая задача формулируется следующим образом: найти векторные функции $\vec{E}$ и $\vec{H}$, удовлетворяющие уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E} + \vec{J}_E^0, \quad \text{rot } \vec{E} = i\omega\mu_0\vec{H} - \vec{J}_H^0 \quad (2)$$

и условию излучения на бесконечности. В уравнениях (2) $\vec{J}_E^0, \vec{J}_H^0$ — сторонние токи, порождающие внешнее поле $\vec{E}^0$.

Поставленная задача может быть сведена к объёмному сингулярному интегральному уравнению относительно электрического поля $\vec{E}$ в области неоднородности Q [1, с. 22; 3]:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x) + \frac{1}{3}(\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I})\vec{E}(x) - p.v. \int_Q ((\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{E}(y), \text{grad}) \text{grad } G(R) dy - \\ - k_0^2 \int_Q (\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{E}(y)G(R) dy = \vec{E}^0(x), \quad x \in Q, \end{aligned} \quad (3)$$

где символ $p.v.$ обозначает сингулярный интеграл [4, § 1], т.е. интеграл за вычетом бесконечно малого шара в окрестности точки $y = x$; $G(R)$ — функция Грина для уравнения Гельмгольца:

$$\begin{aligned} G(R) = \exp\{ikR\}/(4\pi R), \quad R = |x - y|, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3); \\ \hat{\varepsilon}_r = \hat{\varepsilon}/\varepsilon_0; \quad k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}. \end{aligned} \quad (4)$$

2. СПЕКТР ОПЕРАТОРА

Спектром оператора $\hat{A}$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ называется множество таких точек λ , при которых оператор $\hat{A} - \lambda\hat{I}$ не имеет всюду определённого обратного оператора в гильбертовом пространстве H [3]. Точки λ , при которых оператор $\hat{A} - \lambda\hat{I}$ не является нётеровым оператором, принадлежат непрерывной части спектра оператора $\hat{A}$. Точки λ , при

которых существует нетривиальное решение уравнения $\hat{A}u - \lambda u = 0$, принадлежат дискретной части спектра оператора $\hat{A}$.

Запишем интегральный оператор уравнения (3) в символическом виде:

$$\hat{A}u \equiv u - \hat{S}(\hat{\varepsilon}_r - \hat{I}u), \quad (5)$$

где $\hat{S}$ — символическая запись интегрального оператора, $\hat{I}$ — единичный оператор, u — некоторый элемент гильбертова пространства. Очевидно, что

$$\hat{A} - \lambda \hat{I} = (1 - \lambda) \left[\hat{I} - \hat{S} \left(\frac{\hat{\varepsilon}_r - \lambda \hat{I}}{1 - \lambda} - \hat{I} \right) \right]. \quad (6)$$

Из работ [2, 5] следует, что непрерывной части спектра оператора уравнения (3) принадлежит множество точек σ_1 на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, определяемое формулой

$$\lambda = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{n,m=1}^3 \varepsilon_{nm}(x) \beta_n \beta_m, \quad x \in Q, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1. \quad (7)$$

Из (7) ясно, что точка $\lambda = 1$ принадлежит σ_1 , поскольку (в силу гёльдер-непрерывности) на границе области Q тензор диэлектрической проницаемости становится скалярной величиной, т.е. $\varepsilon_{nm} = \delta_{nm} \varepsilon_0$.

Для изотропной среды имеем следующую формулу для точек непрерывного спектра:

$$\lambda = \varepsilon_r(x), \quad x \in Q.$$

Обозначим через σ односвязное множество на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, которое содержит σ_1 и имеет среди всех односвязных множеств наименьшую меру. В работе [3] доказано, что в области $\sigma^+ = \mathbb{C} \setminus \sigma$ оператор из уравнения (3) будет фредгольмовым. Значит, точки $\lambda \in \sigma^+$ либо относятся к резольвентному множеству оператора $\hat{A}$, либо принадлежат дискретному спектру оператора.

В общем случае не представляется возможным достаточно точно описать область локализации дискретного спектра оператора в уравнении (3). Однако в одном частном случае, но практически очень важном, это удаётся сделать.

Будем рассматривать задачи низкочастотного рассеяния электромагнитных волн, т.е. задачи, в которых диаметр области Q значительно меньше длины волны.

Уравнение (3) имеет смысл при волновом числе $k_0 = 0$, т.е. для статического случая. Это обстоятельство принципиально отличает трёхмерные задачи от двумерных, для которых стационарные интегральные уравнения не допускают перехода к статическому случаю. Из уравнения (3) следует равенство

$$(\hat{A}(k_0) - \hat{A}(0))\vec{V} = -k_0^2 \int_Q (\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{V}(y)G(R) dy - \int_Q ((\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{V}(y), \text{grad}) \text{grad } G_0(R) dy, \quad (8)$$

где $\hat{A}(k_0)$ и $\hat{A}(0)$ — операторы интегральных уравнений для стационарного и статического случаев соответственно, а $G_0(R)$ определяется формулой

$$G_0(R) = \frac{\exp\{ik_0 R\} - 1}{4\pi R}.$$

Второй интегральный оператор в (8) не является сингулярным, поскольку ядро этого оператора не имеет особенностей и является гладкой функцией координат. Поэтому из (8) следует, что

$$\lim_{k_0 \rightarrow 0} \|\hat{A}(k_0) - \hat{A}(0)\| = 0.$$

Значит, имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Спектр интегрального оператора $\hat{A}(k_0)$ стремится к спектру оператора $\hat{A}(0)$, когда $k_0 \rightarrow 0$.*

Для статического случая интегро-дифференциальное уравнение, эквивалентное интегральному уравнению (3), записывается в следующем виде:

$$\vec{E}(x) - \text{grad} \operatorname{div} \int_Q (\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I}) \vec{E}(y) (1/(4\pi R)) dy = \vec{E}^0(x). \quad (9)$$

Решение однородного уравнения (9) удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div}(\hat{\varepsilon}_r \vec{E}) = 0,$$

которые сводятся к дифференциальному уравнению второго порядка относительно скалярной функции φ :

$$\operatorname{div}(\hat{\varepsilon}_r \operatorname{grad} \varphi) = 0, \quad (10)$$

где $\operatorname{grad} \varphi = \vec{E}$.

