

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.928

СМЕНА УСТОЙЧИВОСТИ ИНВАРИАНТНЫХ  
МНОГООБРАЗИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ  
С РАЗНОМАСШТАБНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

© 2024 г. О. С. Кипкаева<sup>1</sup>, Е. А. Щепакина<sup>2</sup>

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва

e-mail: <sup>1</sup>kipkaeva.os@ssau.ru, <sup>2</sup>shchepakina@ssau.ru

Поступила в редакцию 31.05.2024 г., после доработки 31.05.2024 г.; принята к публикации 02.07.2024 г.

Рассмотрены инвариантные многообразия со сменой устойчивости дифференциальных систем с разномасштабными переменными, интерес к которым обусловлен их эффективным использованием при описании критических явлений в широком круге различных прикладных задач. Исследованы вопросы существования непрерывных инвариантных многообразий со сменой устойчивости в трёх критических случаях.

*Ключевые слова:* дифференциальная система, разномасштабные переменные, сингулярное возмущение, инвариантное многообразие, устойчивость, затягивание потери устойчивости

DOI: 10.31857/S0374064124090016, EDN: JYUGBN

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные системы с несколькими временными масштабами используются в большом количестве прикладных задач разнообразной природы [1–6]. Традиционные методы исследования таких систем не могут быть применены в критических случаях, связанных, например, с нарушением существования, единственности или непрерывности решений систем. Различным критическим случаям в дифференциальных системах с разномасштабными переменными посвящено много работ (см., например, [1, 7, 8] и библиографию в них), поскольку именно такие случаи часто являются особенно интересными с точки зрения приложений, так как связаны с критическими явлениями в моделируемых процессах.

В рамках данной работы рассматриваются три критических случая, приводящих к смене устойчивости и явлению затягивания потери устойчивости в дифференциальных системах [9–13], исследуются вопросы существования непрерывных инвариантных многообразий со сменой устойчивости для них. Первый случай связан с так называемыми *траекториями-утками* сингулярно возмущённых систем (см., например, пионерские работы [14, 15], а также [3, 5, 6, 8] и библиографию в них) и наблюдается при смене знака собственного значения матрицы Якоби быстрой подсистемы. Второй критический случай отвечает смене знака вещественной части пары комплексно-сопряжённых собственных значений матрицы Якоби быстрой подсистемы (см. [9, 10, 12], а также обзор [13] и приведённую в нём библиографию).

Дополнительно к этим двум известным критическим случаям ниже рассматривается ещё один, связанный с переходом пары комплексно-сопряжённых собственных значений матрицы Якоби быстрой подсистемы в пару вещественных собственных значений разных знаков.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим автономную сингулярно возмущённую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, \mu, \varepsilon), \quad (1)$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = g(x, y, \mu, \varepsilon) \quad (2)$$

с малым положительным параметром  $\varepsilon$ . Здесь  $x$  и  $y$  — векторные переменные, достаточно гладкие векторные функции  $f$  и  $g$  принимают значения, сравнимые с единицей,  $\mu$  — вектор дополнительных параметров системы. Медленная и быстрая подсистемы описываются уравнениями (1) и (2) соответственно.

Во многих теоретических и прикладных задачах необходимо рассмотреть поведение системы в целом, а не её отдельных траекторий. Для исследования динамики системы эффективным инструментом являются методы теории инвариантных многообразий (см., например, работы [5, 6, 8] и библиографию в них). Напомним основные элементы этого подхода.

**Определение 1.** Непрерывная поверхность  $S_\varepsilon$  называется *инвариантным многообразием* системы (1), (2), если любая траектория системы, имеющая с  $S_\varepsilon$  по крайней мере одну общую точку, целиком лежит на  $S_\varepsilon$ .

В рамках данного исследования сосредоточим внимание на *медленных инвариантных многообразиях*, которые представляют собой инвариантные поверхности размерности переменной  $x$ , движение фазовой точки на которых осуществляется со скоростью порядка  $O(1)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Устойчивость или неустойчивость медленного инвариантного многообразия определяется устойчивостью или неустойчивостью его нулевого приближения ( $\varepsilon = 0$ ) — так называемой медленной поверхности.

**Определение 2.** Поверхность  $S$ , описываемая уравнением

$$g(x, y, \mu, 0) = 0, \quad (3)$$

называется *медленной поверхностью*. Если её размерность равна единице, то она называется *медленной кривой*.

Пусть  $y = \varphi(x, \mu)$  — изолированное решение уравнения (3).

**Определение 3.** Подмножество  $S$  *устойчиво*, если спектр матрицы Якоби

$$J = \frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x, \mu), \mu, 0) \quad (4)$$

находится в левой открытой комплексной полуплоскости. Если есть по крайней мере одно собственное значение матрицы Якоби (4) с положительной вещественной частью, то подмножество медленной поверхности неустойчиво.

Как было отмечено выше, медленную поверхность можно рассматривать как приближение нулевого порядка медленного инвариантного многообразия. Это означает, что в  $\varepsilon$ -окрестности устойчивой части медленной поверхности существует устойчивое медленное инвариантное многообразие системы, а в  $\varepsilon$ -окрестности её неустойчивой части — неустойчивое медленное инвариантное многообразие.

