ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 9, с. 1167–1189

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.4

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО

Р. И. Кадиев[1], А. В. Поносов[2]

[1]*Дагестанский государственный университет, г. Махачкала*
[1]*Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН, г. Махачкала*
[2]*Норвежский университет естественных наук, г. Ос, Норвегия*
e-mail: [1]kadiev_r@mail.ru, [2]arkadi@nmbu.no

Поступила в редакцию 22.04.2024 г., после доработки 18.06.2024 г.; принята к публикации 02.07.2024 г.

Рассмотрен новый класс интегральных уравнений Ито, который содержит как многие классические задачи, например задачу Коши для дифференциальных уравнений целого и дробного порядков со стохастическими возмущениями и без них, так и некоторые менее известные и малоизученные виды уравнений, введённые за последнее время. Найдены достаточно общие условия, гарантирующие существование и единственность решений таких уравнений с учётом их особенностей. В статье использовано специальное обобщённое условие Липшица, которое в силу своей гибкости позволяет получать эффективные признаки разрешимости в терминах правых частей уравнений. Рассмотрены многочисленные примеры, охватывающие, в частности, дифференциальные уравнения Ито дробного порядка с последействием и без него, уравнения с дробными винеровскими процессами, уравнения Ито с несколькими шкалами времени, а также их обобщения.

Ключевые слова: стохастическое уравнение, дробная производная, последействие

DOI: 10.31857/S0374064124090027, EDN: JYISHF

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается следующее стохастическое уравнение типа Гаммерштейна с сингулярными и несингулярными ядрами и нелинейными вольтерровыми операторами:

$$x(t)=\kappa(t)+\sum_{i=1}^{m}\int_{0}^{t}K_i(t,s)(F_ix)(s)\,ds+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\int_{0}^{t}K_{ij}(t,s)(G_{ij}x)(s)\,dB_i(s), \tag{1}$$

где $x(t)$, $\kappa(t)$ — случайные n-мерные процессы, B_i — независимые в совокупности скалярные винеровские процессы, K_i, K_{ij} — детерминированные борелевские функции со значениями в пространстве $n\times n$-матриц, а F_i и G_{ij} — вольтерровы операторы, обеспечивающие зависимость решений уравнений от предыстории. Здесь первый интеграл является интегралом Лебега, а второй — интегралом Ито. В большинстве формулировок уравнение (1) предполагается заданным на конечном интервале $[0,T]$, но на самом деле все результаты, согласно следствию 1, верны и для полуоси $t\geqslant 0$. Точные условия на коэффициенты уравнения (1) будут приведены в п. 2.

Нелинейные детерминированные интегральные уравнения типа Гаммерштейна имеют долгую историю. Известна большая роль этих уравнений в классических задачах физики и техники. В связи с расширением сферы приложений интегральных уравнений, в частности, к задачам биологии и математической экономики, различные обобщения уравнений Гаммерштейна становятся всё более популярными в литературе. Ниже приведён краткий обзор стохастических вариантов таких уравнений, а также их приложений. Именно этому типу уравнений Гаммерштейна в первую очередь и посвящена настоящая статья.

A. Модели с дробными производными и стохастическими возмущениями. Дифференциальные уравнения дробного порядка находят множество применений в современных областях теоретической физики, механики и прикладной математики. Это связано, в частности, с тем, что дробное математическое исчисление является основным инструментом для описания физических систем, которые обладают памятью и нелокальностью, из-за чего дифференциальные модели дробного порядка и стали популярными в приложениях. Невозможно дать полный обзор имеющейся литературы на эту тему, поэтому мы ограничимся упоминанием монографии [1]. С другой стороны, стохастические дифференциальные уравнения также описывают реальные и практически важные процессы, изучаемые современной физикой, биологией, иммунологией, экономикой, кибернетикой и т.д., поэтому многие авторы включают в уравнения дробного порядка стохастические возмущения (см., например, [2]).

Основная схема выглядит следующим образом: если детерминированное уравнение

$$({}^{C}D^{\alpha}_{0+}x)(t)=f(t,x(t)) \quad (\alpha>0)$$

с дробной производной Капуто в его левой части подвергнуть стохастическому возмущению с помощью белого шума $\dot{B}(t)$, то получится формально записанное уравнение вида

$$({}^{C}D^{\alpha}_{0+}x)(t)=f(t,x(t))+g(t,x(t))\dot{B}(t)$$

или

$$d^{\alpha}x(t)=f(t,x(t))dt+g(t,x(t))dB(t), \tag{2}$$

где d^{α} — дробный дифференциал Капуто. При этом переход от (2) к корректно определённому интегральному уравнению (1) основан на формуле дробного интегрирования [1]

$$({}^{C}D^{\alpha}_{0+}x)(t)=f(t) \quad \Rightarrow \quad x(t)=\sum_{k=0}^{l-1}\frac{x^{(k)}(0)t^k}{k!}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s)\,ds,$$

где $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}s^{\alpha-1}e^{-s}\,ds$ — гамма-функция, а $l=\alpha$, если $\alpha\in\mathbb{N}$, и $l=[\alpha]+1$, если $\alpha\notin\mathbb{N}$. Эта формула даёт возможность перейти от дифференциальной формы (2) к интегральной

$$x(t)=\sum_{k=0}^{l-1}\frac{x^{(k)}(0)t^k}{k!}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))\,ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))\,dB(s),$$

и тогда под решением уравнения (2) понимается случайный процесс $x(t)$, удовлетворяющий этому интегральному уравнению [2].

Производную Капуто можно заменить на производную Римана–Лиувилля [1] или Жюмари [3], что влияет только на вид функции κ в соответствующем уравнении (1).

B. Модели, включающие дробные (фракционные) винеровские процессы. Этот популярный класс моделей получил развитие в первую очередь в связи с их применениями в финансовой математике (см., например, монографию [4], а также обширную библиографию в ней). Примером может служить уравнение вида

$$dx(t)=f(t,x(t))dt+g(t,x(t))dB^{\beta}(t), \tag{3}$$

где B^β — дробный винеровский процесс с параметром Хёрста β $(0.5<\beta<1)$. Заметим, что без ограничения общности можно считать B^β записанным в форме Римана–Лиувилля, так как эта форма отличается от стандартной на прогрессивно измеримый случайный процесс с абсолютно непрерывными траекториями (см., например, [5]), поэтому его можно включить в первое слагаемое в правой части уравнения (3). Это замечание позволяет записать уравнение (3) в виде интегрального уравнения (1), используя известную формулу [4]

$$\int\limits_0^t \xi(t)\,dB^\beta(t)=\frac{1}{\Gamma(\beta+1/2)}\int\limits_0^t \xi(s)(t-s)^{\beta-1/2}\,dB(t).$$

Тогда уравнение (3) в интегральном виде будет следующим:

$$x(t)=x(0)+\int\limits_0^t f(s,x(s))\,ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s,x(s))\,dB(s),$$

где $\alpha=\beta+1/2$. Под решением уравнения (3) понимается случайный процесс $x(t)$, удовлетворяющий этому интегральному уравнению, как предложено, например, в работе [6] и во многих других, чтобы избежать технических трудностей, связанных с интегрированием по дробному винеровскому процессу [4].

C. Стохастические модели с несколькими шкалами времени. Модели вида

$$dx(t)=\sum_{i=1}^m f_i(t,x(t))(dt)^{\alpha_i}+g(t,x(t))dB(t)\quad (0<\alpha_i<1) \tag{4}$$

были впервые рассмотрены в статье [7]. Здесь $(dt)^{\alpha_i}$ — дифференциалы типа Жюмари, определяющие независимые шкалы времени $T_i(t)=t^{\alpha_i}$ (см. их описание, например, в работе [3]). Переход от (4) к интегральному уравнению (1) основан на формуле [3, 7]

$$\int\limits_{t_0}^t \xi(t)\,(dt)^\alpha=\alpha\int\limits_{t_0}^t \xi(s)(t-s)^{\alpha-1}\,dt,$$

что снова даёт частный случай уравнения (1):

$$x(t)=x(0)+\sum_{i=1}^m \alpha_i\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha_1-1}f_i(s,x(s))\,ds+\int\limits_0^t g(s,x(s))\,dB(s).$$

Комбинируя модели A–C, можно получить и более общие интегральные уравнения (1) с сингулярными ядрами K_i, K_{ij} вида $\mathrm{const}(t-s)^{\alpha-1}$ $(0<\alpha<1)$. В дополнение к работе [7] здесь можно упомянуть публикации [3, 8].

D. Модели, включающие однородные сингулярные ядра. В этом случае в уравнении (1) предполагается, что $K_i(t,s)=K_i(t-s)$ и $K_{ij}(t,s)=K_{ij}(t-s)$. Уравнения такого типа используются в различных приложениях, например, в теории турбулентности, в моделях энергетических рынков, теории финансовых рынков и т.д. (соответствующие ссылки можно найти в работах [6, 9]).

E. Модели, включающие обобщённые дробные производные. В статьях [10, 11] предложено обобщение дробной производной Капуто и начато изучение (детерминированных) дифференциальных уравнений с такими производными.

Пусть

$$({}^C D_{0+}^{\alpha,\psi} x)(t) = f(t, x(t)) \quad (\alpha > 0), \tag{5}$$

где

$$({}^C D_{0+}^{\alpha,\psi} x)(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{n-\alpha-1} \left(\frac{1}{\psi'(s)} \frac{d}{ds}\right)^n x(s)\, ds,$$

$l = \alpha$, если $\alpha \in \mathbb{N}$, и $l = [\alpha]+1$, если $\alpha \notin \mathbb{N}$, а $\psi'(t) > 0$. Очевидно, что $\psi(t) = t$ даёт обычную производную Капуто, но при переходе от (5) к интегральному уравнению вида (1), основанному на формуле дробного интегрирования [11]

$$({}^C D_{0+}^{\alpha,\psi} x)(t) = f(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{x^{(k)}(0)(\psi(t)-\psi(0))^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1} f(s)\, ds,$$

получаются неоднородные ядра вида $K(t,s) = \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1}$ $(\alpha > 0)$.

В [11] уравнения такого типа применены к задачам демографического роста.

F. Модели, включающие мультифракционные винеровские процессы. В работе [12] рассмотрены дробные винеровские процессы с индексом Хёрста, зависящим от времени, названные мультифракционными винеровскими процессами. В [13] изучены обыкновенные стохастические уравнения, включающие такие процессы, с целью их дальнейшего применения в финансовой математике.

Следуя [13], положим

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + dB^\theta(t), \tag{6}$$

где мультифракционный винеровский процесс $B^\theta(t)$ задан в форме Римана–Лиувилля:

$$B^\theta(t) := c(\theta(t)) \int_0^t (t-s)^{\theta(t)-1/2}\, dB(s),$$

$c(u)$ и $\theta(t)$ — положительные, измеримые и ограниченные скалярные функции, причём $\theta(t)$ имеет значения в замкнутом интервале $[c,d] \subset (0,1)$. При переходе к интегральному уравнению получаем

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s))\, ds + c(\theta(t)) \int_0^t (t-s)^{\theta(s)-1/2}\, dB(s),$$

что даёт пример неоднородных сингулярных ядер вида $K(t,s) = c(\theta(t))(t-s)^{\theta(t)-1/2}$.