Пусть ψ — всюду определённая дифференцируемая функция. Имеем очевидное тождество

$$\operatorname{div}(\psi \hat{\varepsilon}_r \operatorname{grad} \varphi) = \psi \operatorname{div}(\hat{\varepsilon}_r \operatorname{grad} \varphi) + (\operatorname{grad} \psi, \hat{\varepsilon}_r \operatorname{grad} \varphi). \quad (11)$$

Положим $\psi = \bar{\varphi}$. Тогда, интегрируя (11) по всему пространству и учитывая (10), а также теорему о дивергенции, получаем интегральное соотношение

$$\int (\hat{\varepsilon}_r \operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \varphi) d\nu = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \bar{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \quad (12)$$

где S_R — сфера радиуса R с центром в начале координат, n — нормаль к сфере. Поскольку φ — гармоническая функция вне области Q , то в окрестности бесконечно удалённой точки $\bar{\varphi} \partial \varphi / \partial n$ убывает не медленнее, чем R^{-3} . Следовательно, предел в правой части (12) равен нулю и любое решение однородного уравнения (10), а значит, и однородного уравнения (9) с $\vec{E} = \operatorname{grad} \varphi$, удовлетворяет интегральному соотношению

$$\int (\hat{\varepsilon}_r \operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \varphi) d\nu = 0. \quad (13)$$

Из (6) ясно, что λ будет точкой дискретного спектра оператора уравнения (9), если существует ненулевое решение $\varphi(\lambda, x)$ уравнения (10) с диэлектрической проницаемостью

$$\hat{\varepsilon}_r^+(\lambda, x) = \frac{\hat{\varepsilon}_r(x) - \lambda \hat{I}}{1 - \lambda}. \quad (14)$$

Тогда из (13), (14) следует, что соответствующие значения λ определяются формулой

$$\lambda = \frac{\int (\hat{\varepsilon}_r \operatorname{grad} \varphi(\lambda), \operatorname{grad} \varphi(\lambda)) d\nu}{\int |\operatorname{grad} \varphi|^2 d\nu}. \quad (15)$$

Очевидно, что найти соответствующие функции $\varphi(\lambda, x)$ не представляется возможным. Однако с помощью (6) можно определить область локализации точек дискретного спектра на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Рассмотрим сначала изотропный случай. Из (15) имеем, что точки дискретного спектра описываются формулой

$$\lambda = \frac{\int \varepsilon_r |\operatorname{grad} \varphi|^2 d\nu}{\int |\operatorname{grad} \varphi|^2 d\nu}. \quad (16)$$

Выражение (16) напоминает формулу для центра масс плоской фигуры, который может находиться только внутри выпуклой оболочки плоской фигуры. Аналогично можно показать, что значения λ находятся только внутри выпуклой оболочки области значений диэлектрической проницаемости $\varepsilon_r(x)$, $x \in Q$, т.е. внутри выпуклой оболочки множества σ_1 . Обозначим это множество через σ_0 . Очевидно, что $\sigma \subseteq \sigma_0$. Значит, в области $\mathbb{C} \setminus \sigma_0$ могут быть только точки дискретного спектра. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Для случая изотропной среды весь спектр оператора уравнения (9), а значит, и сингулярного оператора уравнения (3) при $k_0 = 0$, находится внутри области σ_0 комплексной плоскости.*

Отметим, что область σ_0 зависит только от значений диэлектрической проницаемости, но не зависит от геометрических характеристик области Q .

Для анизотропного случая ситуация сложнее ввиду выражения (15). Представим тензор-функцию $\hat{\varepsilon}_r(x)$ в следующем виде:

$$\hat{\varepsilon}_r(x) = \hat{\delta}_1(x) + i\hat{\delta}_2(x), \quad \hat{\delta}_1(x) = \frac{\hat{\varepsilon}_r(x) + \hat{\varepsilon}_r^*(x)}{2}, \quad \hat{\delta}_2(x) = \frac{\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{\varepsilon}_r^*(x)}{2i},$$

где символ $*$ обозначает тензор, сопряжённый к тензору $\hat{\varepsilon}_r(x)$. Очевидно, что тензоры $\hat{\delta}_1$ и $\hat{\delta}_2$ являются эрмитовыми для всех точек $x \in Q$, а значит, их собственные числа вещественные. Обозначим через $a_{\min}^{(1)}(x)$, $a_{\max}^{(1)}(x)$ и $a_{\min}^{(2)}(x)$, $a_{\max}^{(2)}(x)$ минимальные и максимальные собственные числа эрмитовых тензор-функций $\hat{\delta}_1(x)$ и $\hat{\delta}_2(x)$ соответственно.

Теорема 2. *Весь спектр оператора уравнения (9), а значит, и сингулярного оператора уравнения (3) при $k_0 = 0$, лежит внутри прямоугольника, стороны которого параллельны осям комплексной плоскости, а левая нижняя и правая верхняя вершины имеют координаты $(A_{\min}^{(1)}, A_{\min}^{(2)})$, $(A_{\max}^{(1)}, A_{\max}^{(2)})$, где $A_{\min}^{(n)} = \min a_{\min}^{(n)}(x)$, $A_{\max}^{(n)} = \max a_{\max}^{(n)}(x)$, $n = 1, 2$, $x \in Q$.*

Данное утверждение доказано в работе [1, с. 84]. Отметим, что теорема 2 даёт менее точную информацию об области локализации спектра по сравнению с изотропным случаем. Из теорем 1 и 2 следует, что если среда не имеет потерь, то весь спектр оператора находится вблизи отрезка на действительной оси комплексной плоскости.

Таким образом, теоремы 1 и 2 позволяют использовать полученную информацию о спектре и для задач низкочастотного рассеяния. Информация о спектре оператора имеет большое значение при построении эффективных численных методов и алгоритмов решения.

3. ОБОБЩЁННЫЙ МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Для численного решения задач низкочастотного рассеяния электромагнитных волн будем использовать обобщённый метод простой итерации [1, с. 109–120; 3]. Опишем этот метод.

В банаховом пространстве E будем рассматривать линейное операторное уравнение

$$\hat{A}u = f, \tag{17}$$

где $\hat{A}$ — ограниченный, а значит, и непрерывный оператор.

Запишем уравнение (17) в эквивалентном виде

$$u - \hat{B}_\mu u = f/\mu, \tag{18}$$

здесь линейный оператор

$$\hat{B}_\mu = \frac{\mu \hat{I} - \hat{A}}{\mu}, \tag{19}$$

$\mu \neq 0$ — произвольное комплексное число.

Определение. *Спектральным радиусом оператора $\hat{B}$ называется число, определяемое формулой*

$$\rho_0 = \sup |\eta|, \quad \eta \in \sigma(\hat{B}),$$

где $\sigma(\hat{B})$ — спектральное множество оператора $\hat{B}$ на комплексной плоскости, т.е. множество таких точек, при которых оператор не имеет всюду определённого обратного оператора.