Медленное инвариантное многообразие может сменить свою устойчивость в некоторых критических случаях, три из которых рассматриваются в данной работе. Как будет показано ниже, введение дополнительных условий на правые части системы позволяет построить непрерывное медленное инвариантное многообразие со сменой устойчивости в этих критических случаях.

## 2. СЛУЧАЙ НУЛЕВОГО КОРНЯ

Рассмотрим систему (1), (2) со скалярным параметром  $\mu$ , в которой положение равновесия быстрой подсистемы (2) становится неустойчивым с переходом одного вещественного собственного числа матрицы (4) через нулевое значение при изменении медленных переменных. Это означает, что медленное инвариантное многообразие системы теряет устойчивость, когда медленные переменные достигают поверхности (кривой или в скалярном случае точки) на  $S$ , на которой выполняется условие

$$\det \left| \frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x, \mu), \mu, 0) \right| = 0. \quad (5)$$

Частным случаем такой границы смены устойчивости является точка срыва (см. [2, с. 49; 6, § 8.2]).

Двигаясь по устойчивому медленному инвариантному многообразию и достигая поверхности (кривой или точки) срыва, фазовая точка системы срывается с медленного многообразия. Если специальным образом подобрать значение скалярного параметра  $\mu$ , то удаётся склеить устойчивое и неустойчивое медленные инвариантные многообразия в одной точке поверхности срыва. При этом возникает непрерывная траектория, которая сначала проходит по устойчивому инвариантному многообразию, а затем непрерывным образом продолжает движение по неустойчивому инвариантному многообразию (оба раза проходятся расстояния порядка единицы). Такие траектории сингулярно возмущённых систем получили название *траекторий-уток* [14, 15].

Описанная техника склейки в точке срыва устойчивых и неустойчивых медленных инвариантных многообразий для построения траекторий-уток впервые была предложена в [16]. Математическое обоснование этого подхода для случая, когда медленное инвариантное многообразие системы (1), (2) может быть представлено в виде  $y = h(x, \mu, \varepsilon) = \varphi(x, \mu) + O(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , где  $h(x, \mu, \varepsilon)$  является достаточно гладкой функцией от  $\varepsilon$ , а переменные  $x$  и  $y$  — скалярными, представлено в книге [5, гл. 1].

Траектории-утки и соответствующие значения параметра  $\mu$  могут быть выбраны в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра  $\varepsilon$ . Вблизи медленной кривой траектории-утки экспоненциально близки и имеют одно и то же асимптотическое разложение по степеням  $\varepsilon$ . Аналогичное утверждение справедливо и для соответствующих значений параметров: любые два значения параметра  $\mu$ , для которых существуют траектории-утки, имеют одни и те же асимптотические разложения, разница между которыми равна  $\exp\{-c/\varepsilon\}$ , где  $c$  — некоторое положительное число. Тогда можно констатировать единственность траектории-утки (и соответствующего значения параметра) для системы на плоскости [14, 15].

Но в случае  $\dim x \geq 2$  ситуация существенно меняется: если дифференциальная система имеет траекторию-утку, то она имеет и однопараметрическое семейство траекторий-уток сразу, и выбор значения дополнительного параметра  $\mu$  означает выбор точки на поверхности срыва, в которой склеены устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия. Математическое обоснование этого факта для случая  $\dim x \geq 2$ ,  $\dim y = 1$  см. в [8, гл. 8; 17].

Рассмотрим более общий случай, когда обе (медленная и быстрая) переменные являются векторами. Пусть автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений с малым положительным параметром  $\varepsilon$  и дополнительным скалярным параметром  $\mu$  для переменных  $x$ ,  $y$  и  $z$  приведена с помощью стандартной процедуры исключения независимой переменной  $t$  к неавтономной форме

$$\frac{dy}{dx} = \mathcal{Y}(x, y, z_1, z_2, \varepsilon),$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dz_1}{dx} &= 2xz_1 + \mu + \mathcal{Z}_1(x, y, z_1, z_2, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{dz_2}{dx} &= A(x)z_2 + \mu B + \mathcal{Z}_2(x, y, z_1, z_2, \varepsilon). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь  $x$  и  $z_1$  — скалярные переменные,  $|z_1| \leq r$ ;  $y \in \mathbb{R}^n$ ;  $z_2 \in \mathbb{R}^m$  и  $\|z_2\| \leq r$ ; ограниченная матрица  $A(x)$  удовлетворяет условию Липшица, а её собственные числа  $\lambda_i(x)$  таковы, что

$$\operatorname{Re} \lambda_i(x) \leq -2\beta < 0, \quad i = \overline{1, m};$$

$B$  — постоянный вектор; параметр  $\mu$  удовлетворяет неравенству

$$|\mu| \leq \varepsilon^2 K; \tag{7}$$

непрерывные функции  $\mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{Z}_1$  и  $\mathcal{Z}_2$  удовлетворяют условиям

$$\|\mathcal{Y}(x, y, z_1, z_2, \varepsilon)\| \leq N, \tag{8}$$

$$|\mathcal{Z}_1(x, y, z_1, z_2, \varepsilon)| \leq M(\varepsilon^2 + \varepsilon\|z\| + \|z\|^2), \tag{9}$$

$$\|\mathcal{Z}_2(x, y, z_1, z_2, \varepsilon)\| \leq M(\varepsilon^2 + \varepsilon\|z\| + \|z\|^2), \tag{10}$$