Отметим, что работы [12, 13] тесно связаны с более ранней публикацией [14], где было введено понятие дробной производной Капуто переменного порядка. Соответствующие формулы дифференцирования и интегрирования, предложенные в [14], записываются следующим образом:

$$({}^C D_{0+}^{\alpha(t)} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha(t)} f(s)\, ds \quad \text{и} \quad I_{0+}^{\alpha(t)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha(t))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(t)-1} f(s)\, ds,$$

что приводит к детерминированным уравнениям вида

$$({}^C D_{0+}^{\alpha(t)} x)(t) = f(t, x(t)) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha(t))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(t)-1} f(s, x(s))\, ds \tag{7}$$

с неоднородными ядрами $K(t,s)$. Уравнения такого типа используются в некоторых физических моделях [15].

G. Фракционные модели с последействием. Многие математические модели, особенно в биологии и экономике, требуют учёта эффектов последействия, а следовательно, и соответствующего математического аппарата, который изложен, например, в монографии [16] в виде теории функционально-дифференциальных уравнений. Добавление стохастических возмущений приводит в этом случае к стохастическим функционально-дифференциальным уравнениям. Развивая эти идеи, мы в данной работе включили последействие в уравнение (1), рассматривая нелинейные вольтерровы операторы F_i и G_{ij} самого общего вида. Некоторые весьма частные случаи были ранее рассмотрены в работах [2] (стохастические уравнения с дифференциалом Капуто и общим последействием, т.е. уравнения вида A) и [6] (уравнения с дробным винеровским процессом и постоянным запаздыванием, т.е. уравнения вида B). Насколько известно авторам, стохастические уравнения вида C–F, отличные от обыкновенных дифференциальных уравнений, ранее не изучались.

Отметим новые аспекты статьи.

1. Рассмотрен новый широкий класс стохастических уравнений типа Гаммерштейна с сингулярными и несингулярными ядрами и нелинейными вольтерровыми операторами общего вида, который включает в себя как сравнительно более изученные классы уравнений, например, уравнения вида A или B, так и малоизученные классы, такие как уравнения вида C–F. Кроме того, в этот класс входят многие стохастические уравнения типа Гаммерштейна, не сводящиеся напрямую к каким-либо дифференциальным уравнениям.

2. Доказана теорема существования и единственности для уравнений этого нового класса, значительно обобщающая большинство известных результатов для каждого конкретного класса из списка уравнений A–F. Более подробное описание новизны полученных результатов и их детальное сравнение с ранее известными приведено в п. 4 (следствия 2–9).

3. Особое внимание в статье уделено уравнениям с последействием. Это продиктовано как многими актуальными, так и потенциальными приложениями, а также явной недооценённостью теории такого типа фракционных уравнений в литературе. Основной результат статьи (теорема 1 из п. 3) охватывает последействие самого общего вида, а в следствиях 3 и 4 обсуждаются уравнения с более конкретными видами последействия — неограниченными, распределёнными и случайными.

4. Подчеркнём, что для доказательства основных результатов нам понадобилась новая техника, которая ранее не применялась другими авторами. Прежде всего, предложенный нами метод основан на новом нестандартном условии Липшица, адаптированном к особенностям рассматриваемых уравнений, которые содержат последействие общего вида. Поэтому в нашем условии Липшица правые части уравнения содержат линейный ограниченный оператор, тогда как другие авторы при своём анализе частных случаев рассматриваемого нами общего уравнения обычно использовали стандартное условие Липшица с постоянным коэффициентом, что значительно сужает эффективность анализа даже для случая уравнений без запаздывания. Действительно, если оператор в нашем условии Липшица тождественный, то получается обычное условие Липшица не с постоянным, а с переменным коэффициентом, что позволяет охватить самый общий случай даже линейных уравнений без запаздывания всех рассматриваемых типов. Далее, применение нестандартного условия Липшица основано на вольтерровости нелинейных операторов в правой части уравнения, что необходимо для подходящего разбиения отрезка на части для получения сжимающих операторов на каждом шаге построения решения. При этом важную роль играет выбор пространств решений, так как известно, что решения фракционных уравнений являются непрерывными только при дополнительных ограничениях. Кроме того, выбор пространств существенно зависит от свойств ядер рассматриваемого уравнения Гаммерштейна.

Отметим также, что в данной работе мы рассматриваем исключительно решения, реализующиеся на исходном вероятностном пространстве, т.е. сильные решения. В связи с этим отметим важную публикацию [13], посвящённую вопросам существования (без единственности) слабых решений, т.е. решений, реализующихся на расширенном вероятностном пространстве, для некоторых частных классов дифференциальных и интегральных уравнений, относящихся к типам A, D и F.

Статья организована следующим образом. В п. 1 приведены основные обозначения и определения. Некоторые свойства линейных операторов в пространствах прогрессивно измеримых случайных процессов доказаны в п. 2. В п. 3 доказана основная теорема существования и единственности, а в п. 4 она применена к конкретным примерам уравнения (1).

1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В рамках статьи следующие параметры остаются фиксированными: $n\in\mathbb{N}$ — размерность фазового пространства уравнения, т.е. размер вектора решения уравнения; $m, m_i\in\mathbb{N}$; i — индекс, удовлетворяющий условиям $1\leqslant i\leqslant m$; j — индекс, удовлетворяющий условиям $1\leqslant j\leqslant m_i$; $T>0$, $p\geqslant 2$, $q\geqslant 1$, $q_i\geqslant 1$, $q_{ij}\geqslant 1$, $\alpha_i>0$, $\alpha_{ij}>1/2$ — действительные числа.

Используются также следующие обозначения: $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$, $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$, $\mathbb{R}_-=(-\infty,0)$; $|.|$ — фиксированная норма в $\mathbb{R}^n$ и $\|.\|$ — матричная норма, согласованная с нормой $|.|$; I_A — индикатор (характеристическая функция) множества A; $\mathrm{Bor}(M)$ — σ-алгебра всех борелевских подмножеств метрического пространства M; L_q^n — пространство Лебега классов эквивалентности n-мерных функций на отрезке $[0,T]$; $\mathcal{B}=(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F})_{t\geqslant 0},P)$ — стохастический базис, здесь Ω — множество элементарных событий, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра событий на Ω, $(\mathcal{F})_{t\geqslant 0}$ — непрерывный справа неубывающий поток σ-подалгебр алгебры $\mathcal{F}$, P — вероятностная мера на $\mathcal{F}$, все σ-алгебры являются полными относительно этой меры; E — математическое ожидание, построенное по мере P; $B(t)$ $(t\in\mathbb{R}_+)$ — скалярный стандартный винеровский процесс; $B_i(t)$ $(t\in\mathbb{R}_+)$ — скалярные стандартные и в совокупности независимые винеровские процессы; k_p^n — линейное пространство n-мерных $\mathcal{F}_0$-измеримых случайных величин χ, удовлетворяющих условию $E|\chi|^p<\infty$ (нормой $\chi\in k_p^n$ является величина $(|\chi|^p)^{1/p}$); $\mathcal{D}_p^n$ — линейное нормированное пространство всех n-мерных прогрессивно измеримых случайных процессов $x(\cdot)$ на отрезке $[0,T]$, удовлетворяющих условию $\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|x(t)|^p<\infty$ (нормой $x\in\mathcal{D}_p^n$ является величина $(\sup_{0\leqslant\nu\leqslant T}E|x(t)|^p)^{1/p}$).

Пусть J — отрезок $[0,T]$ или полуось $\mathbb{R}_+$. Напомним, что *прогрессивно измеримым* (по отношению к стохастическому базису $\mathcal{B}$) называется случайный процесс $x(t,\omega)$ $(t\in J$, $\omega\in\Omega)$, сужение которого на множество $[0,v]\times\Omega$ является $\mathrm{Bor}([0,v])\otimes\mathcal{F}_v$-измеримым для любого $v\in J$.

Замечание 1. Строго говоря, пространство $\mathcal{D}_p^n$ становится нормированным после отождествления случайных процессов x и y, для которых $\sup_{0\leqslant\nu\leqslant T}E|x(t)-y(t)|^p=0$. Поэтому все результаты о единственности в настоящей статье следует понимать именно с точки зрения этого отождествления. Кроме того, с формальной точки зрения во всех оценках sup должен быть заменён на существенный супремум vraisup, но так как в каждом классе эквивалентности всегда найдётся функция, для которой sup = vraisup, то для краткости будем использовать первое обозначение (sup).

Отметим, что и σ-алгебры $\mathcal{F}_t$, и винеровские процессы заданы априори на всей полуоси $\mathbb{R}_+$. Это связано с тем, что некоторые результаты об уравнении (1) и его частных случаях формулируются именно для полуоси. Если же условия утверждений приведены для отрезка $[0,T]$, то достаточно предположения, что $\mathcal{F}_t$ и винеровские процессы заданы на этом отрезке.

Ниже используется хорошо известное неравенство (см., например, [3])

$$\left(E\left|\int_0^t f(s)\,dB(s)\right|^p\right)^{1/p} \leqslant c_p\left(E\left(\int_0^t |f(s)|^2\,ds\right)^{p/2}\right)^{1/p}, \quad t\in[0,T], \tag{8}$$

где $f(s)$ — скалярный прогрессивно измеримый процесс с квадратично интегрируемыми на промежутке $[0,T]$ траекториями, а c_p — некоторое число, зависящее от p, но не зависящее от f и t.

Следующее определение обобщает классическое понятие детерминированного вольтеррова оператора [16].

Определение 1. Пусть J — отрезок $[0,T]$ или полуось $\mathbb{R}_+$, а $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — два линейных пространства прогрессивно измеримых случайных процессов на J. Оператор $\mathcal{V}\colon \mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ называется *вольтерровым*, если для любого момента остановки τ такого, что $\tau(t)\in J$ почти наверное (п.н.), и для любых случайных процессов $x,y\in\mathcal{X}$ из того, что $x(t)=y(t)$ при $t\in[0,\tau]$ п.н., будет следовать $(\mathcal{V}x)(t)=(\mathcal{V}y)(t)$ при $t\in[0,\tau]$ п.н.

2. СВОЙСТВА АССОЦИИРОВАННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим оператор распределённого запаздывания, играющий ключевую роль во многих приложениях (особенно в биологических и экологических):

$$(Hz)(t)=\int_0^t d_s\mathcal{R}(t,s)z(s). \tag{9}$$

Лемма 1. *Предположим, что функция $\mathcal{R}$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) значения $\mathcal{R}(t,s)$ $(0\leqslant s\leqslant t\leqslant T)$ являются $n'\times n$-матрицами;

2) $\mathcal{R}(\cdot,\cdot)$ является измеримой по Борелю;

3) $\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\operatorname{Var}_0^t\mathcal{R}(t,\cdot)<\infty$.