В теории линейных операторов доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Линейное операторное уравнение $u - \hat{B}u = f$ имеет единственное решение при любом $f \in E$ и последовательные приближения $u_{n+1} = \hat{B}u_n + f$, $n = 0, 1, \dots$, сходятся к решению при любом начальном приближении $u_0 \in E$, если спектральный радиус оператора $\rho_0(\hat{B}) < 1$. При этом для сходимости итераций справедлива оценка*

$$\|u_n - u\| \leq C[\rho_0(\hat{B})]^n, \quad C = \text{const}. \quad (20)$$

Из теоремы 3 следует, что последовательные приближения

$$u_{n+1} = \hat{B}_\mu u_n + f/\mu, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (21)$$

сходятся к решению уравнения (18), а значит, и к (17), при любых $u_0, f \in E$, если спектральный радиус оператора $\hat{B}_\mu$ меньше единицы, т.е.

$$\rho_0(\mu) = \sup |\eta(\mu)| < 1, \quad \eta(\mu) \in \sigma(\hat{B}_\mu).$$

Из (19) ясно, что итерации (21) можно представить в следующем виде:

$$u_{n+1} = u_n - (\hat{A}u_n - f)/\mu, \quad n = 0, 1, \dots \quad (22)$$

Далее ответим на вопрос: при каком расположении спектра исходного оператора $\hat{A}$ на комплексной плоскости можно указать такие комплексные числа μ , при которых итерации (22) сходятся к решению уравнения (17)? Несложно доказать следующее утверждение.

Лемма 2. *Между точками спектра оператора $\hat{A}$ и точками спектра оператора $\hat{B}_\mu$ существует взаимно-однозначное соответствие, которое задаётся формулой*

$$\eta = \frac{\mu - \lambda}{\mu}, \quad \lambda \in \sigma(\hat{A}), \quad \eta \in \sigma(\hat{B}_\mu). \quad (23)$$

Теорема 4. *Для существования комплексных μ , при которых итерации (22) сходятся к решению уравнения (17) при любых $u_0, f \in E$, необходимо и достаточно, чтобы начало координат комплексной плоскости находилось вне выпуклой оболочки спектра оператора $\hat{A}$.*

Доказательство данной теоремы представлено в работе [1, с. 111]. Пусть в рамках рассмотрения итерационного метода выполняется условие теоремы 4. Тогда естественно возникает вопрос нахождения итерационного параметра μ_0 , при котором сходимость итераций будет наилучшей. Из теоремы 3 следует, что итерации (22) будут сходиться к решению со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой определяется как

$$\rho_0(\mu) = \frac{\sup |\mu - \lambda|}{|\mu|}, \quad \lambda \in \sigma(\hat{A}). \quad (24)$$

Сходимость итераций будет наилучшей при таком значении μ , при котором функция $\rho_0(\mu)$ принимает наименьшее значение. Обозначим через S_μ круг на комплексной плоскости наименьшего радиуса R с центром в точке μ , которому принадлежат все точки спектра оператора $\hat{A}$. Очевидно, что $R = \sup |\mu - \lambda|$, $\lambda \in \sigma(\hat{A})$. Проведём из начала координат касательные к кругу S_μ , а угол между ними обозначим α . Тогда из (24) следует, что $\rho_0(\mu) = \sin(\alpha/2)$. Таким образом, доказана следующая

Теорема 5. Пусть начало координат на комплексной плоскости находится вне выпуклой оболочки спектра оператора $\hat{A}$. Обозначим через S_0 такой круг на комплексной плоскости, который содержит все точки спектра оператора $\hat{A}$ и “виден” из начала координат под наименьшим углом α_0 . Тогда наилучшая сходимость итераций (22) к решению уравнения (17) будет при комплексной величине μ_0 , которая является центром круга S_0 . При этом итерации будут сходиться к решению как геометрическая прогрессия со знаменателем $\rho_0 = \sin(\alpha_0/2)$.

Заметим, что если $\hat{A}$ — самосопряжённый и положительно определённый оператор, то изложенный метод хорошо известен. В этом случае спектр оператора находится на положительной части действительной оси комплексной плоскости. Тогда из теоремы 5 сразу получаем, что $\mu_0 = (M + m)/2$, где M и m — верхняя и нижняя границы спектра, что совпадает с классическим результатом.

Рассмотрим случай, когда спектр оператора лежит на прямолинейном отрезке, не содержащем начало координат. Отметим, что если отрезок лежит на луче, исходящем из начала координат, то центр искомого круга находится в середине отрезка. Рассмотрим общий случай расположения отрезка на комплексной плоскости. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ — точки на комплексной плоскости, обозначающие концы отрезка. Искомая окружность содержит хорду, проходящую через точки z_1 и z_2 , так как в противном случае можно построить окружность, которая будет видна из начала координат под меньшим углом, значит центр искомого окружности находится на прямой, перпендикулярной указанной хорде и проходящей через её середину.

Проводя соответствующие выкладки [1, с. 115–117], получаем значение μ_0 для произвольного прямолинейного отрезка, не содержащего начало координат:

$$\mu_0 = \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{i[Im(z_1 \bar{z}_2)(z_2 - z_1)]}{2[|z_1 \bar{z}_2| + Re(z_1 \bar{z}_2)]}.$$

Заметим, что геометрически точка μ_0 является точкой пересечения срединного перпендикуляра к заданному отрезку и окружности, проходящей через концы отрезка и начало координат. Радиус построенного круга S_0 с центром в точке μ_0 определяется формулой

$$R_0^2 = \frac{|z_1 - z_2|^2 |\bar{z}_1 z_2|}{2[|\bar{z}_1 z_2| + Re(\bar{z}_1 z_2)]}.$$

Отметим, что почти все доказательства для рассматриваемого итерационного метода были геометрическими, поскольку использование чисто аналитических методов для несамосопряжённого случая весьма затруднительно. Также поступим при построении конечного алгоритма нахождения искомого круга S_0 и соответствующего итерационного параметра μ_0 для заданной выпуклой оболочки спектра, не содержащей начало координат.

Пусть выпуклая оболочка спектра — произвольный выпуклый n -угольник на комплексной плоскости, что с практической точки зрения не ограничивает общность. Геометрически несложно показать, что по крайней мере две вершины многоугольника должны находиться на границе круга S_0 .

Для выпуклого многоугольника с числом вершин n опишем конечный алгоритм нахождения искомого круга S_0 , а значит, и наилучшего итерационного параметра μ_0 .