$$\|\mathcal{Y}(x, y, z_1, z_2, \varepsilon) - \mathcal{Y}(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \varepsilon)\| \leq M(\|y - \bar{y}\| + \|z - \bar{z}\|), \tag{11}$$

$$|\mathcal{Z}_1(x, y, z_1, z_2, \varepsilon) - \mathcal{Z}_1(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \varepsilon)| \leq M[(\varepsilon + \|\tilde{z}\|)\|z - \bar{z}\| + (\varepsilon^2 + \varepsilon\|\tilde{z}\| + \|\tilde{z}\|^2)\|y - \bar{y}\|], \tag{12}$$

$$\|\mathcal{Z}_2(x, y, z_1, z_2, \varepsilon) - \mathcal{Z}_2(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \varepsilon)\| \leq M[(\varepsilon + \|\tilde{z}\|)\|z - \bar{z}\| + (\varepsilon^2 + \varepsilon\|\tilde{z}\| + \|\tilde{z}\|^2)\|y - \bar{y}\|], \tag{13}$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}, \quad \|\tilde{z}\| = \max\{\|z\|, \|\bar{z}\|\},$$

где  $|\cdot|$  и  $\|\cdot\|$  обозначают, соответственно, модуль и норму в векторном пространстве, а константы  $M$ ,  $N$  и  $K$  положительны.

Из (9) и (10) следует, что медленная поверхность (6) определяется уравнением  $z \equiv 0$ . Поверхность  $x=0$  делит медленную поверхность на устойчивую ( $x < 0$ ) и неустойчивую ( $x > 0$ ) части, в  $\varepsilon$ -окрестности которых существуют, соответственно, устойчивое и неустойчивое медленные инвариантные многообразия [18–20], имеющие представление

$$z = h(x, y, \mu, \varepsilon), \quad h(x, y, \mu, \varepsilon) = \begin{pmatrix} h_1(x, y, \mu, \varepsilon) \\ h_2(x, y, \mu, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad h_1 \in \mathbb{R}, \quad h_2 \in \mathbb{R}^m,$$

где

$$|h_1(x, y, \mu, \varepsilon)| \leq \varepsilon^{3/2} q, \quad |h_1(x, y, \mu, \varepsilon) - h_1(x, \bar{y}, \mu, \varepsilon)| \leq \varepsilon^{3/2} \delta \|y - \bar{y}\|,$$

$$\|h_2(x, y, \mu, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^2 q, \quad \|h_2(x, y, \mu, \varepsilon) - h_2(x, \bar{y}, \mu, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^2 \delta \|y - \bar{y}\|, \quad q > 0, \quad \delta > 0.$$

Подходящим выбором  $\mu$  выбираем точку с координатами  $x=0$ ,  $y=y^*$  на поверхности  $x=0$  медленной поверхности для склейки этих многообразий. Траектория  $y = \phi(x, \mu, \varepsilon)$ , где  $\phi(0, \mu, 0) = y^*$ , после участка движения по устойчивому медленному инвариантному многообразию  $z = h(x, y, \mu, \varepsilon)$  продолжает движение по неустойчивому многообразию.

Достаточные условия существования траектории-утки системы (6) сформулированы в следующей теореме.

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия (7)–(13). Тогда существуют числа  $\varepsilon_0 > 0$  и  $q, \delta$  такие, что для любого  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  существуют  $\mu = \mu^*(\varepsilon)$  и соответствующая  $\mu^*(\varepsilon)$  траектория-утка, проходящая через точку  $(x=0, y=y^*)$  медленного инвариантного многообразия.

Таким образом, траектория-утка может быть определена как одномерное медленное инвариантное многообразие со сменой устойчивости, возникающее при особом выборе дополнительного параметра системы. Для построения многомерного инвариантного многообразия со сменой устойчивости, когда склейка устойчивого и неустойчивого многообразий осуществляется одновременно во всех точках поверхности срыва, вместо параметра  $\mu$  необходима функция  $\mu = \mu(y, \varepsilon)$  [8, гл. 8; 18; 19].

### 3. СЛУЧАЙ ПАРЫ ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ

Рассмотрим аналитическую быстро-медленную систему, полученную из (1), (2) перемасштабированием времени:

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon f(x, y, \mu, \varepsilon), \quad \frac{dy}{d\tau} = g(x, y, \mu, \varepsilon), \quad (14)$$

для которой особая точка уравнения быстрых движений становится неустойчивой с переходом пары собственных значений через мнимую ось при изменении медленных переменных.

Как и ранее, медленное инвариантное многообразие изменяет свою устойчивость, но, в отличие от предыдущего случая, граница устойчивости не является поверхностью (кривой или точкой) срыва, так как условие (5) не выполнено. Это означает, что траектория системы (14) не срывается с медленного инвариантного многообразия сразу же, она продолжает двигаться вдоль неустойчивой части медленной поверхности в течение времени порядка  $O(\varepsilon^{-1})$  после пересечения границы устойчивости, и этот участок имеет расстояние порядка  $O(1)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Только после этого траектория срывается с медленного инвариантного многообразия и происходит переход к быстрому движению. Это явление затягивания потери устойчивости впервые было исследовано в статье [9] и в более общем случае рассмотрено в [10].