Тогда оператор (9) является линейным ограниченным и вольтерровым оператором, действующим из пространства $\mathcal{D}_p^n$ в пространство $\mathcal{D}_p^{n'}$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для случая $n=n'=1$, предположив, что $(Hz)(t)=\int_0^t z(s)\,d_s\mathcal{R}(t,s)$, где $\mathcal{R}(t,s)$ — скалярная функция.

Пусть $z\in\mathcal{D}_p^1$. Легко видеть, что $(Hz)(t)$ является прогрессивно измеримым случайным процессом на отрезке $[0,T]$. Далее, положив $\operatorname{Var}_0^t[\mathcal{R}(t,\cdot)](s)\equiv\bar{\mathcal{R}}(t,s)$, получим

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E\left|\int_0^t z(s)\,d_s\mathcal{R}(t,s)\right|^p \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(E\int_0^t |z(s)|^p\,d_s\bar{\mathcal{R}}(t,s)\times\left(\int_0^t d_s\bar{\mathcal{R}}(t,s)\right)^{p-1}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\int_0^t E|z(s)|^p\,d_s\bar{\mathcal{R}}(t,s)\right)\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\int_0^t d_s\bar{\mathcal{R}}(t,s)\right)^{p-1}\leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\sup_{0\leqslant s\leqslant t} E|z(s)|^p \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\int_0^t d_s\bar{\mathcal{R}}(t,s)\right)\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\int_0^t d_s\bar{\mathcal{R}}(t,s)\right)^{p-1}\leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T} E|x(t)|^p \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\int_0^t d_s\bar{\mathcal{R}}(t,s)\right)^p \leqslant \left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\operatorname{Var}_0^t\mathcal{R}(t,\cdot)\right)^p \sup_{0\leqslant t\leqslant T} E|z(t)|^p.$$

Таким образом, $Hz\in\mathcal{D}_p^1$ и $\|Hz\|_{\mathcal{D}_p^1}\leqslant C\|z\|_{\mathcal{D}_p^1}$, где $C=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\operatorname{Var}_0^t\mathcal{R}(t,\cdot)<\infty$, что доказывает ограниченность оператора H (в силу его очевидной линейности) на пространстве $\mathcal{D}_p^1$. Вольтерровость оператора H очевидна. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь оператор случайного запаздывания (оператор внутренней суперпозиции согласно терминологии [16])

$$(Hz)(t) = z(h(t))I_{\{h(t)\geqslant 0\}}. \tag{10}$$

В детерминированных моделях функция $h(t)\leqslant t$ является неслучайной, но в стохастических моделях естественно предположить её случайным процессом, что накладывает определённые ограничения на её измеримость: при каждом t случайная величина $h(t)$ должна быть моментом остановки на стохастическом базисе $\mathcal{B}$ (см. условие 2 леммы 2).

Лемма 2. *Предположим, что $h(t)$, $t\in[0,T]$, — $\mathrm{Bor}([0,T])\otimes\mathcal{F}$-измеримая скалярная функция, удовлетворяющая условиям*

1) $h(t)\leqslant t$ п.н., $t\in[0,T]$;

2) $h^{-1}(B)\in\mathrm{Bor}([0,T])\otimes\mathcal{F}_v$ для любого $v\in[0,T]$ и любого борелевского множества $B\subset(-\infty,v]$.

Тогда (10) является линейным ограниченным и вольтерровым оператором в пространстве $\mathcal{D}_p^n$.

Доказательство. Достаточно проверить утверждение для $n=1$. Пусть $z\in\mathcal{D}_p^1$. Известно, что $(Hz)(t)$ будет прогрессивно измеримым процессом на отрезке $[0,T]$. Из оценки

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E|x(h(t))I_{\{h(t)\geqslant 0\}}|^p \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T} E|x(t)|^p$$

следует, что $Hz\in\mathcal{D}_p^1$. В силу этой же оценки и линейности оператора H он ограничен на пространстве $\mathcal{D}_p^1$. Вольтерровость оператора H очевидна. Лемма доказана.

Наконец, рассмотрим два интегральных оператора, аналогичных операторам в правой части уравнения (1). Первый из них соответствует детерминированной части этого уравнения:

$$(\mathcal{K}z)(t) = \int_0^t K(t,s)z(s)\,ds. \tag{11}$$

Лемма 3. *Пусть функция K удовлетворяет следующим условиям:*

1) значения $K(t,s)$ $(0\leqslant s,\ t\leqslant T)$ являются $n\times n$-матрицами;

2) является детерминированной и измеримой по Борелю;

3) $C:=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^t\|K(t,s)\|\,ds<\infty$.

Тогда оператор (11) — линейный ограниченный и вольтерров оператор в пространстве $\mathcal{D}_p^n$ с нормой, не превосходящей C.

Доказательство. Пусть $z\in\mathcal{D}_p^n$. Тогда $(Hz)(t)$ является прогрессивно измеримым случайным процессом на отрезке $[0,T]$. Применяя интегральное неравенство Минковского [17, теорема 202], получаем для любого $t\in[0,T]$

$$\bigg(E\bigg|\int_0^t K(t,s)z(s)\,ds\bigg|^p\bigg)^{1/p} \leqslant \int_0^t (E\|K(t,s)\|^p|z(s)|^p)^{1/p}\,ds \leqslant \int_0^t \|K(t,s)\|(E|z(s)|^p)^{1/p}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant t}(E|z(s)|^p)^{1/p}\int_0^t\|K(t,s)\|\,ds = \Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}E|z(s)|^p\Big)^{1/p}\int_0^t\|K(t,s)\|\,ds \leqslant \|z\|_{\mathcal{D}_p^n}\int_0^t\|K(t,s)\|\,ds.$$

Следовательно, $\mathcal{K}z\in\mathcal{D}_p^n$ и $\|\mathcal{K}z\|_{\mathcal{D}_p^n}\leqslant C\|z\|_{\mathcal{D}_p^n}$, где $C=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^t\|K(t,s)\|\,ds<\infty$. Так как линейность и вольтерровость оператора $\mathcal{K}$ очевидна, то утверждение доказано.

Рассмотрим теперь интегральный оператор, входящий в стохастическую часть уравнения (1):

$$(\mathcal{K}'z)(t) = \int_0^t K(t,s)z(s)\,dB(s). \tag{12}$$

Лемма 4. *Пусть функция K удовлетворяет следующим условиям:*

1) значения $K(t,s)$ $(0\leqslant s,\, t\leqslant T)$ являются $n\times n$-матрицами;

2) является детерминированной и измеримой по Борелю;

3) $C := \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^t \|K(t,s)\|^2\,ds < \infty$.

Тогда оператор (12) — линейный ограниченный и вольтерров оператор в пространстве $\mathcal{D}_p^n$ с нормой, не превосходящей $c_p\sqrt{C}$, где c_p — константа из неравенства (8).

Доказательство. Пусть $z\in\mathcal{D}_p^n$. Тогда $\mathcal{K}'z$ является прогрессивно измеримым случайным процессом на отрезке $[0,T]$. Используя интегральное неравенство Минковского и неравенство (8), будем иметь

$$\left(E\left|\int_0^t K(t,s)z(s)\,dB(s)\right|^p\right)^{1/p} \leqslant c_p\left(E\left(\int_0^t \|K(t,s)\|^2|z(s)|^2\,ds\right)^{p/2}\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant c_p\left(\int_0^t (\|K(t,s)\|^p E|z(s)|^p)^{2/p}\,ds\right)^{1/2} \leqslant c_p \sup_{0\leqslant s\leqslant t}(E|z(s)|^p\,ds)^{1/p}\left(\int_0^t \|K(t,s)\|^2\,ds\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c_p\|z\|_{\mathcal{D}_p^n}\left(\int_0^t \|K(t,s)\|^2\,ds\right)^{1/2},$$

поэтому $\mathcal{K}'z\in\mathcal{D}_p^n$ и $\|\mathcal{K}'z\|_{\mathcal{D}_p^n}\leqslant c_p\sqrt{C}\|z\|_{\mathcal{D}_p^n}$. Линейность и вольтерровость оператора $\mathcal{K}'$ очевидна, что и завершает доказательство леммы.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Определим условия существования и единственности решения уравнения (1) как на конечном отрезке $[0,T]$ (см. теорему 1), так и на полуоси $\mathbb{R}_+$ (см. следствие 1). В первом случае под решением будем понимать случайный процесс $x\in\mathcal{D}_p^n$, удовлетворяющий (1) $P\times\mu$-почти всюду на $[0,T]$. Во втором случае решением будет прогрессивно измеримый на $\mathbb{R}_+$ случайный процесс, принадлежащий при каждом T пространству $\mathcal{D}_p^n$ и удовлетворяющий уравнению (1) $P\times\mu$-почти всюду на $\mathbb{R}_+$.

Наиболее интересным для приложений и одновременно технически наиболее сложным является случай сингулярных ядер K_i, K_{ij}, хотя полученные ниже результаты справедливы и для многих несингулярных ядер. В общем случае решения уравнений вида (1) не обязательно имеют непрерывные траектории, поэтому важной проблемой при доказательстве существования решений является выбор пространств для соответствующих операторов. Ранее нами при изучении задачи существования и единственности решений стохастических функционально-дифференциальных уравнений без дробных производных и дробных винеровских процессов применялась техника функциональных контракторов, что позволило обобщить стандартные условия Липшица и охватить важные классы стохастических уравнений с последействием. Ниже также используем эти идеи.

Определение 2. Пусть вольтерров оператор V переводит случайные процессы из $\mathcal{D}_p^n$ в прогрессивно измеримые процессы и пусть существуют линейный ограниченный оператор

$Q\colon \mathcal{D}_p^n \to \mathcal{D}_p^n$ и измеримая детерминированная функция $\Psi(t) \geqslant 0$, $t \in [0,T]$, для которых выполняется неравенство

$$|(Vx)(t)-(Vy)(t)| \leqslant \Psi(t)|(Q(x-y))(t)| \tag{13}$$

при всех $x, y \in \mathcal{D}_p^n$ и μ-почти всех $t \in [0,T]$. Тогда будем говорить, что оператор V удовлетворяет *обобщённому условию Липшица с оператором Q и функцией Ψ.*

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 1. *Пусть для уравнения (1) выполняются следующие условия на отрезке $[0,T]$:*

1) $\kappa \in \mathcal{D}_p^n$;

2) операторы F_i, G_{ij} удовлетворяют обобщённым условиям Липшица с линейными ограниченными операторами $Q_i, Q_{ij}\colon \mathcal{D}_p^n \to \mathcal{D}_p^n$ и функциями $\Psi_i \in L^1_{q_i}$, $\Psi_{ij} \in L^1_{2q_{ij}}$ соответственно;

3) $F_i\hat{0} \in \mathcal{D}_p^n$, $G_{ij}\hat{0} \in \mathcal{D}_p^n$, где $\hat{0}$ — нулевой элемент пространства $\mathcal{D}_p^n$;

4) константы

$$C_i := \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \int\limits_0^t \|K_i(t,s)\|^{\frac{q_i}{q_i-1}}\, ds < \infty, \quad C_{ij} := \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \int\limits_0^t \|K_{ij}(t,s)\|^{\frac{2q_{ij}}{q_{ij}-1}}\, ds < \infty.$$

Тогда это уравнение имеет единственное решение, принадлежащее пространству $\mathcal{D}_p^n$.