Шаг А. Число всех отрезков, соединяющих вершины многоугольника, равно $n(n-1)/2$. Последовательно рассматриваем эти отрезки и для каждого из них строим наилучший круг S_0 . Если для какого-либо отрезка окажется, что построенный круг содержит весь многоугольник, то это будет искомым круг и алгоритм заканчивается. Если ни один построенный круг не содержит весь многоугольник, то переходим к шагу В.

Шаг В. Круг S_0 проходит через три вершины многоугольника. Число всех возможных треугольников, построенных на вершинах n -угольника, равно $n(n-1)(n-2)/6$. Искомый круг S_0 будет описанным кругом вокруг одного или нескольких треугольников. Последовательно рассматриваем все треугольники и для тех описанных окружностей, которые содержат весь многоугольник и не содержат начало координат, вычисляем углы, под которыми они видны из начала координат. Выбираем круг, который виден под наименьшим углом. Алгоритм завершён.

Доказательство шага А. Пусть σ — выпуклый многоугольник, в частности, прямолинейный отрезок, не содержащий начало координат, а $S_0(\sigma)$ — такой круг, который содержит этот многоугольник и виден из начала координат под наименьшим углом $\alpha_0(\sigma)$. Рассмотрим два выпуклых многоугольника σ_1 и σ_2 , не содержащих начало координат, причём $\sigma_1 \subset \sigma_2$. Очевидно, что $\alpha_0(\sigma_1) \leq \alpha_0(\sigma_2)$. Обозначим через σ_1 какой-либо отрезок многоугольника, построенный на его вершинах, а через σ_2 — весь многоугольник. Несложно видеть, что если для отрезка окажется, что построенный круг содержит весь многоугольник, то $S_0(\sigma_1) = S_0(\sigma_2)$ и $\alpha_0(\sigma_1) = \alpha_0(\sigma_2)$.

Доказательство шага В. Предположим, что искомый круг $S_0(\sigma)$ имеет только две вершины z_1 и z_2 n -угольника, где $n \geq 3$ на границе $S_0(\sigma)$. Обозначим через $\mu_0(z_1, z_2)$ центр наилучшего круга для отрезка, соединяющего точки z_1 и z_2 . Поскольку алгоритм не закончился на шаге А, центр круга $S_0(\sigma)$ сдвинут по срединному перпендикуляру относительно точки $\mu_0(z_1, z_2)$. Согласно предположению вершины многоугольника, кроме z_1 и z_2 , находятся на конечном расстоянии от границы круга $S_0(\sigma)$. Тогда понятно, что, смещая центр круга $S_0(\sigma)$ в ту или другую сторону по срединному перпендикуляру к отрезку $[z_1, z_2]$, можно построить круг, который содержит внутри себя весь многоугольник и виден из начала координат под меньшим углом. Пришли к противоречию, откуда следует, что искомый круг $S_0(\sigma)$ имеет по крайней мере три вершины многоугольника на границе. Поскольку, согласно теореме 5, задача имеет решение, то по крайней мере одна окружность, описанная вокруг трёх вершин многоугольника, будет определять искомый круг $S_0(\sigma)$.

4. МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ И ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ

Перейдём к дискретизации интегрального уравнения (3), т.е. аппроксимации уравнения СЛАУ [6]. В прямоугольной декартовой системе координат определим параллелепипед Π , внутри которого находится область Q . Рёбра параллелепипеда параллельны осям координат, а длины ребер равны $N_l h_l$, $l = 1, 2, 3$, где h_l — шаги сетки по декартовым координатам.

Тогда параллелепипед Π можно представить как объединение ячеек (элементарных параллелепипедов) $\Pi(p)$, $p = (p_1, p_2, p_3)$, $p_l = \overline{0, N_l - 1}$. Определим область $\tilde{Q}$ как объединение N_Q ячеек, центры которых лежат внутри области Q . Узловые точки, в которых определяются значения функций, будем задавать в центрах ячеек и обозначать как $x(p)$, а значения функций в этих точках как $f(p)$.

Интегральное уравнение (3) будем аппроксимировать СЛАУ размерности $\sim N_Q$ относительно значений неизвестного поля $u(p)$ в узловых точках области Q :

$$u(p) - \sum_{y(q) \in Q} B(p-q) \eta(q) u(q) = u_0(p), \quad x(p) \in Q, \quad (25)$$

где

$$u(p) \equiv u(x(p)), \quad u_0(p) = u_0(x(p)), \quad u(q) \equiv u(y(q)),$$

$u(p)$ и $u_0(p)$ — векторы, а $B(p-q)$ и $\eta(q)$ — 3×3 -матрицы, которые определяются формулами

$$\eta_{mk}(q) = \varepsilon_{mk}(y(q)) - \delta_{mk},$$

$$B_{nm}(p-q) = \int_{\Pi_q} G(R) \left[\left(\frac{3}{R^2} - \frac{3ik_0}{R} - k_0^2 \right) \alpha_n \alpha_m + \left(k_0^2 + \frac{ik_0}{R} - \frac{1}{R^2} \right) \delta_{nm} \right] dy, \quad p \neq q,$$

$$R = \left(\sum_{i=1}^3 (y_i - x_i(p))^2 \right)^{1/2}, \quad \alpha_n = \frac{x_n(p) - y_n}{|x(p) - y|}, \quad n = 1, 2, 3.$$

Для кубической равномерной сетки $B_{nm}(0, 0, 0) = -(1/3)I$, где I — единичная матрица.

Поскольку узловые точки находятся в центре ячеек, точность аппроксимации интегрального оператора $\sim h^2$, $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}$.

Из (25) следует, что основные вычислительные затраты при умножении матрицы СЛАУ на вектор (выполнение одной итерации) связаны с вычислением сумм вида

$$W(p) = \sum_{y(q) \in Q} B(p-q)V(q), \quad x(p) \in Q. \quad (26)$$

Для вычисления $W(p)$ в узловых точках $x(p) \in Q$ требуется выполнить $\sim N_Q^2$ арифметических операций, где N_Q^2 — число узловых точек в области Q . Для уменьшения числа арифметических операций будем применять технику быстрого умножения теплицевых матриц на вектор [7, 8].