Заметим, что траектории, описанные выше, ведут себя подобно траекториям-уткам. Однако есть некоторое различие между этими двумя явлениями. Траектории-утки существуют в системах с конечной гладкостью, в то время как рассмотренное выше явление затягивания потери устойчивости происходит только в аналитических системах. Кроме того, траектории-утки относятся к редким явлениям и существуют для экспоненциально малого интервала значений дополнительного параметра, в то время как для затягивания потери устойчивости не нужно выбирать параметры. В случае затягивания потери устойчивости функция, описывающая медленное инвариантное многообразие, имеет разрыв первого рода, а в случае траектории-утки — бесконечный разрыв. Для того чтобы устранить этот разрыв первого рода с помощью построения глобального медленного инвариантного многообразия со сменой устойчивости, нужно выбрать пару дополнительных функций.

Рассмотрим быстро-медленную автономную систему для переменных  $x$ ,  $y$  и  $z$ , которая приведена с помощью стандартной процедуры исключения независимой переменной  $t$  к неавтономной форме

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon \mathcal{Y}(x, y, z, \varepsilon), \quad \frac{dz}{dx} = A(x)z + \mu(y, \varepsilon) + \mathcal{Z}(x, y, z, \mu(y, \varepsilon), \varepsilon). \quad (15)$$

Здесь  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}^2$  и  $\|z\| \leq r$ , матрица  $A(x)$  имеет вид

$$A(x) = \begin{pmatrix} 2x & \nu \\ -\nu & 2x \end{pmatrix},$$

векторные функции

$$\mu(y, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \mu_1(y, \varepsilon) \\ \mu_2(y, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Z}(x, y, z, \mu(y, \varepsilon), \varepsilon) = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_1(x, y, z, \mu_1(y, \varepsilon), \mu_2(y, \varepsilon), \varepsilon) \\ \mathcal{Z}_2(x, y, z, \mu_1(y, \varepsilon), \mu_2(y, \varepsilon), \varepsilon) \end{pmatrix}$$

и  $\mathcal{Y}(x, y, z, \varepsilon)$  непрерывны и удовлетворяют следующим условиям:

$$\|\mathcal{Y}(x, y, z, \varepsilon)\| \leq N, \quad (16)$$

$$\|\mathcal{Z}(x, y, z, \mu(y, \varepsilon), \varepsilon)\| \leq M(\varepsilon + \varepsilon\|z\| + \|z\|^2), \quad (17)$$

$$\|\mathcal{Y}(x, y, z, \varepsilon) - \mathcal{Y}(x, \bar{y}, \bar{z}, \varepsilon)\| \leq M(\|y - \bar{y}\| + \|z - \bar{z}\|), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{Z}(x, y, z, \mu(y, \varepsilon), \varepsilon) - \mathcal{Z}(x, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\mu}(\bar{y}, \varepsilon), \varepsilon)\| \leq \\ & \leq M[(\varepsilon + \|\bar{z}\|)\|z - \bar{z}\| + (\varepsilon + \varepsilon\|\bar{z}\| + \|\bar{z}\|^2)\|y - \bar{y}\| + \varepsilon\|\mu - \bar{\mu}\|], \quad \|\bar{z}\| = \max\{\|z\|, \|\bar{z}\|\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\|\mu(y, \varepsilon)\| \leq \varepsilon K, \quad \|\mu(y, \varepsilon) - \mu(\bar{y}, \varepsilon)\| \leq \varepsilon L\|y - \bar{y}\|, \quad (20)$$

где  $M, N, K$  и  $L$  — положительные константы.

Имеет место следующая

**Теорема 2** [12]. Пусть для системы (15) выполнены условия (16)–(20). Тогда существуют числа  $\varepsilon_0 > 0$  и  $q, \delta$  такие, что для любого  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  существуют функция  $\mu = \mu^*(y, \varepsilon)$  и медленное инвариантное многообразие со сменой устойчивости  $z = h(x, y, \varepsilon)$ , отвечающее  $\mu^*(y, \varepsilon)$  и удовлетворяющее неравенствам

$$\|h(x, y, \varepsilon)\| \leq \varepsilon q, \quad \|h(x, y, \varepsilon) - h(x, \bar{y}, \varepsilon)\| \leq \varepsilon \delta \|y - \bar{y}\|.$$

Отметим, что в случае затягивания потери устойчивости, рассмотренном в [9, 10], склейка устойчивых и неустойчивых частей одномерного медленного инвариантного многообразия для случая  $\dim y = 0$  требует два дополнительных параметра. Но для построения инвариантного многообразия со сменой устойчивости при  $\dim y \geq 1$  необходима пара функций.

#### 4. СЛУЧАЙ КРАТНОГО НУЛЕВОГО КОРНЯ

Изучим случай, когда действительные (а также мнимые) части пары комплексно-сопряжённых собственных значений матрицы Якоби (4) обращаются в нуль одновременно, с последующим возникновением пары вещественных собственных значений разных знаков. Следует отметить, что эта бифуркация является одной из негрубых. Тогда могут возникнуть траектории, подобные траекториям-уткам. Рассмотрим этот случай на следующем примере.