Установим сначала справедливость следующей леммы.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия 2)–4) теоремы 1. Тогда для любых действительных чисел a, b, $0 \leqslant a < b \leqslant T$, оператор $\mathcal{V}_{a,b}$ действует в пространстве $\mathcal{D}_p^n$ и для любых $y_1, y_2 \in \mathcal{D}_p^n$ справедливо неравенство*

$$\|\mathcal{V}_{a,b}y_1 - \mathcal{V}_{a,b}y_2\|_{\mathcal{D}_p^n} \leqslant \gamma_{a,b}\|y_1-y_2\|_{\mathcal{D}_p^n}, \tag{14}$$

где

$$(\mathcal{V}_{a,b}y)(t) := \sum_{i=1}^m \int\limits_0^t K_i(t,s)I_{a,b}(s)(F_iy)(s)\, ds + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} \int\limits_0^t K_{ij}(t,s)I_{a,b}(s)(G_{ij}y)(s)\, dB_i(s),$$

$$\gamma_{a,b} := \sum_{i=1}^m C_i^{\frac{q_i-1}{q_i}} \|Q_i\|_{\mathcal{D}_p^n} \biggl(\int\limits_a^b (\Psi_i(s))^{q_i}\, ds\biggr)^{1/q_i} + c_p \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} C_{ij}^{\frac{q_{ij}-1}{2q_{ij}}} \|Q_{ij}\|_{\mathcal{D}_p^n} \biggl(\int\limits_a^b (\Psi_{ij}(s))^{2q_{ij}}\, ds\biggr)^{1/2q_{ij}},$$

$I_{a,b}(t) := I_{[a,b]}$, $t \in [0,T]$ *— индикатор отрезка* $[a,b]$.

Отметим, что конечность рассматриваемых ниже интегралов Лебега и Ито заранее не предполагается, но будет автоматически вытекать из последующих оценок.

Доказательство. Воспользуемся очевидным неравенством

$$\biggl(E\biggl|\sum_{k=1}^l a_k\biggr|^p\biggr)^{1/p} \leqslant \sum_{k=1}^l (E|a_k|^p)^{1/p},$$

справедливым для любых n-мерных случайных величин a_k, $k = \overline{1,l}$, и получим

$$\|\mathcal{V}_{a,b}y_1 - \mathcal{V}_{a,b}y_2\|_{\mathcal{D}_p^n} \leqslant \sum_{i=1}^m \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \biggl(E\biggl|\int\limits_0^t K_i(t,s)I_{a,b}(s)[(F_iy_1)(s)-(F_iy_2)(s)]\, ds\biggr|^p\biggr)^{1/p} +$$

$$+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \biggl(E\biggl|\int\limits_0^t K_{ij}(t,s)I_{a,b}(s)[(G_{ij}y_1)(s)-(G_{ij}y_2)(s)]\, dB_i(s)\biggr|^p\biggr)^{1/p}.$$

Используя неравенство (8), получаем

$$\|\mathcal{V}_{a,b}y_1-\mathcal{V}_{a,b}y_2\|_{\mathcal{D}_p^n}\leqslant\sum_{i=1}^m\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\biggl(E\biggl(\int_0^t\|K_i(t,s)\|\,I_{a,b}(s)\,|(F_iy_1)(s)-(F_iy_2)(s)|\,ds\biggr)^p\biggr)^{1/p}+$$

$$+c_p\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{m_i}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\biggl(E\biggl(\int_0^t\|K_{ij}(t,s)\|^2\,I_{a,b}(s)\,|(G_{ij}y_1)(s)-(G_{ij}y_2)(s)|^2\,ds\biggr)^{p/2}\biggr)^{1/p}.$$

В силу обобщённого условия Липшица (13) для операторов F_i, G_{ij} имеем

$$\|\mathcal{V}_{a,b}y_1-\mathcal{V}_{a,b}y_2\|_{\mathcal{D}_p^n}\leqslant\sum_{i=1}^m\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\biggl(E\biggl(\int_0^t\|K_i(t,s)\|\,I_{a,b}(s)\psi_i(s)\,|(Q_i(y_1-y_2))(s)|\,ds\biggr)^p\biggr)^{1/p}+$$

$$+c_p\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{m_i}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\biggl(E\biggl(\int_0^t\|K_{ij}(t,s)\|^2\,|I_{a,b}(s)(\psi_{ij}(s))|^2\,|(Q_{ij}(y_1-y_2))(s)|^2\,ds\biggr)^{p/2}\biggr)^{1/p}.$$

Лемма 3 позволяет получить оценку

$$\|\mathcal{V}_{a,b}y_1-\mathcal{V}_{a,b}y_2\|_{\mathcal{D}_p^n}\leqslant\|y_1-y_2\|_{\mathcal{D}_p^n}\sum_{i=1}^m\|Q_i\|_{\mathcal{D}_p^n}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^t\|K_i(t,s)\|I_{a,b}(s)\Psi_i(s)\,ds+$$

$$+c_p\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{m_i}\|Q_{ij}\|_{\mathcal{D}_p^n}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\biggl(\int_0^t\|K_{ij}(t,s)\|^2I_{a,b}(s)(\Psi_{ij}(s))^2\,ds\biggr)^{1/2}.$$

Наконец, из неравенства Гёльдера выводим

$$\|\mathcal{V}_{a,b}y_1-\mathcal{V}_{a,b}y_2\|_{\mathcal{D}_p^n}\leqslant$$

$$\leqslant\|y_1-y_2\|_{\mathcal{D}_p^n}\sum_{i=1}^m\|Q_i\|_{\mathcal{D}_p^n}\biggl(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^t\|K_i(t,s)\|^{\frac{q_i}{q_i-1}}\,ds\biggr)^{\frac{q_i-1}{q_i}}\biggl(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^tI_{a,b}(s)(\Psi_i(s))^{q_i}\,ds\biggr)^{\frac{1}{q_i}}+$$

$$+c_p\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{m_i}\|Q_{ij}\|_{\mathcal{D}_p^n}\biggl(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^t\|K_{ij}(t,s)\|^{\frac{2q_{ij}}{q_{ij}-1}}\,ds\biggr)^{\frac{q_{ij}-1}{2q_{ij}}}\biggl(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^tI_{a,b}(s)(\Psi_{ij}(s))^{2q_{ij}}\,ds\biggr)^{\frac{1}{2q_{ij}}}\leqslant$$

$$\leqslant\|y_1-y_2\|_{\mathcal{D}_p^n}\sum_{i=1}^mC_i^{\frac{q_i-1}{q_i}}\|Q_i\|_{\mathcal{D}_p^n}\biggl(\int_a^b(\Psi_i(s))^{q_i}\,ds\biggr)^{\frac{1}{q_i}}+c_p\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{m_i}C_{ij}^{\frac{q_{ij}-1}{2q_{ij}}}\|Q_{ij}\|_{\mathcal{D}_p^n}\biggl(\int_a^b(\Psi_{ij}(s))^{2q_{ij}}\,ds\biggr)^{\frac{1}{2q_{ij}}}=$$

$$=\gamma_{a,b}\|y_1-y_2\|_{\mathcal{D}_p^n},$$

что доказывает справедливость (14). Из неравенства (14) следует, что для проверки действия оператора $\mathcal{V}_{a,b}$ в пространстве $\mathcal{D}_p^n$ достаточно показать, что $\mathcal{V}_{a,b}\hat{0}\in\mathcal{D}_p^n$. Но это непосредственно вытекает из лемм 3 и 4, согласно которым

$$\int_0^{\cdot}K_i(\cdot,s)I_{a,b}(s)(F_i\hat{0})(s)\,ds\quad\text{и}\quad\int_0^{\cdot}K_{ij}(\cdot,s)I_{a,b}(s)(G_{ij}\hat{0})(s)\,dB_i(s)$$

принадлежат пространству $\mathcal{D}_p^n$, поскольку $F_i\hat{0},G_{ij}\hat{0}\in\mathcal{D}_p^n$ в силу условия 3) теоремы 1. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Очевидно, что функция $\gamma_{a,b}$ не убывает по аргументу b, так что существует конечное разбиение $0=t_0<t_1<\ldots<t_l=T$ отрезка $[0,T]$, для которого $\gamma_{t_{\nu-1},t_\nu}<1$ $(\nu=\overline{1,l})$. Рассмотрим последовательность операторных уравнений

$$x_\nu(t)=x_{\nu-1}(t)+(\mathcal{V}_{t_{\nu-1},t_\nu}x_\nu)(t), \quad t\in[0,T], \quad \nu=\overline{1,l}, \tag{15}$$

где $x_0(t)=\kappa(t)$.

В силу леммы 5 и выбора последовательности $\{t_\nu\}$ операторы в правой части (15) действуют в пространстве $\mathcal{D}_p^n$ и являются сжимающими. Поэтому мы можем итеративно построить последовательность решений $\{x_\nu\}$ такую, что $x_\nu(t)$ удовлетворяет ν-му уравнению (15) и, кроме того, $x_\nu(t)=x_{\nu-1}(t)$ на отрезке $[0,t_{\nu-1}]$. Если предположить, что $x_{\nu-1}$ удовлетворяет уравнению $x_{\nu-1}=\kappa+\mathcal{V}_{0,t_{\nu-1}}x_{\nu-1}$ на отрезке $[0,T]$, то, подставив это равенство в (15), получим

$$x_\nu=\kappa+\mathcal{V}_{0,t_{\nu-1}}x_{\nu-1}+\mathcal{V}_{t_{\nu-1},t_\nu}x_\nu=\kappa+\mathcal{V}_{0,t_{\nu-1}}x_\nu+\mathcal{V}_{t_{\nu-1},t_\nu}x_\nu=\kappa+\mathcal{V}_{0,t_\nu}x_\nu$$

в силу свойства вольтерровости оператора $\mathcal{V}_{0,t_\nu}$ и совпадения $x_\nu(t)$ и $x_{\nu-1}(t)$ на отрезке $[0,t_{\nu-1}]$. По индукции заключаем, что случайный процесс $x_l\in\mathcal{D}_p^n$ удовлетворяет уравнению $x_l=\kappa+\mathcal{V}_{0,T}x_l$ на отрезке $[0,T]$. Поскольку это уравнение совпадает с уравнением (1), то существование решения доказано.