Доопределим функцию $V(q)$ нулём в точках $x(q)$ параллелепипеда Π , не принадлежащих области Q . Рассмотрим следующие суммы:

$$W(p_1, p_2, p_3) = \sum_{q_1=0}^{N_1-1} \sum_{q_2=0}^{N_2-1} \sum_{q_3=0}^{N_3-1} B(p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3) V(q_1, q_2, q_3). \quad (27)$$

Очевидно, что при $x(p) \in Q$ значения $W(p)$ из (26) и (27) совпадают. В (27) матричная функция дискретного аргумента $B(p)$ определена для значений

$$-(N_1 - 1) \leq p_1 \leq (N_1 - 1), \quad -(N_2 - 1) \leq p_2 \leq (N_2 - 1), \quad -(N_3 - 1) \leq p_3 \leq (N_3 - 1).$$

Обозначим через Π_2 параллелепипед со сторонами $2N_1h_1$, $2N_2h_2$ и $2N_3h_3$. Продолжим матричную функцию дискретного аргумента $B(p_1, p_2, p_3)$ на все целочисленные значения p_1 , p_2 , p_3 , полагая её периодической по каждой переменной с периодами, соответственно, $2N_1$, $2N_2$, $2N_3$. При этом доопределим функции нулём в точках, где она не определена. Далее доопределим функцию дискретного аргумента $V(p_1, p_2, p_3)$ нулём во всех узловых точках Π_2 , не принадлежащих Π , и продолжим её на все целочисленные значения p_1 , p_2 , p_3 , полагая её периодической по каждой переменной с периодами, соответственно, $2N_1$, $2N_2$, $2N_3$.

Рассмотрим выражение

$$W(p_1, p_2, p_3) = \sum_{q_1=0}^{2N_1-1} \sum_{q_2=0}^{2N_2-1} \sum_{q_3=0}^{2N_3-1} B(p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3) V(q_1, q_2, q_3). \quad (28)$$

Учитывая изложенное, получаем, что при $x(p) \in Q$ значения функций (26) и (28) совпадают. Ниже через Π и Π_2 будем обозначать целочисленные параллелепипеды с числом дискретных аргументов по каждой оси N_1 , N_2 , N_3 и $2N_1$, $2N_2$, $2N_3$ соответственно. Теперь, проводя

дискретное преобразование Фурье по каждой переменной от обеих частей (28), будем иметь следующее равенство:

$$W^F(k_1, k_2, k_3) = B^F(k_1, k_2, k_3)V^F(k_1, k_2, k_3), \quad k \in \Pi_2. \quad (29)$$

Таким образом, для выполнения одной итерации при решении СЛАУ (25) необходимо выполнить быстрое прямое преобразование Фурье-функции $V(p_1, p_2, p_3)$ по каждой переменной и обратное преобразование Фурье-функции $W^F(k_1, k_2, k_3)$ (преобразование функции $B^F(k_1, k_2, k_3)$ выполняется один раз до начала итерационной процедуры). Число арифметических операций и объём требуемой памяти для выполнения одной итерации оцениваются формулами

$$T_A \sim N \log(N), \quad M_A \sim N, \quad N = N_1 N_2 N_3,$$

где $\log(N)$ — целочисленный логарифм, т.е. сумма всех простых делителей числа N . При выборе шагов сетки и значений N_1, N_2, N_3 необходимо руководствоваться следующими критериями: во-первых, в пределах ячеек искомая функция мало меняется; во-вторых, область $\tilde{Q}$ состоит из ячеек, центры которых находятся внутри Q и достаточно хорошо её описывают.

Согласно (1) другим важным критерием эффективности алгоритма, помимо значения T_A , является число итераций L , которое требуется для нахождения решения с заданной точностью. В качестве примера рассмотрим значения L для низкочастотного рассеяния [9] на однородном анизотропном кристалле. Тензор диэлектрической проницаемости такого тела в декартовой системе координат, оси которых параллельны главным осям кристалла, представим, например, в виде $\varepsilon_{11} = 5, \varepsilon_{22} = 3, \varepsilon_{33} = 2$, а остальные компоненты тензора равны нулю. Тогда, согласно теореме 2, весь спектр оператора уравнения (3) лежит вблизи отрезка $[1, \text{с. 117; 5}]$ на действительной оси комплексной плоскости. В этом случае итерационный параметр для обобщённого метода простой итерации $\mu_0 = 3$. Тогда итерации (22) при $\mu = \mu_0 = 3$ будут сходиться к решению уравнения со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой равен $\rho_0 = 2/3$. При значении числа итераций $L = 40$ невязка решения задачи уменьшится в более чем миллион раз. Этот пример показывает эффективность использования обобщённого метода простой итерации для решения задач низкочастотного рассеяния.

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При проведении численных экспериментов для демонстрации возможностей предложенного подхода были рассмотрены два варианта исходной постановки задачи (3).

В первом варианте исследуется качество решения исходной задачи при неизменных физических параметрах (линейный размер объёмной области решения $l_n = 1, n = 1, 2, 3$, волновое число $k_0 = 1$) с изменением параметра степени дискретизации задачи N_Q в пределах от 10^4 до 10^6 разбиений. Будем рассматривать качество решения задачи (25) и сходимость итераций при изменении дискретизации области решения в случае постановки задачи как с затуханием в среде, т.е. при комплексных значениях коэффициентов тензора диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, так и без затухания, т.е. с вещественным тензором $\hat{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ в обоих случаях постоянным, для упрощения, на всей объёмной области решения [10].

В качестве функции внешнего излучения возьмём модель плоской волны, распространяющейся вдоль одной координаты, $\vec{E}^0(x) = f = (\exp\{ikx_1\}, 0, 0)$.

В рамках данного сравнительного моделирования обозначим критерий останова в виде метрики

$$\frac{\|u_{n+1} - u_n\|}{\|f\|} \leq 10^{-5}. \quad (30)$$

Данная метрика отслеживается в процессе итерационного метода (22), ограничивая число итераций вплоть до достижения заранее заданной точности приближённого решения. Также для итерационного метода возможно ограничивать сверху максимальное число итераций в качестве гиперпараметра метода.

На рис. 1 приведены результаты тестового моделирования задачи с диэлектрической проницаемостью среды $\hat{\varepsilon}_{11} = 5 + i3$, $\hat{\varepsilon}_{22} = 3 + i2$, $\hat{\varepsilon}_{33} = 2 + i1$ — графики сходимости итераций по метрике (30) в зависимости от числа итераций при различных значениях дискретизации объёмной области решения: $N_Q = 27\,000$ и 10^6 . Наблюдаются стабильное изменение ключевой метрики итерационного метода и равномерная сходимость, как и заявлено, с одним основанием геометрической прогрессии ρ_0 . По оси ординат была выбрана логарифмическая шкала с основанием 10 для более наглядной визуализации показательной сходимости итераций по метрике (30).