**Пример 1.** Для системы

$$\dot{x} = 1, \quad \varepsilon \dot{y} = z, \quad \varepsilon \dot{z} = axy + bxz, \quad (21)$$

где  $a$  и  $b$  — константы, медленная кривая определяется вырожденной системой

$$z = 0, \quad axy + bxz = 0.$$

Отметим, что в данном случае медленная кривая совпадает с точным медленным инвариантным многообразием системы.

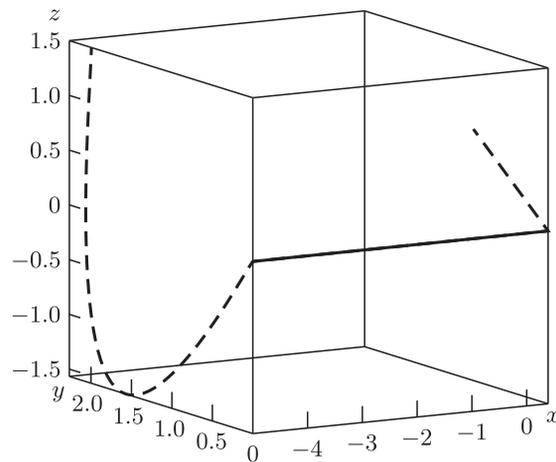
Собственные значения матрицы Якоби (4) имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{bx \pm \sqrt{b^2 x^2 + 4ax}}{2}.$$

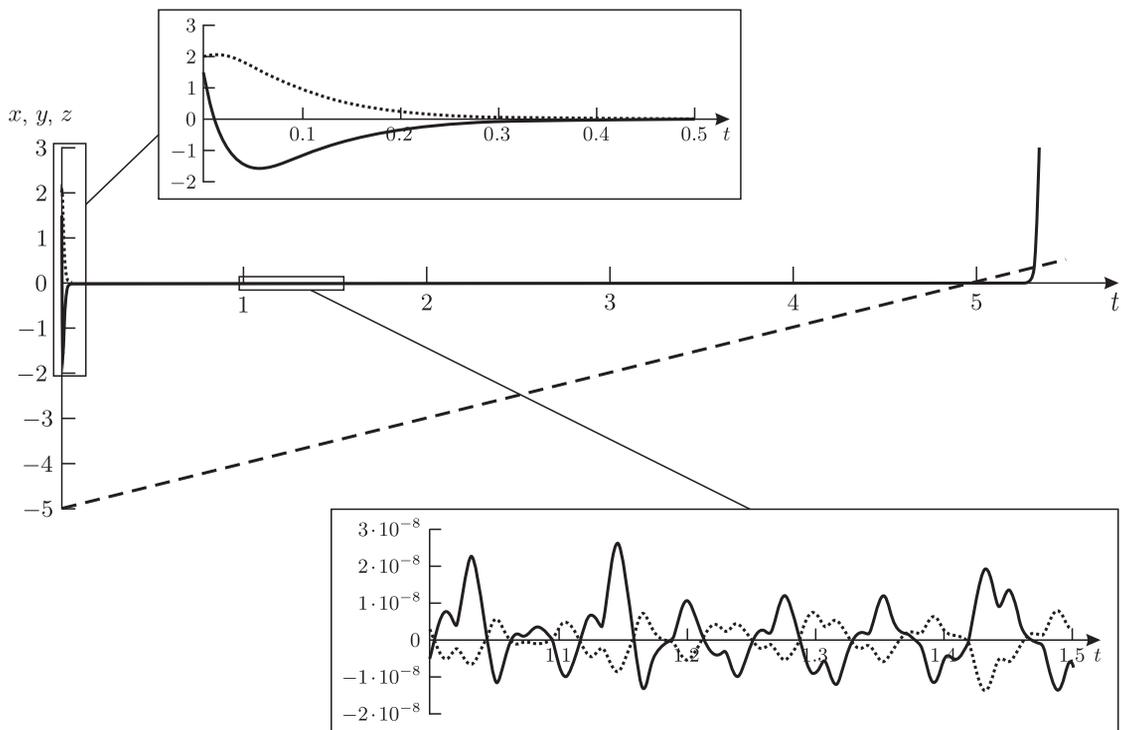
При положительных значениях  $a$  и  $b$  и  $x < -4a/b^2$  собственные числа являются отрицательными вещественными, при  $x \in (-4a/b^2, 0)$  — комплексно-сопряжёнными с отрицательной вещественной частью. При  $x = 0$  вещественные части и коэффициенты при мнимой части этой пары комплексно-сопряжённых собственных значений одновременно обнуляются, т.е. возникает кратный нулевой корень. При  $x > 0$  собственные числа становятся вещественными и имеют разные знаки. Таким образом, на интервале  $x \in (-\infty, 0)$  медленное инвариантное многообразие системы (21) устойчиво, а на интервале  $x \in (0, +\infty)$  — нет.

Аналогичный сценарий смены устойчивости медленным инвариантным многообразием при прохождении медленной переменной через нуль наблюдается и для  $a < 0$  и  $b < 0$ , но уже не при возрастании  $x$ , а при убывании.