Для доказательства единственности снова применим метод индукции. Пусть уравнение $x_{\nu-1}=\kappa+\mathcal{V}_{0,t_{\nu-1}}x_{\nu-1}$ имеет единственное решение в пространстве $\mathcal{D}_p^n$, в то время как уравнение $x_\nu=\kappa+\mathcal{V}_{0,t_\nu}x_\nu$ имеет два решения $x_\nu^{(1)}$ и $x_\nu^{(2)}$ в этом пространстве. Тогда

$$x_\nu^{(k)}=\kappa+\mathcal{V}_{0,t_\nu}x_\nu^{(k)}=\kappa+\mathcal{V}_{0,t_{\nu-1}}x_\nu^{(k)}+\mathcal{V}_{t_{\nu-1},t_\nu}x_\nu^{(k)}, \quad k=1,2.$$

Заметим, что $\big(\mathcal{V}_{t_{\nu-1},t_\nu}x_\nu^{(k)}\big)(t)=0$ п.н. на отрезке $[0,t_{\nu-1}]$, так что $x_\nu^{(k)}(t)=\kappa(t)+\big(\mathcal{V}_{0,t_{\nu-1}}x_\nu^{(k)}\big)(t)$ п.н. при $t\in[0,t_{\nu-1}]$, $k=1,2$. В силу предположенной единственности имеем $x_\nu^{(1)}(t)=x_\nu^{(2)}(t)=$ $=x_{\nu-1}(t)$ п.н. при $t\in[0,t_{\nu-1}]$. Используя вольтерровость оператора $\mathcal{V}_{0,t_{\nu-1}}$, получаем

$$\big(\mathcal{V}_{0,t_{\nu-1}}x_\nu^{(1)}\big)(t)=\big(\mathcal{V}_{0,t_{\nu-1}}x_\nu^{(2)}\big)(t):=\varphi(t) \quad \text{п.н.} \quad t\in[0,t_{\nu-1}].$$

Тогда $x_\nu^{(1)}$ и $x_\nu^{(2)}$ удовлетворяют уравнениям

$$x_\nu^{(k)}=\kappa+\varphi+\mathcal{V}_{t_{\nu-1},t_\nu}x_\nu^{(k)}, \quad k=1,2,$$

оператор в левой части которых является сжимающим, поэтому $x_\nu^{(1)}(t)=x_\nu^{(2)}(t)$ п.н.

После l шагов мы получим единственность решения уравнения $x=\kappa+\mathcal{V}_{0,T}x$, которое совпадает с уравнением (1). Теорема 1 доказана.

Отметим, что теорема 1 существенно обобщает основной результат статьи [18], где правые части уравнения (1) не содержат последействий, а Ψ_i и Ψ_{ij} являются константами.

Сформулируем теперь утверждение теоремы 1 для случая полуоси $\mathbb{R}_+$ (следствие 1). С этой целью для каждого интервала $[0,T]$ введём следующие обозначения:

если X, Y — линейные пространства прогрессивно измеримых случайных процессов, заданных на $\mathbb{R}_+$, то X_T, Y_T содержат все прогрессивно измеримые на $[0,T]$ случайные процессы, состоящие из сужений процессов из пространств X, Y на $[0,T]$ соответственно;

R^T — *оператор расширения* с $[0,T]$ на $\mathbb{R}_+$; P^T — *оператор сужения* с $\mathbb{R}_+$ на $[0,T]$; заметим, что поскольку возможны различные расширения случайных процессов с $[0,T]$ на $\mathbb{R}_+$, то для определённости под расширением случайного процесса x с $[0,T]$ на $\mathbb{R}_+$ будем понимать случайный процесс, совпадающий с x на $[0,T]$ и равный $x(T)$ на $[T,+\infty)$;

если $\mathcal{V}\colon X\to Y$ — некоторый оператор и оператор R^T действует из пространства X_T в пространство X, то через $\mathcal{V}^T$ обозначим оператор, определяемый равенством $\mathcal{V}^T=P^T\mathcal{V}R^T$; отметим, что $\mathcal{V}^T$ — оператор, действующий из пространства X_T в пространство Y_T, и если оператор $\mathcal{V}$ вольтерров, то оператор $\mathcal{V}^T$ также вольтерров.

Пусть уравнение (1) задано на промежутке $\mathbb{R}_+$. Рассмотрим следующее уравнение на каждом отрезке $[0,T]$:

$$x(t)=\kappa^T(t)+\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^t K_i(t,s)(F_i^Tx)(s)\,ds+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\int\limits_0^t K_{ij}(t,s)(G_{ij}^Tx)(s)\,dB_i(s), \tag{16}$$

предполагая, что $\kappa^T:=P^T\kappa\in\mathcal{D}_p^n,\ F_i^T:=P^TF_iR^T:\mathcal{D}_p^n\to\mathcal{D}_p^n,\ G_{ij}^T:=P^TG_{ij}R^T:\mathcal{D}_p^n\to\mathcal{D}_p^n$.

Нетрудно проверить, используя вольтерровость операторов F_i, G_{ij}, что если $x(t)$ — решение уравнения (1) на $\mathbb{R}_+$ такое, что $P^Tx\in\mathcal{D}_p^n$, то $(P^Tx)(t)$ будет решением уравнения (16), и наоборот, если $\bar{x}(t)$ — решение уравнения (16), то $x(t):=(R^T\bar{x})(t)$ будет решением уравнения (1) на $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющим на отрезке $[0,T]$ условию $P^Tx\in\mathcal{D}_p^n$. Следовательно, если уравнение (16) однозначно разрешимо при любом $T\in(0,+\infty)$, то уравнение (1) будет однозначно разрешимым на $\mathbb{R}_+$. Поэтому справедливо

Следствие 1. *Пусть для уравнения (16) при любом $T>0$ выполняются следующие условия:*

1) $\kappa^T\in\mathcal{D}_p^n$;

2) операторы F_i^T, G_{ij}^T удовлетворяют обобщённым условиям Липшица с линейными ограниченными операторами $Q_i^T,Q_{ij}^T\colon\mathcal{D}_p^n\to\mathcal{D}_p^n$ и функциями $\Psi_i^T\in L_{q_i}^1$, $\Psi_{ij}^T\in L_{2q_{ij}}^1$ соответственно;

3) $F_i^T\hat{0}\in\mathcal{D}_p^n$, $G_{ij}^T\hat{0}\in\mathcal{D}_p^n$, где $\hat{0}$ — нулевой элемент пространства $\mathcal{D}_p^n$;

4) константы

$$C_i:=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_0^t\|K_i(t,s)\|^{\frac{q_i}{q_i-1}}\,ds<\infty,\quad C_{ij}:=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_0^t\|K_{ij}(t,s)\|^{\frac{2q_{ij}}{q_{ij}-1}}\,ds<\infty.$$

Тогда уравнение (1) имеет единственное решение на всей полуоси $\mathbb{R}_+$ такое, что его сужение на любой отрезок $[0,T]$ принадлежит пространству $\mathcal{D}_p^n$.

Условия существования и единственности решений уравнения (1) на полуоси $\mathbb{R}_+$ являются важными для многих задач, например, при изучении вопросов устойчивости решений этого уравнения и его частных случаев.

4. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Рассмотрим конкретный класс уравнений вида (1). Множество, на котором доказывается существование решений, всегда предполагается конечным и равным $[0,T]$, а решение на этом промежутке — принадлежащим пространству $\mathcal{D}_p^n$. Отметим, что в силу следствия 1 все результаты этого пункта остаются справедливыми и для полуоси при очевидных изменениях в формулировках.

Следствие 2. *Пусть в уравнении (1) $K_i(t,s)=(t-s)^{\alpha_i-1}$, $K_{ij}(t,s)=(t-s)^{\alpha_{ij}-1}$, а операторы F_i, G_{ij} удовлетворяют условиям 2), 3) теоремы 1, где*

$$q_i>\max\{\alpha_i^{-1},1\},\quad q_{ij}>\max\{(2\alpha_{ij}-1)^{-1},1\}.$$

Тогда для любого $\kappa\in\mathcal{D}_p^n$ уравнение (1) имеет единственное решение.

Следствие 2 является обобщением соответствующих результатов о фракционных уравнениях из работ [2] (для конечномерного случая) и [6], хотя бы потому, что включает, например, случайные правые части и случайные запаздывания.

Доказательство. Необходимо проверить только условие 4) теоремы 1. Имеем

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_0^t \|K_i(t,s)\|^{\frac{q_i}{q_i-1}}\,ds=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_0^t (t-s)^{(\alpha_i-1)q_i(q_i-1)^{-1}}\,ds=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\frac{t^{\beta_i}}{\beta_i}=\frac{T^{\beta_i}}{\beta_i}<\infty,$$

так как $\beta_i:=(\alpha_i-1)q_i(q_i-1)^{-1}+1=(q_i\alpha_i-1)(q_i-1)^{-1}>0$, и

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_0^t \|K_{ij}(t,s)\|^{\frac{2q_{ij}}{q_{ij}-1}}\,ds=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_0^t (t-s)^{2(\alpha_{ij}-1)q_{ij}(q_{ij}-1)^{-1}}\,ds=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\frac{t^{\beta_{ij}}}{\beta_{ij}}=\frac{T^{\beta_{ij}}}{\beta_{ij}}<\infty,$$

так как $\beta_{ij}:=2(\alpha_{ij}-1)q_{ij}(q_{ij}-1)^{-1}+1=(q_{ij}(2\alpha_{ij}-1)-1)(q_{ij}-1)^{-1}>0$. Следствие доказано.

В следствиях 3 и 4 ниже речь идёт о начальной задаче для уравнений с распределёнными и случайными запаздываниями соответственно. Оба типа начальных задач являются частными случаями уравнения (1), поскольку, как будет показано, сводятся к этому уравнению с помощью техники, описанной в монографии [16].

Рассмотрим уравнение

$$x(t)=x(0)+\sum_{i=1}^m\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha_i-1}f_i(s,(H_ix)(s))\,ds+$$
$$+\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{m_i}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha_{ij}-1}g_{ij}(s,(H_{ij}x)(s))\,dB_i(s),\quad t\in[0,T], \tag{17}$$

где $f_i(t,\omega,v)$, $g_{ij}(t,\omega,v)$ — n-мерные случайные функции, которые при каждом $v\in\mathbb{R}^{nl}$ прогрессивно измеримы по переменным $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$, а при $P\otimes\mu$-почти всех (t,ω) непрерывны по v, и начальное условие

$$x(s)=\varphi(s),\quad s\in\mathbb{R}_-, \tag{18}$$

где φ — заданный случайный процесс на $\mathbb{R}_-$.

Под решением $x(t)$, $t\leqslant T$, задачи (17), (18) понимается n-мерный случайный процесс, сужение которого на отрезок $[0,T]$ принадлежит пространству $\mathcal{D}_p^n$ и который удовлетворяет условию (18).

Начнём с уравнения, включающего распределённое запаздывание.