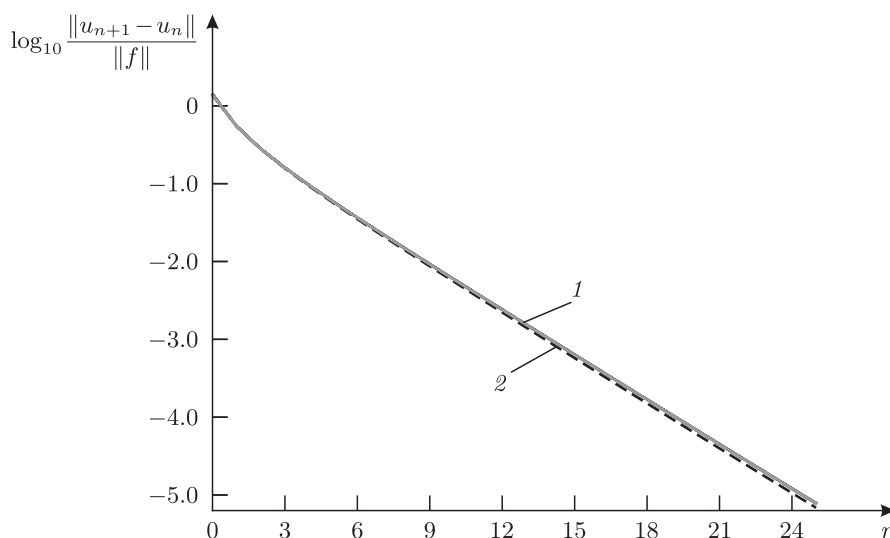


Рис. 1. График сходимости итераций при $k_0 = 1$: 1 — $N_Q = 27\,000$, $N_l = 30$, $l = 1, 2, 3$; 2 — $N_Q = 10^6$, $N_l = 100$, $l = 1, 2, 3$

Конечная полученная норма невязки $\|\hat{A}u_L - f\|$ для $N_l = 30$ равна $7.486 \cdot 10^{-6}$, а для $N_l = 100$ — $6.529 \cdot 10^{-7}$, что показывает повышение конечной точности решения.

В результате решения поставленной задачи (3), (4) на основе обобщённого метода простой итерации (22) получаем векторное поле приближённого решения $u_L \approx \vec{E}(x)$ в точках центров элементарных разбиений $x(p) \in Q$ исходного куба. Решение в виде массива векторов возможно визуализировать в виде векторного поля направлений полученного приближения электрического поля на области решения задачи. Сделаем это на срезе куба плоскостью $x_3 = 0$. Представленные визуализации для различной степени дискретизации исходной области решения показывают проекцию векторов на плоскость Ox_1x_2 .

На первой визуализации (рис. 2, а) показано векторное поле приближённого решения при $N_Q = 27\,000$, т.е. по 30 разбиений вдоль каждой оси при линейных размерах трёхмерной области $l_n = 1$, $n = 1, 2, 3$, с центром в точке $(0, 0, 0)$. Волновое число $k_0 = 1$, диэлектрическая проницаемость задана диагональным тензором диэлектрической проницаемости со значениями на диагонали $\varepsilon_{11} = 5 + i3$, $\varepsilon_{22} = 3 + i2$, $\varepsilon_{33} = 2 + i1$.

На второй визуализации (рис. 2, б) показано векторное поле приближённого решения при $N_Q = 125\,000$, т.е. по 50 разбиений вдоль каждой оси при тех же параметрах моделируемой задачи.

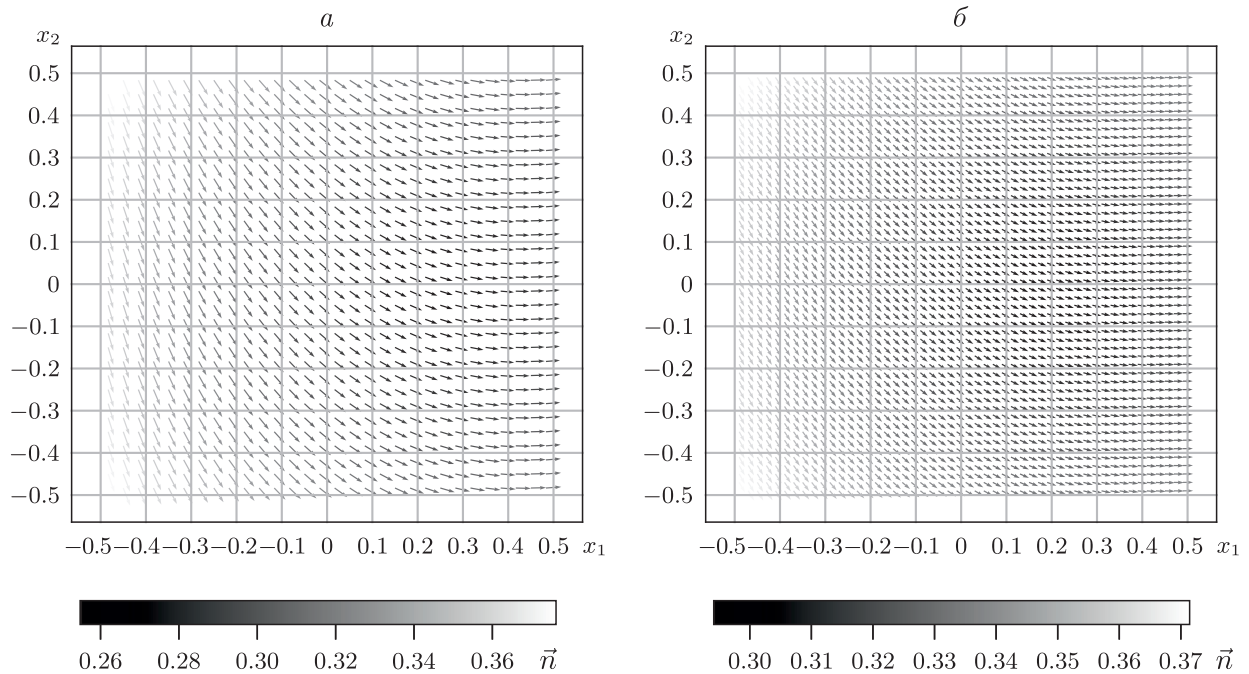


Рис. 2. Векторные поля приближения u_L при $N_l = 30$ (а) и $N_l = 50$ (б), $l = 1, 2, 3$

На визуализациях (см. рис. 2) моделировался квазистатический случай излучения, в котором колебания излучения незначительны по сравнению с мощностью волны. Видно, что при распространении волны в положительном направлении оси x_1 произошло преломление волны и её распространение продолжилось с уменьшением нормы векторов $\vec{n}$ векторного поля в точках центров элементарных разбиений. Приведённые визуализации векторного поля полученного решения качественно воспроизводятся при увеличении дискретизации задачи и становятся менее доступными для восприятия.