На рис. 1 и 2 продемонстрирован случай  $a > 0$  и  $b > 0$ , а именно когда  $a = 1$ ,  $b = 1$  в системе (21), с начальными условиями  $x(0) = -4.95$ ,  $y(0) = 2$ ,  $z(0) = 1.5$  и значениями параметров  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = 1.2$ ,  $\alpha_2 = 0.1$ ,  $\alpha_3 = 1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ . Ось  $x$  является точным инвариантным многообразием со сменой устойчивости. Траектория системы с начальной точкой в области влияния его устойчивой части быстро притягивается к многообразию и следует вдоль



**Рис. 1.** Инвариантное многообразие со сменой устойчивости (сплошная линия) и траектория системы (21) (штриховая линия)



**Рис. 2.** Графики компонентов решения системы (21) в зависимости от времени: штриховая линия —  $x(t)$ , пунктирная линия —  $y(t)$ , сплошная линия —  $z(t)$ . На врезках приведены выделенные участки в увеличенном масштабе

него. При достижении  $x = 0$  она попадает в область влияния неустойчивой части инвариантного многообразия, поэтому через некоторое время траектория срывается с медленного инвариантного многообразия, после чего следует участок быстрого движения.

Следующее утверждение является обобщением рассмотренного примера.

**Теорема 3.** *Для системы*

$$\dot{x} = 1, \quad \varepsilon \dot{y} = z, \quad \varepsilon \dot{z} = axy + bxz + f(x) + \mu, \quad (22)$$

где  $f(x) = \alpha_0 x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} x + \alpha_k$ ,  $\alpha_i$  ( $i = \overline{0, k}$ ) и  $k$  — константы, существует число  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что для любого  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  существует  $\mu = \mu^*(\varepsilon)$  и точное медленное инвариантное многообразие со сменой устойчивости

$$\begin{aligned} y &= y(x, \varepsilon) = A_0 x^{k-1} + A_1 x^{k-2} + \dots + A_{k-2} x + A_{k-1}, \\ z &= z(x, \varepsilon) = \varepsilon (A_0 (k-1) x^{k-2} + A_1 (k-2) x^{k-3} + \dots + 2A_{k-3} x + A_{k-2}), \end{aligned} \quad (23)$$

отвечающее  $\mu^*(\varepsilon)$ , где

$$\begin{aligned} \mu^*(\varepsilon) &= -\alpha_k + \varepsilon^2 2A_{k-3}, \quad A_0 = -\alpha_0/a, \quad A_1 = -[\alpha_1 + \varepsilon b(k-1)A_0]/a, \\ A_2 &= -[\alpha_2 + \varepsilon b(k-2)A_1]/a, \quad A_3 = -[\alpha_3 + \varepsilon b(k-3)A_2 - \varepsilon^2(k-1)(k-2)A_0]/a, \\ A_4 &= -[\alpha_4 + \varepsilon b(k-4)A_3 - \varepsilon^2(k-2)(k-3)A_1]/a, \quad \dots, \quad A_{k-1} = -[\alpha_{k-1} + \varepsilon bA_{k-2} - \varepsilon^2 6A_{k-4}]/a. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Так как

$$\varepsilon \dot{y} = \varepsilon \frac{\partial y(x, \varepsilon)}{\partial x} \dot{x}, \quad \varepsilon \dot{z} = \varepsilon \frac{\partial z(x, \varepsilon)}{\partial x} \dot{x},$$

то из (22) с учётом уравнений инвариантности [6, с. 26] для  $y = y(x, \varepsilon)$  и  $z(x, \varepsilon)$  имеем

$$z(x, \varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial y(x, \varepsilon)}{\partial x}, \quad (24)$$

$$axy(x, \varepsilon) + bxz(x, \varepsilon) + f(x) + \mu(\varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial z(x, \varepsilon)}{\partial x}. \quad (25)$$

Подставив выражение для  $y(x, \varepsilon)$  из (23) в (24), получим

$$z(x, \varepsilon) = \varepsilon (A_0 (k-1) x^{k-2} + A_1 (k-2) x^{k-3} + \dots + 2A_{k-3} x + A_{k-2}).$$

Уравнение (25) с учётом (23) принимает вид

$$\begin{aligned} & ax(A_0 x^{k-1} + A_1 x^{k-2} + \dots + A_{k-2} x + A_{k-1}) + \\ & + \varepsilon bx(A_0 (k-1) x^{k-2} + A_1 (k-2) x^{k-3} + \dots + 2A_{k-3} x + A_{k-2}) + \alpha_0 x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} x + \alpha_k + \mu = \\ & = \varepsilon^2 (A_0 (k-1)(k-2) x^{k-3} + A_1 (k-2)(k-3) x^{k-4} + \dots + 6A_{k-4} x + 2A_{k-3}). \end{aligned} \quad (26)$$

Правые и левые части уравнения (26) представляют собой многочлены от медленной переменной  $x$ . Приравнявая коэффициенты в (26) при одинаковых степенях  $x$ , получаем следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \text{при } x^k & \quad aA_0 + \alpha_0 = 0, \\ \text{при } x^{k-1} & \quad aA_1 + \varepsilon b(k-1)A_0 + \alpha_1 = 0, \\ \text{при } x^{k-2} & \quad aA_2 + \varepsilon b(k-2)A_1 + \alpha_2 = 0, \\ \text{при } x^{k-3} & \quad aA_3 + \varepsilon b(k-3)A_2 + \alpha_3 = \varepsilon^2(k-1)(k-2)A_0, \\ \text{при } x^{k-4} & \quad aA_4 + \varepsilon b(k-4)A_3 + \alpha_4 = \varepsilon^2(k-2)(k-3)A_1, \quad \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{при } x & \quad aA_{k-1} + \varepsilon bA_{k-2} + \alpha_{k-1} = \varepsilon^2 6A_{k-4}, \\ \text{при } x^0 & \quad \alpha_k + \mu = \varepsilon^2 2A_{k-3}. \end{aligned} \tag{27}$$

Из последнего равенства в (27) находим

$$\mu = \mu^*(\varepsilon) = -\alpha_k + \varepsilon^2 2A_{k-3}.$$

Коэффициенты  $A_0, \dots, A_{k-1}$  однозначно определяются из остальных равенств в (27), что завершает доказательство теоремы.