Следствие 3. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) φ — $(\mathrm{Bor}(R_-)\otimes\mathcal{F}_0)$*-измеримый* n*-мерный случайный процесс;*

2) существуют измеримые неотрицательные функции $\Psi_i(t)$, $\Psi_{ij}(t)$ $(t\in[0,T])$*,* $\Psi_i\in L^1_{q_i}$, $\Psi_{ij}\in L^1_{2q_{ij}}$*, где* $q_i>\max\{\alpha_i^{-1},1\}$, $q_{ij}>\max\{(2\alpha_{ij}-1)^{-1},1\}$*, для которых* $P\otimes\mu$*-почти всюду справедливы неравенства*

$$|f_i(t,u)-f_i(t,v)|\leqslant\Psi_i(t)|u-v|\quad \text{и}\quad |g_{ij}(t,u)-g_{ij}(t,v)|\leqslant\Psi_{ij}(t)|u-v|$$

при любых $u,v\in\mathbb{R}^{nl}$ *и* $t\in[0,T]$*;*

3) $(H_i z)(t) = \int_{-\infty}^t d_s\mathcal{R}_i(t,s)z(s)$, $(H_{ij}z)(t) = \int_{-\infty}^t d_s\mathcal{R}_{ij}(t,s)z(s)$, *где борелевские функции* $\mathcal{R}_i$, $\mathcal{R}_{ij}$, *заданные на множестве* $[0,T]\times(-\infty,t]$ *и принимающие значения в пространстве* $(nl)\times n$*-матриц, удовлетворяют условиям*

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \operatorname{Var}_0^t \mathcal{R}_i(t,\cdot)<\infty, \quad \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \operatorname{Var}_0^t \mathcal{R}_{ij}(t,\cdot)<\infty,$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E\left|f_i\left(t,\int_{-\infty}^0 d_s\mathcal{R}_i(t,s)\varphi(s)\right)\right|^p<\infty, \quad \sup_{0\leqslant t\leqslant T} E\left|g_{ij}\left(t,\int_{-\infty}^0 d_s\mathcal{R}_{ij}(t,s)\varphi(s)\right)\right|^p<\infty.$$

Тогда для любого $x(0)\in k_p^n$ *задача (17), (18) имеет единственное решение.*

Доказательство. Покажем, как начальная задача (17), (18) может быть записана в виде уравнения (1). Для этого положим

$$x_+(t)=\begin{cases} x(t), & t\in[0,T],\\ 0, & t\in\mathbb{R}_-,\end{cases} \qquad \varphi_-(t)=\begin{cases} 0, & t\in[0,T],\\ \varphi(t), & t\in R_-,\end{cases} \tag{19}$$

где $x\in[0,T]$, и определим операторы F_i и G_{ij} по формулами

$$F_ix=f_i(\cdot,H_ix_+ + H_i\varphi_-), \quad G_{ij}x=g_{ij}(\cdot,H_{ij}x_+ + H_{ij}\varphi_-). \tag{20}$$

Непосредственно из этих формул следует (см. монографию [16]), что $x\in\mathcal{D}_p^n$ является решением уравнения (1) с операторами (20), ядрами $K_i(t,s)=(t-s)^{\alpha_i-1}$, $K_{ij}(t,s)=(t-s)^{\alpha_{ij}-1}$ и случайным процессом $\kappa(t)=x(0)$ тогда и только тогда, когда процесс $x_+(t)+\varphi_-(t)$ $(t\leqslant T)$ является решением начальной задачи (17), (18).

Для применения следствия 2 необходимо проверить выполнение условий 2), 3) теоремы 1. Пусть $x,y\in\mathcal{D}_p^n$. Из условия 3) следствия 3 и леммы 1 вытекает, что F_i и G_{ij} переводят случайные процессы из $\mathcal{D}_p^n$ в прогрессивно измеримые процессы. Кроме того,

$$|(F_ix)(t)-(F_iy)(t)|=|f_i(t,(H_ix_+)(t)+(H_i\varphi_-)(t))-f_i(t,(H_iy_+)(t)+(H_i\varphi_-)(t))|\leqslant$$
$$\leqslant\Psi_i(t)|(H_ix_+)(t)-(H_iy_+)(t)|=\Psi_i(t)|Q_i(x-y)(t)|,$$

где операторы $(Q_iz)(t)=(H_ix_+)(t)=\int_0^t d_s\mathcal{R}_{0i}(t,s)x(s)$ удовлетворяют всем условиям леммы 1, а значит, являются линейными ограниченными операторами в пространстве $\mathcal{D}_p^n$. Тем самым операторы F_i удовлетворяют условию 2) теоремы 1. Аналогично доказывается, что и операторы G_{ij}, определённые формулами (20), удовлетворяют условию 2) теоремы 1.

Остаётся проверить выполнение условия 3) теоремы 1. Пусть $\hat{0}$ — нулевой элемент из $\mathcal{D}_p^n$. Тогда

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E|(F_i\hat{0})(t)|^p=\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E|f_i(t,(H_i\hat{0}_+)(t)+(H_i\varphi_-)(t))|^p=$$
$$=\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E|f_i(t,(H_i\varphi_-)(t))|^p=\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E\left|f_i\left(t,\int_{-\infty}^0 d_s\mathcal{R}_i(t,s)\varphi(s)\right)\right|^p<\infty$$

в силу условия 3). Следовательно, $F_i\hat{0}\in\mathcal{D}_p^n$. Аналогично проверяется, что $G_{ij}\hat{0}\in\mathcal{D}_p^n$, и это завершает доказательство.

Далее рассмотрим начальную задачу (17), (18) со случайными запаздываниями.

Следствие 4. *Пусть выполнены условия 1), 2) следствия 3 и условие*

3а) $(H_i z)(t) = \big(x(h_i^1(t)),\ldots,x(h_i^l(t))\big)$, $(H_{ij} z)(t) = \big(x(h_{ij}^1(t)),\ldots,x(h_{ij}^l(t))\big)$, *где скалярные случайные процессы* $h_i^k(t)$, $h_{ij}^k(t)$ $(k=\overline{1,l})$ *удовлетворяют условиям 1), 2) леммы 2, а также условиям*

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E\Big|f_i\big(t,\varphi(h_i^1(t))I_{\{h_i^1(t)<0\}},\ldots,\varphi(h_i^l(t))I_{\{h_i^l(t)<0\}}\big)\Big|^p<\infty,$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E\Big|g_{ij}\big(t,\varphi(h_{ij}^1(t))I_{\{h_{ij}^1(t)<0\}},\ldots,\varphi(h_{ij}^l(t))I_{\{h_{ij}^l(t)<0\}}\big)\Big|^p<\infty.$$

Тогда для любого $x(0)\in k_p^n$ *уравнение со случайными запаздываниями*

$$x(t)=x(0)+\sum_{i=1}^m\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha_i-1}f_i(s,x(h_i^1(t)),\ldots,x(h_i^l(t)))\,ds+$$

$$+\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{m_i}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{ij})}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha_{ij}-1}g_{ij}(s,x(h_{ij}^1(t)),\ldots,x(h_{ij}^l(t)))\,dB_i(s)\quad(t\in[0,T])\tag{21}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее равенству (18).

Доказательство проводится аналогично доказательству следствия 3, с той лишь разницей, что линейные операторы Q_i в обобщённом условии Липшица задаются формулами $(Q_i z)(t)=\big(x(h_i^1(t))I_{\{h_i^1(t)\geqslant0\}},\ldots,x(h_i^l(t))I_{\{h_i^l(t)\geqslant0\}}\big)$, так что они являются, как и аналогичные операторы Q_{ij}, ограниченными операторами из пространства $\mathcal{D}_p^n$ в пространство $\mathcal{D}_p^{ln}$. Соотношения $F_i\hat{0}\in\mathcal{D}_p^n$ и $G_{ij}\hat{0}\in\mathcal{D}_p^n$ непосредственно следуют из условия 3а). Следствие доказано.

Замечание 2. Условия 3) и 3а) на начальный процесс φ из следствий 3 и 4 соответственно будут выполнены, если, например, φ ограничен в существенном константой C и

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} E\Big(\sup_{|x|\leqslant C}|f_i(t,x)|^p\Big)<\infty,\qquad \sup_{0\leqslant t\leqslant T} E\Big(\sup_{|x|\leqslant C}|g_{ij}(t,x)|^p\Big)<\infty.$$

Однако возможны и другие комбинации ограничений на φ, f_i, g_{ij}, поэтому мы сформулировали условия 3) и 3а) в самом общем виде.

Теорема 1 приводит к новым результатам и для уравнений без запаздывания, прежде всего, нелинейных

$$x(t)=x(0)+\sum_{i=1}^m\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha_i-1}f_i(s,x(s))\,ds+\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{m_i}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha_{ij}-1}g_{ij}(s,x(s))\,dB_i(s),\quad t\in[0,T],\tag{22}$$

но также и линейных

$$x(t)=x(0)+\sum_{i=1}^m\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha_i-1}[A_i(s)x(s)+\tilde{f}_i(s)]\,ds+$$

$$+\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{m_i}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha_i-1}[A_{ij}(s)x(s)+\tilde{g}_{ij}(s)]\,dB_i(s),\quad t\in[0,T],\tag{23}$$

так как в обоих случаях коэффициенты являются случайными.

Следствие 5. *Пусть для уравнения (22) выполнены следующие условия:*

1) $f_i(t,\omega,v)$, $g_{ij}(t,\omega,v)$ *— n-мерные случайные функции, которые при каждом* $v\in\mathbb{R}^n$ *прогрессивно измеримы по переменным* $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$, *а при* $P\otimes\mu$*-почти всех* (t,ω) *непрерывны по* v;

2) существуют измеримые неотрицательные функции $\Psi_i(t)$, $\Psi_{ij}(t)$ $(t\in[0,T])$, $\Psi_i\in L^1_{q_i}$, $\Psi_{ij}\in L^1_{2q_{ij}}$, $q_i>\max\{\alpha_i^{-1},1\}$, $q_{ij}>\max\{(2\alpha_{ij}-1)^{-1},1\}$, *для которых* $P\otimes\mu$*-почти всюду справедливы неравенства*

$$|f_i(t,u)-f_i(t,v)|\leqslant\Psi_i(t)|u-v| \quad \text{и} \quad |g_{ij}(t,u)-g_{ij}(t,v)|\leqslant\Psi_{ij}(t)|u-v|$$

при любых $u,v\in\mathbb{R}^n$ *и* $t\in[0,T]$;

3) для нулевого n-мерного вектора $\bar{0}$ *справедливо* $f_i(\cdot,\bar{0})\in\mathcal{D}^n_p$, $g_{ij}(\cdot,\bar{0})\in\mathcal{D}^n_p$.