Во втором варианте исследуется зависимость сходимости итераций обобщённого итерационного метода от значения волнового числа. Приводятся картины сходимости зависимости метрики относительной нормы разности приближений (30) от числа итераций в каждом из предлагаемых точечных значений волнового числа. Картины сходимости исследуются на той же области решений при $N_Q = 27\,000$. На графике сходимостей (рис. 3) итераций для задачи с вещественным тензором $\hat{\epsilon}$ видим качественно отличающуюся картину для одной и той же постановки задачи при увеличении волнового числа k_0 : скорость сходимости итераций, а именно количество итераций обобщённого метода простой итерации, растёт для обеспечения требуемой точности $\|u_n - u_{n-1}\|/\|f\| < 10^{-5}$. Также видно, что сходимость имеет экспоненциальный характер, что показано линеаризацией зависимости в полулогарифмической шкале. Скорость сходимости итераций при различных значениях параметра волнового числа k_0 отличается основанием показательной монотонно убывающей функции сходимости, как и было показано в (20).

Приведём также картину сходимости итераций при тех же значениях волнового числа для комплексного тензора $\hat{\epsilon}$ (рис. 4). Видно, что для $k_0 \leq 2.75$ картина сходимости является убывающей. Это говорит о том, что задача в данном диапазоне значений параметра всё ещё является квазистатической, а также что спектр оператора лежит в границах окружности, образованной диагональными значениями тензора $\hat{\epsilon}$, или значение найденного итерационного параметра μ_0 всё ещё является подходящим для проведения итерационной процедуры, хотя

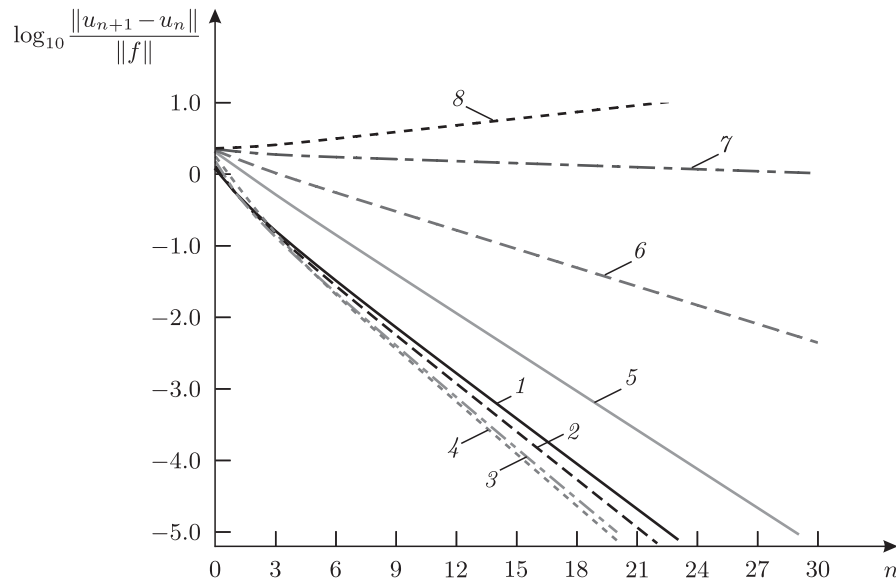


Рис. 3. Графики сходимости итераций для $\hat{\varepsilon}_{11} = 5 + i0$, $\hat{\varepsilon}_{22} = 3 + i0$, $\hat{\varepsilon}_{33} = 2 + i0$ при различных значениях волнового числа k_0 : 0.25 (кривая 1); 0.75 (кривая 2); 1.25 (кривая 3); 1.75 (кривая 4); 2.25 (кривая 5); 2.50 (кривая 6); 2.75 (кривая 7); 2.90 (кривая 8)

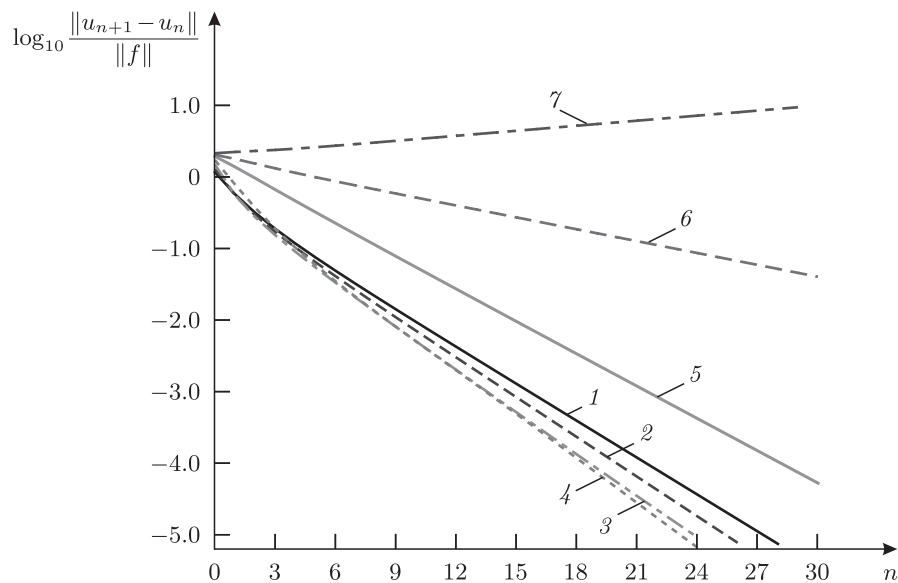


Рис. 4. Графики сходимости итераций для среды $\hat{\varepsilon}_{11} = 5 + i3$, $\hat{\varepsilon}_{22} = 3 + i2$, $\hat{\varepsilon}_{33} = 2 + i1$ при различных значениях волнового числа k_0 : 0.25 (кривая 1); 0.75 (кривая 2); 1.25 (кривая 3); 1.75 (кривая 4); 2.25 (кривая 5); 2.50 (кривая 6); 2.75 (кривая 7)

и не оптимальным. Для $k_0 < 2.25$ наблюдаем характер сходимости, схожий с характером сходимости для эксперимента в первом варианте (см. рис. 1) для значения $k_0 = 1$. Для $k_0 \in [2.25, 2.75)$ видим замедление темпов сходимости по метрике (30). Этот эффект может говорить о неоптимальном выборе параметра или увеличивающемся с его ростом радиусе выпуклой оболочки спектра оператора. При $k_0 > 2.75$ моделирование при заданных линейных размерах l_n , $n = 1, 2, 3$, и значениях $\hat{\varepsilon}$ невозможно.