Продемонстрируем утверждение теоремы 3 на следующем примере.

**Пример 2.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = 1, \quad \varepsilon \dot{y} = z, \quad \varepsilon \dot{z} = axy + bxz + f(x) + \mu, \tag{28}$$

где  $f(x) = \alpha_0 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3$ ,  $\alpha_i$  ( $i = \overline{0, 3}$ ) — константы.

Вырожденная система

$$z = 0, \quad axy + bxz + f(x) + \mu = 0$$

задаёт медленную кривую системы (28). Интервалы устойчивости, а также сценарий смены устойчивости медленной кривой такие же, как и в примере 1, так как матрицы Якоби (4) систем (21) и (28) совпадают.

Для  $\mu = -\alpha_3 - 2(\alpha_0/a)\varepsilon^2$  система (28) имеет траекторию, подобную траектории-утке:

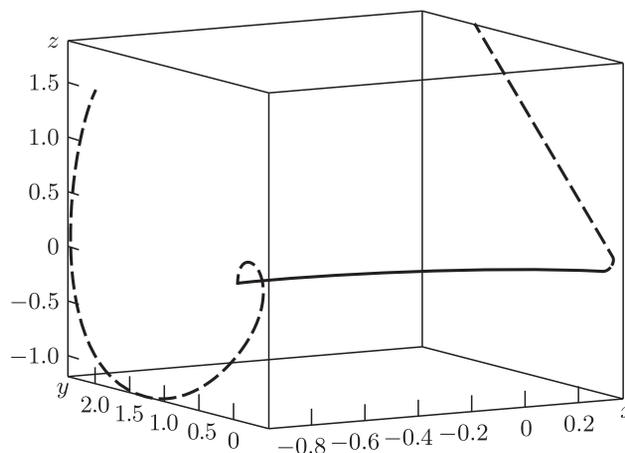
$$y = A_0 x^2 + A_1 x + A_2, \quad z = -\varepsilon(2A_0 x + A_1), \tag{29}$$

где

$$A_0 = -\frac{\alpha_0}{a}, \quad A_1 = -\frac{\alpha_1}{a} + \varepsilon \frac{2b\alpha_0}{a^2}, \quad A_2 = -\frac{\alpha_2}{a} + \varepsilon \frac{b\alpha_1}{a^2} - \varepsilon^2 \frac{2b^2\alpha_0}{a^3}.$$

Эта траектория, соответствующая точному решению системы (28), является точным медленным инвариантным многообразием со сменой устойчивости. Но, в отличие от траектории-утки, смена устойчивости медленным инвариантным многообразием при прохождении медленной переменной через нуль связана не со сменой знака вещественного собственного числа матрицы (4), а с возникновением её кратного нулевого собственного числа.

На рис. 3 показана траектория системы (28) с начальной точкой в области влияния устойчивой части точного инвариантного многообразия (29). Как и в примере 1, эта траектория



**Рис. 3.** Точное медленное инвариантное многообразие со сменой устойчивости (29) (сплошная линия) и траектория системы (28) с начальным условием  $x(0) = -0.95$ ,  $y(0) = 2$ ,  $z(0) = 1.5$  (штриховая линия);  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = 1.2$ ,  $\alpha_2 = 0.1$ ,  $\alpha_3 = 1$ ,  $\varepsilon = 0.01$

быстро притягивается к многообразию и следует вдоль него. При достижении поверхности  $x = 0$  она попадает в область влияния неустойчивой части инвариантного многообразия, поэтому спустя некоторое время траектория срывается с медленного инвариантного многообразия, а далее следует участок быстрого движения.