Тогда для любого $x(0)\in k^n_p$ *уравнение (22) имеет единственное решение.*

Доказательство основывается на следствии 4, если положить

$$h_i^k(t)=h_{ij}^k(t)=t, \quad k=\overline{1,l}.$$

Из следствия 5 непосредственно вытекает

Следствие 6. *Пусть для уравнения (23) выполнены следующие условия:*

1) $A_i(\omega,t)$, $A_{ij}(\omega,t)$ *— $n\times n$-матрицы, которые являются прогрессивно измеримыми случайными процессами на отрезке* $[0,T]$;

2) $P\times\mu$*-почти всюду справедливы неравенства*

$$\|A_i(t)\|\leqslant\Psi_i(t), \quad \|A_{ij}(t)\|\leqslant\Psi_{ij}(t), \quad t\in[0,T],$$

для некоторых измеримых неотрицательных функций $\Psi_i(t)$, $\Psi_{ij}(t)$ *на* $[0,T]$, *принадлежащих пространствам* $L^1_{q_i}$ *и* $L^1_{2q_{ij}}$ *соответственно, где*

$$q_i>\max\{\alpha_i^{-1},1\}, \quad q_{ij}>\max\{(2\alpha_{ij}-1)^{-1},1\};$$

3) $\hat{f}_i\in\mathcal{D}^n_p$, $\hat{g}_{ij}\in\mathcal{D}^n_p$.

Тогда для любого $x(0)\in k^n_p$ *уравнение (23) имеет единственное решение.*

Следствия 2–4 могут быть непосредственно применены к моделям A–C из введения и их обобщениям A*–C*, рассмотренным ниже. Для этого достаточно дословно применить формулировки этих следствий, так как операторы F_i, G_{ij} в этих моделях отличаются от соответствующих операторов в уравнении (1) и его частных случаях (17)–(22) на постоянные множители. Уравнения из A*–C* предполагаются заданными или на отрезке $[0,T]$, или на всей полуоси $\mathbb{R}_+$.

Для моделей D–F из введения и их обобщений D*–F*, рассмотренных ниже, соответствующие следствия будут сформулированы явным образом.

A. Уравнения с дробными производными, стохастическими возмущениями и последействием.* Уравнение

$$x(t)=x(0)+\sum_{i=1}^m\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha_i-1}(F_ix)(s)\,ds+\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{m_i}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{ij})}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha_{ij}-1}(G_{ij}x)(s)\,dB_i(s) \quad (24)$$

можно рассматривать как обобщение уравнений вида (2). Следствие 2, применённое к уравнению (24), обобщает результаты статьи [2] (для случая $\mathbb{R}^n$).

B. Уравнения с последействием, включающие дробные винеровские процессы.* Переход к уравнению

$$x(t)=x(0)+\sum_{i=1}^{m}\int_0^t (F_ix)(s)\,ds+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{1}{\Gamma(\beta_{ij}+1/2)}\int_0^t (t-s)^{\beta_{ij}-1/2}(G_{ij}x)(s)\,dB_i^{\beta_{ij}}(s) \qquad (25)$$

от его дифференциальной версии

$$dx(t)=\sum_{i=1}^{m} f_i(t,(H_ix)(t))\,dt+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} g_{ij}(t,(H_{ij}x)(t))\,dB_i^{\beta_{ij}}(t),$$

являющейся обобщением (3) и требующей начального условия (18), осуществляется по формулам (19) и (20). Следствие 2, применённое к уравнению (25), обобщает, в частности, результаты статьи [6] для уравнений с запаздыванием и дробным винеровским процессом.

C. Стохастические уравнения с последействием и несколькими шкалами времени.* Рассмотрим уравнение (обобщение уравнения (4))

$$x(t)=x(0)+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1}(F_ix)(s)\,ds+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\int_0^t (G_{ij}x)(s)\,dB_i(s). \qquad (26)$$

Его дифференциальным аналогом является

$$dx(t)=\sum_{i=1}^{m} f_i(t,(H_ix)(t))(dt)^{\alpha_i}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} g_{ij}(t,(H_{ij}x)(t))\,dB(t)$$

с начальным условием (18). Переход к задаче (26), (18) осуществляется по формулам (19) и (20). Следствие 2, применённое к уравнению (26), обобщает результаты статей [7, 19].

D. Уравнения с последействием, включающие однородные сингулярные ядра.* Пусть

$$x(t)=\kappa(t)+\sum_{i=1}^{m}\int_0^t K_i(t-s)(F_ix)(s)\,ds+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\int_0^t K_{ij}(t-s)(G_{ij}x)(s)\,dB_i(s), \quad t\in[0,T]. \qquad (27)$$

Следствие 7. *Пусть выполнены условия 1)–3) теоремы 1 и условие*

4a) столбцы матриц K_i и K_{ij} принадлежат пространствам $L^n_{q_i(q_i-1)^{-1}}$ и $L^n_{2q_{ij}(q_{ij}-1)^{-1}}$ соответственно.

Тогда уравнение (27) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $\mathcal{D}^n_p$.

Доказательство. В случае однородных ядер условие 4a) эквивалентно условию 4) теоремы 1, так как

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^t \|K_i(t-s)\|^{\frac{q_i}{q_i-1}}\,ds=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^t \|K_i(s)\|^{\frac{q_i}{q_i-1}}\,ds=\int_0^T \|K_i(s)\|^{\frac{q_i}{q_i-1}}\,ds<\infty,$$

и аналогично

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^t \|K_{ij}(t-s)\|^{\frac{2q_{ij}}{q_{ij}-1}}\,ds<\infty.$$

Следствие доказано.

Следствие 7 обобщает основной результат статьи [6].

E. Уравнения с последействием, включающие обобщённые дробные производные.* На отрезке $[0,T]$ рассмотрим уравнение (1), где

$$K_i(t,s)=\psi_i'(s)(\psi_i(t)-\psi_i(s))^{\alpha_i-1},\quad K_{ij}(t,s)=\psi_{ij}'(s)(\psi_{ij}(t)-\psi_{ij}(s))^{\alpha_{ij}-1}, \tag{28}$$

функции ψ_i и ψ_{ij} имеют непрерывные производные на $[0,T]$, причём $\psi_i'(t)>0$, $\psi_{ij}'(t)>0$, $t\in[0,T]$. Очевидно, что это уравнение является, с одной стороны, стохастическим обобщением уравнения (5), а с другой — превращается в уравнение из следствия 2, если положить $\psi_i(t)=\psi_{ij}(t)=t$.

Следствие 8. *Пусть операторы F_i, G_{ij} удовлетворяют условиям 2), 3) теоремы 1, где*

$$q_i>\max\{\alpha_i^{-1},1\},\quad q_{ij}>\max\{(2\alpha_{ij}-1)^{-1},1\}.$$

Тогда для любого $\kappa\in\mathcal{D}_p^n$ уравнение (1), где K_i и K_{ij} определены формулами (28), имеет единственное решение.

Доказательство. Необходимо проверить только выполнение условия 4) из теоремы 1 для

$$C_i:=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_0^t\|K_i(t,s)\|^{\frac{q_i}{q_i-1}}\,ds=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_0^t\psi_i'(s)^{\frac{q_i(\alpha_i-1)}{q_i-1}}(\psi_i(t)-\psi_i(s))^{\frac{q_i(\alpha_i-1)}{q_i-1}}\,ds.$$

Если $\alpha_i\geqslant1$, то $C_i<\infty$ в силу непрерывности K_i на множестве $[0,T]\times[0,T]$.

Предположим, что $0<\alpha_i<1$ и зафиксируем константу $m>0$, для которой $\psi_i'(s)\geqslant m>0$, $s\in[0,T]$, $i=\overline{1,m}$, что гарантировано непрерывностью производных на этом отрезке. Тогда $\psi_i'(t)/m\geqslant1$, так что

$$\left(\frac{\psi_i'(t)}{m}\right)^{\frac{q_i(\alpha_i-1)}{q_i-1}}\leqslant\frac{\psi_i'(t)}{m}\quad\text{и}\quad C_i\leqslant m^\beta\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_0^t\psi_i'(s)(\psi_i(t)-\psi_i(s))^{\frac{q_i(\alpha_i-1)}{q_i-1}}\,ds,\quad \beta=\frac{q_i\alpha_i-2\alpha_1+1}{q_i-1}.$$

Подстановка $u=\psi_i(t)-\psi_i(s)$ позволяет вычислить интеграл, тогда

$$C_i\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\frac{m^\beta(q_i-1)}{q_i(\alpha_i-1)+q_i-1}(\psi(t)-\psi(0))^{\frac{q_i(\alpha_i-1)}{q_i-1}+1}=\frac{m^\beta(q_i-1)}{q_i\alpha_i-1}(\psi(T)-\psi(0))^{\frac{q_i\alpha_i-1}{q_i-1}}<\infty.$$

Аналогично показывается, что

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_0^t\|K_{ij}(t,s)\|^{\frac{2q_{ij}}{q_{ij}-1}}\,ds<\infty.$$

Следствие доказано.

Следствие 8 обобщает теорему существования и единственности из статьи [11].

F. Уравнения с последействием, включающие мультифракционные винеровские процессы.* Рассмотрим уравнение (1) на отрезке $[0,T]$, где

$$K_i(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\theta_i(t))}(t-s)^{\theta_i(t)-1}\quad\text{и}\quad K_{ij}(t,s)=c_{ij}(\theta_{ij}(t))(t-s)^{\theta_{ij}(t)-1/2}, \tag{29}$$

которое является обобщением как стохастического уравнения (6), так и детерминированного уравнения (7).

Следствие 9. *Пусть $c_{ij}(u)$ $(u>0)$, $\theta_i(t)$, $\theta_{ij}(t)$ $(t\in[0,T])$ являются борелевскими ограниченными скалярными функциями, причём $\theta_i(t)\geqslant\alpha_i$, $\theta_{ij}(t)\geqslant\delta_{ij}>0$ для всех $t\in[0,T]$. Пусть операторы F_i, G_{ij} удовлетворяют условиям 2), 3) теоремы 1, где*

$$q_i>\max\{\alpha_i^{-1},1\},\quad q_{ij}>\max\{(2\delta_{ij})^{-1},1\}.$$

Тогда для любого $\kappa\in\mathcal{D}_p^n$ уравнение (1), где K_i и K_{ij} определены формулами (29), имеет единственное решение.