При изменении параметра l (линейных размеров моделируемой кубической области) картины сходимости методов для фиксированного и изменяющегося значений k_0 будут совпадать. При увеличении линейных размеров области спектр исходного оператора из уравнения (3) будет “расползаться”, и при определённом значении l случай уже перестанет быть квазистатистическим, т.е. внешний источник излучения уже будет в определённом смысле колебательным, а не монотонным.

Описанные выше варианты численных экспериментов показывают качественную картину эффективности работы предложенной численной схемы и итерационного метода в рамках решаемой задачи. При моделировании с помощью данной схемы также доступен выбор большего числа элементарных разбиений, по сравнению с используемым в настоящей работе $N_Q \gg 10^6$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20087).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самохин, А.Б. Объёмные интегральные уравнения электродинамики / А.Б. Самохин. — М. : Техносфера, 2021. — 218 с.
2. Будко, Н.В. Обобщённый метод простой итерации для решения объёмных сингулярных интегральных уравнений задач низкочастотного рассеяния / Н.В. Будко, А.Б. Самохин, А.А. Самохин // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 9. — С. 1198–1202.
3. Самохин, А.Б. Объёмные сингулярные интегральные уравнения для задач рассеяния на трёхмерных диэлектрических структурах / А.Б. Самохин // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 9. — С. 1215–1230.
4. Mikhlin, S.G. Singular Integral Equations / S.G. Mikhlin, S. Prosdorf. — New York : Akademie-Verlag, 1986. — 528 p.
5. Budko, N.V. Transverse electric scattering on inhomogeneous objects: spectrum of integral operator and preconditioning / N.V. Budko, A.B. Samokhin // SIAM J. Sci. Comput. — 2006. — V. 28, № 2. — P. 682–700.
6. Самохин, А.Б. Методы дискретизации объёмных сингулярных интегральных уравнений электромагнетизма / А.Б. Самохин, А.С. Самохина, Ю.В. Шестопалов // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 9. — С. 1251–1261.
7. Самохин, А.Б. Численные методы решения многомерных интегральных уравнений математической физики с ядрами, зависящими от разности аргументов / А.Б. Самохин // Радиотехника и электроника. — 2005. — Т. 50, № 2. — С. 208–212.
8. Samokhin, A.B. Iteration and discretization methods for solving the volume integral equations / A.B. Samokhin // IEEE Transactions A (Fundamentals and Materials). — 2009. — V. 129, № 10. — P. 669–774.
9. Приходько, В.Ю. Дифракция низкочастотных волн на упругих тонкостенных оболочках вращения / В.Ю. Приходько, До Ву Минь Тханг // Russ. Technol. J. — 2020. — V. 8, № 6. — P. 157–166.
10. Коваленко, А.Н. Алгебраические модели полосковых линий в многослойной диэлектрической среде / А.Н. Коваленко, А.Н. Жуков // Russ. Technol. J. — 2018. — V. 6, № 3. — P. 54–71.

VOLUME SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS FOR PROBLEMS OF LOW-FREQUENCY SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN ANISOTROPIC STRUCTURES

© 2024 / A. B. Samokhin¹, A. S. Samokhina², I. A. Yurchenkov³

^{1,3}MIREA — Russian Technological University, Moscow, Russia

²V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia

e-mail: ¹absamokhin@yandex.ru, ²asamokhina@yandex.ru, ³yurchenkov@mirea.ru

This paper deals with volume singular integral equations describing the problems of low-frequency scattering of electromagnetic waves in bounded three-dimensional anisotropic structures. The spectrum of integral operators is studied. The domain of the operator spectrum on the complex plane for the low-frequency case is presented explicitly. The generalized method of simple iteration is described, for application of which it is necessary to know the area of the operator spectrum on the complex plane. The collocation method on a uniform grid is used to discretize the integral equations. This allows, using a fast discrete Fourier transform, to construct an algorithm for fast multiplication of the matrix of a system of linear equations by a vector. The results of numerical solution of the considered problems are given.

Keywords: volume integral equations, fast Fourier transform, generalized method of simple iteration, spectrum of operator

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 20-11-20087).

REFERENCES

1. Samokhin, A.B., *Ob'yomnye integral'nye uravneniya elektrodinamiki* (Volume Integral Equations of Electrodynamics), Moscow: Technosfera, 2021.
2. Budko, N.V., Samokhin, A.B., and Samokhin, A.A., A generalized overrelaxation method for solving singular volume integral equations in low-frequency scattering problems, *Differ. Uravn.*, 2005, vol. 41, no. 9, pp. 1198–1202.
3. Samokhin, A.B., Volume singular integral equations for problems of scattering on three-dimensional dielectric structures, *Differ. Uravn.*, 2014, vol. 50, no. 9, pp. 1215–1230.
4. Mikhlin, S.G. and Prosdorf, S., *Singular Integral Equations*, New York: Akademie-Verlag, 1986.
5. Budko, N.V. and Samokhin, A.B., Transverse electric scattering on inhomogeneous objects: spectrum of integral operator and preconditioning, *SIAM J. Sci. Comput.*, 2014, vol. 28, no. 2, pp. 682–700.
6. Samokhin, A.B., Samokhina, A.S., and Shestopalov, Y.V., Discretization methods for three-dimensional singular integral equations of electromagnetism, *Differ. Uravn.*, 2018, vol. 54, no. 9, pp. 1251–1261.
7. Samokhin, A.B., Numerical methods for solving integral equations of mathematical physics with kernels depending on the difference of arguments, *J. Commun. Technol. Electron.*, 2005, vol. 50, no. 2, pp. 208–212.
8. Samokhin, A.B., Iteration and discretization methods for solving the volume integral equations, *IEEJ Trans. A (Fundamentals and Materials)*, 2009, vol. 129, no. 10, pp. 669–774.
9. Prikhodko, V.Yu. and Do Vu Minh Thang, Diffraction of low-frequency waves on elastic thin-walled shells of rotation, *Russ. Technol. J.*, 2020, vol. 8, no. 6, pp. 157–166.
10. Kovalenko, A.N. and Zhukov, A.N., Algebraic models of strip lines in a multilayer dielectric medium, *Russ. Technol. J.*, 2018, vol. 6, no. 3, pp. 54–71.