Доказательство. Очевидно, что в условиях следствия функции $1/\Gamma(\theta_i(t))$ и $c_{ij}(\theta_{ij}(t))$ являются ограниченными на отрезке $[0,T]$. Рассмотрим функции $(t-s)^{\theta_i(t)-1}$ и $(t-s)^{\theta_{ij}(t)-1/2}$:

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_0^t(t-s)^{\frac{q_i(\theta_i(t)-1)}{q_i-1}}\,ds=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\frac{t^{\gamma_i(t)}}{\gamma_i(t)}\leqslant\frac{q_i-1}{q_i\alpha_i-1}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}t^{\gamma_i(t)}\Big)<\infty,\quad \gamma_i(t)=\frac{q_i\theta_i(t)-1}{q_i-1},$$

так как $q_i\theta_i(t)-1\geqslant q_i\alpha_i-1>0$ и

$$\frac{q_i\alpha_i-1}{q_i-1}\leqslant\gamma_i(t)\leqslant\frac{1+q_i\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\theta_i(t)}{q_i-1},$$

а $\theta_i(t)$ ограничены на отрезке $[0,T]$; аналогично

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_0^t(t-s)^{\frac{2q_{ij}(\theta_{ij}(t)-1/2)}{q_{ij}-1}}\,ds=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\frac{t^{\gamma_{ij}}}{\gamma_{ij}}\leqslant\frac{q_{ij}-1}{2q_{ij}\delta_{ij}-1}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}t^{\gamma_{ij}(t)}\Big)<\infty,$$

$$\gamma_{ij}(t)=\frac{2q_{ij}\theta_{ij}(t)-1}{q_{ij}-1},$$

поскольку $2q_{ij}\theta_{ij}(t)-1\geqslant 2q_{ij}\delta_{ij}-1>0$,

$$\frac{2q_{ij}\delta_{ij}-1}{q_{ij}-1}\leqslant\gamma_{ij}(t)\leqslant\frac{1+2q_{ij}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\theta_{ij}(t)}{q_{ij}-1},$$

а $\theta_{ij}(t)$ ограничены на отрезке $[0,T]$. Это завершает проверку условия 4) из теоремы 1. Остальные условия теоремы 1 и следствия 9 одинаковы.

Следствие 9 формально не обобщает результат о существовании слабых решений для уравнений, рассмотренных в статье [13], но распространяет теорему существования и единственности на уравнения значительно более общего вида.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен класс стохастических уравнений типа Гаммерштейна с сингулярными и несингулярными ядрами, включающий многие встречающиеся в литературе типы дифференциальных и интегральных уравнений с дробными дифференциалами и последействием. Доказана теорема существования и единственности, которая обобщает известные результаты для соответствующих частных классов уравнений.

В дальнейшем авторы планируют изучить вопрос о моментной непрерывности решений уравнения вида (1), а также исследовать важные для приложений задачи стохастической устойчивости для таких уравнений, используя развитый в работах [3, 20] подход, альтернативный методу функционалов Ляпунова–Разумихина.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Herrmann, R. Fractional Calculus: an Introduction for Physicists / R. Herrman. — 3rd ed. — Singapore : World Sci. Publ., 2018. — 261 p.
2. Li, Y. The existence and asymptotic behavior of solutions to fractional stochastic evolution equations with infinite delay / Y. Li, Y. Wang // J. Differ. Equat. — 2019. — V. 266. — P. 3514–3558.
3. Ponosov, A. A novel algorithm for asymptotic stability analysis of some classes of stochastic time–fractional Volterra equations / A. Ponosov, L. Idels, R.I. Kadiev // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. — 2023. — V. 126. — Art. 107491.
4. Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications./ F. Biagini, Y. Hu, B. Øksendal, T. Zhang. — London : Springer, 2008. — 330 p.
5. El Euch, O. The characteristic function of rough Heston models / O. El Euch, M. Rosenbaum // Math. Finance. — 2019. — V. 29, № 1. — P. 3–38.
6. El-Borai, M.M. On some fractional stochastic delay differential equations / M.M. El-Borai, K. El-Nadi, H.A. Fouad // Comput. Math. Appl. — 2010. — V. 59. — P. 1165–1170.
7. Pedjeu, J.-C. Stochastic fractional differential equations: modeling, method and analysis / J.-C. Pedjeu, G.S. Ladde // Chaos, Solitons, Fractals. — 2012. — V. 45. — P. 279–293.
8. Ding, X.-L. Analytical solutions for multi–time scale fractional stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and their applications / X.-L. Ding, J.J. Nieto // Entropy. — 2018. — V. 20. — Art. 63.
9. A weak solution theory for stochastic Volterra equations of convolution type / E. Abi Jaber, C. Cuchiero, M. Larsson, S. Pulido // Ann. Appl. Probab. — 2021. — V. 31, № 6. — P. 2924–2952.
10. Almeida, A. A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function / A. Almeida // Comm. Nonlin. Sci. Num. Simul. — 2017. — V. 44. — P. 460–481.
11. Almeida, R. Fractional differential equations with a Caputo derivative with respect to a kernel function and their applications / R. Almeida, A.B. Malinowska, M.T.T. Monteiro // Math. Methods Appl. Sci. — 2018. — V. 41. — Art. 336352.
12. Peltier, R.-F. Multifractional Brownian motion: definition and preliminary results / R.-F. Peltier, J.L. Vehel // INRIA. — 1995. — Art. 0074045.
13. Harang, F.A. Girsanov theorem for multifractional Brownian processes / F.A. Harang, T.K. Nilssen, F.N. Proske // Int. J. Prob. Stoch. Processes. — 2022. — V. 94, № 8. — P. 1137–1165.
14. Samko, S.G. Integration and differentiation to a variable fractional order / S.G. Samko, B. Ross // Integr. Transf. Spec. Func. — 2007. — V. 1, № 4. — P. 277—300.
15. Lorenzo, C. Variable order and distributed order fractional operators / C. Lorenzo, T. Hartley // Nonlin. Dyn. — 2002. — V. 29. — P. 57–98.
16. Azbelev, N.V. Introduction to the Theory of Functional Differential Equations. Methods and Applications / N.V. Azbelev, V.P. Maksimov, L.F. Rakhmatulina. — New York : Hindawi, 2007. — 318 p.
17. Hardy, G.H. Inequalities / G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya. — 2nd ed. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1988. — 324 p.
18. Dai, X.J. Well-posedness and EM approximations for non–Lipschitz stochastic fractional integro–differential equations / X.J. Dai, W.P. Bu, A.G. Xiao // J. Comp. Appl. Math. — 2019. — V. 356. — P. 377–390.
19. On existence and continuity results of solution for multi-time scale fractional stochastic differential equation / A. Alkhazzan, J. Wang, C. Tunc [et al.] // Qual. Th. Dynam. Sys. — 2023. — V. 22. — Art. 49.
20. Кадиев, Р.И. Положительная обратимость матриц и устойчивость дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями / Р.И. Кадиев, А.В. Поносов // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 5. — С. 579–590.

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS OF NONLINEAR FUNCTIONAL INTEGRAL ITÔ EQUATIONS

© 2024 / **R. I. Kadiev[1], A. Ponosov[2]**

[1]Dagestan State University, Makhachkala, Dagestan
[1]Dagestan Federal Research Center of RAS, Makhachkala, Dagestan
[2]Norwegian University of Life Sciences, Ås, Norway
e-mail: [1]kadiev_r@mail.ru, [2]arkadi@nmbu.no

A new class of Itô integral equations is considered, which contains many classical problems, for example, the Cauchy problem for differential equations of integer and fractional order with and without stochastic perturbations, as well as some less known and little-studied types of equations that have been introduced recently. The purpose of the study is to find sufficiently general conditions that guarantee the existence and the uniqueness of solutions to such equations, taking into account their specific features. The article therefore proposes to use a special generalized Lipschitz condition, which, due to its flexibility, allows one to obtain effective solvability criteria in terms of the right-hand sides of equations. Numerous examples are considered, covering in particular Itô differential equations of fractional order with aftereffect and without aftereffect, equations with fractional Wiener processes, Itô equations with several time scales, as well as their generalizations.

Keywords: stochastic equation, fractional derivative, aftereffect

REFERENCES

1. Herrmann, R., *Fractional Calculus: an Introduction for Physicists*, Singapore: World Sci. Publ., 2018.
2. Li, Y. and Wang, Y., The existence and asymptotic behavior of solutions to fractional stochastic evolution equations with infinite delay, *J. Differ. Equat.*, 2019, vol. 266, pp. 3514–3558.
3. Ponosov, A., Idels, L., and Kadiev, R.I., A novel algorithm for asymptotic stability analysis of some classes of stochastic time–fractional Volterra equations, *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.*, 2023, vol. 126, art. 107491.
4. Biagini, F., Hu, Y., Øksendal, B., and Zhang, T., *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*, London: Springer, 2008.
5. El Euch, O. and Rosenbaum, M., The characteristic function of rough Heston models, *Math. Finance*, 2019, vol. 29, no. 1, pp. 3–38.
6. El-Borai, M.M., El-Nadi, K., and Fouad, H.A., On some fractional stochastic delay differential equations, *Comput. Math. Appl.*, 2010, vol. 59, pp. 1165–1170.
7. Pedjeu, J.-C. and Ladde, G.S., Stochastic fractional differential equations: modeling, method and analysis, *Chaos, Solitons, Fractals*, 2012, vol. 45, pp. 279–293.
8. Ding, X.-L., Ding, X.-L., and Nieto, J.J., Analytical solutions for multi–time scale fractional stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and their applications, *Entropy*, 2018, vol. 20, art. 63.
9. Abi Jaber, E., Cuchiero, C., Larsson, M., and Pulido, S., A weak solution theory for stochastic Volterra equations of convolution type, *Ann. Appl. Probab.*, 2021, vol. 31, no. 6, pp. 2924–2952.
10. Almeida, A., A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function, *Comm. Nonlin. Sci. Num. Simul.,* 2017, vol. 44, pp. 460–481.
11. Almeida, R., Malinowska, A.B., and Monteiro, M.T.T., Fractional differential equations with a Caputo derivative with respect to a kernel function and their applications, *Math. Methods Appl. Sci.,* 2018, vol. 41, art. 336352.
12. Peltier, R.-F. and Vehel, J.L., Multifractional Brownian motion: definition and preliminary results, *INRIA*, 1995, art. 0074045.
13. Harang, F.A., Nilssen, T.K., and Proske, F.N., Girsanov theorem for multifractional Brownian processes, *Int. J. Prob. Stoch. Processes*, 2022, vol. 94, no. 8, pp. 1137–1165.
14. Samko, S.G. and Ross, B., Integration and differentiation to a variable fractional order, *Integr. Transf. Spec. Func.,* 2007, vol. 1, no. 4, pp. 277—300.
15. Lorenzo, C. and Hartley, T., Variable order and distributed order fractional operators, *Nonlin. Dyn.*, 2002, vol. 29, pp. 57–98.
16. Azbelev, N.V., Maksimov, V.P., and Rakhmatulina, L.F., *Introduction to the Theory of Functional Differential Equations. Methods and Applications*, New York: Hindawi, 2007.

17. Hardy, G.H., Littlewood, J.E., and Pólya, G., *Inequalities. 2nd ed.*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.
18. Dai, X.J., Bu, W.P., and Xiao, A.G., Well-posedness and EM approximations for non-Lipschitz stochastic fractional integro-differential equations, *J. Comp. Appl. Math.,* 2019, vol. 356, pp. 377–390.
19. Alkhazzan, A., Wang, J., Tunc, C. [et al.] On existence and continuity results of solution for multi-time scale fractional stochastic differential equation, *Qual. Th. Dynam. Sys.*, 2023, vol. 22, art. 49.
20. Kadiev, R.I. and Ponosov, A.V., Positive invertibility of matrices and stability of Itô delay differential equations, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 571–582.