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева, А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузov. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. — 106 с.
2. Мищенко, Е.Ф. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания / Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов. — М. : Наука, 1975. — 247 с.
3. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах / Е.Ф. Мищенко, Ю.С. Колесов, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов. — М. : Физматлит, 1995. — 328 с.
4. Дмитриев, М.Г. Сингулярные возмущения в задачах управления / М.Г. Дмитриев, Г.А. Курина // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 1. — С. 3–51.
5. Соболев, В.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике / В.А. Соболев, Е.А. Щепакина. — М. : Физматлит, 2010. — 319 с.
6. Shchepakina, E. Singular Perturbations. Introduction to System Order Reduction Methods with Applications / E. Shchepakina, V. Sobolev, M.P. Mortell. — Cham; Berlin; Heidelberg; London : Springer, 2014. — 225 p.
7. Gu, Z.M. On singular singularly perturbed initial value problems / Z.M. Gu, N.N. Nefedov, R.E. O'Malley Jr. // SIAM J. Appl. Math. — 1989. — V. 49, № 1. — P. 1–25.
8. Singular Perturbation and Hysteresis / Eds. M.P. Mortell, R.E. O'Malley, A. Pokrovskii, V.A. Sobolev. — Philadelphia : SIAM, 2005. — 360 p.
9. Шишкова, М.А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных / М.А. Шишкова // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 209, № 3. — С. 576–579.
10. Нейштадт, А.И. Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось / А.И. Нейштадт // Успехи мат. наук. — 1985. — Т. 40, № 5. — С. 300–301.
11. Butuzov, V.F. Singularly perturbed boundary value problems for systems of Tichonov's type in case of exchange of stabilities / V.F. Butuzov, N.N. Nefedov, K.R. Schneider // J. Differ. Equat. — 1999. — V. 159, № 2. — P. 427–446.
12. Щепакина, Е.А. Два вида смены устойчивости интегральных многообразий / Е.А. Щепакина // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 5. — С. 713–716.
13. Нейштадт, А.И. Динамические эффекты, связанные с потерей устойчивости положений равновесия и периодических траекторий / А.И. Нейштадт, Д.В. Трещев // Успехи мат. наук. — 2021. — Т. 76, № 5. — С. 147–194.
14. Chasse au canard / E. Benoit, J.L. Callot, F. Diener, M. Diener // Collectanea Mathematica. — 1981. — V. 31–32, № 1–3. — P. 37–119.
15. Звонкин, А.К. Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений / А.К. Звонкин, М.А. Шубин // Успехи мат. наук. — 1984. — Т. 39, № 2. — С. 77–127.
16. Gorelov, G.N. Mathematical modeling of critical phenomena in thermal explosion theory / G.N. Gorelov, V.A. Sobolev // Combustion and Flame. — 1991. — V. 87. — P. 203–210.
17. Соболев, В.А. Траектории-утки в одной задаче теории горения / В.А. Соболев, Е.А. Щепакина // Дифференц. уравнения. — 1996. — Т. 32, № 9. — С. 1175–1184.
18. Shchepakina, E. Integral manifolds, canards and black swans / E. Shchepakina, V. Sobolev // Nonlin. Anal. A. — 2001. — V. 44. — P. 897–908.

19. Щепакина, Е.А. Медленные интегральные многообразия со сменой устойчивости в случае векторной быстрой переменной / Е.А. Щепакина // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 10. — С. 1358–1364.
20. Shchepakina, E.A. Black swans and canards in self-ignition problem / E.A. Shchepakina // Nonlin. Anal.: Real World Appl. — 2003. — V. 4. — P. 45–50.

**STABILITY CHANGE OF INVARIANT MANIFOLDS  
OF DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH MULTI-SCALE VARIABLES**

© 2024 / O. S. Kipkaeva<sup>1</sup>, E. A. Shchepakina<sup>2</sup>

*Samara National Research University, Russia*  
e-mail: <sup>1</sup>kipkaeva.os@ssau.ru, <sup>2</sup>shchepakina@ssau.ru

The paper considers invariant manifolds with a change in stability of differential systems with different-scale variables. The interest in such manifolds is explained by their widespread use in applied problems. The questions of the existence of continuous invariant manifolds with a change in stability are investigated in three critical cases.

*Keywords:* differential system, multi-scale variables, singular perturbation, invariant manifold, stability, delayed stability loss

REFERENCES

1. Vasileva, A.B. and Butuzov, V.F., *Singularly Perturbed Equations in Critical Cases*, Madison: Mathematics Research Center University of Wisconsin, 1980.
2. Mishchenko, E.F. and Rozov, N.Kh., *Differential Equations with Small Parameters and Relaxation Oscillations*, New York: Plenum Press, 1980.
3. Mishchenko, E.F., Kolesov, Yu.S., Kolesov, A.Yu., and Rozov, N.Kh., *Asymptotic Methods in Singularly Perturbed Systems*, New York: Plenum Press, 1995.
4. Dmitriev, M.G. and Kurina, G.A., Singular perturbations in control problems, *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 1, pp. 1–43.
5. Sobolev, V.A. and Shchepakina, E.A., *Redukciya modelej i kriticheskie yavleniya v makrokinetike* (Reduction of models and critical phenomena in macrokinetics), Moscow: Fizmatlit, 2010.
6. Shchepakina, E., Sobolev, V., and Mortell, M.P., *Singular Perturbations. Introduction to System Order Reduction Methods with Applications*, Cham; Berlin; Heidelberg; London: Springer, 2014.
7. Gu, Z.M., Nefedov, N.N., and O'Malley, R.E. Jr., On singular singularly perturbed initial value problems, *SIAM J. Appl. Math.*, 1989, vol. 49, no. 1, pp. 1–25.
8. Mortell, M.P., O'Malley, R.E., Pokrovskii, A., and Sobolev, V.A. (eds), *Singular Perturbation and Hysteresis*, Philadelphia: SIAM, 2005.
9. Shishkova, M.A., Examination of a system of differential equations with a small parameter in the highest derivatives, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1973, vol. 209, no. 3, pp. 576–579.
10. Neustadt, A.I., Asymptotic investigation of the loss of stability by an equilibrium as a pair of eigenvalues slowly cross the imaginary axis, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1985, vol. 40, pp. 190–191.
11. Butuzov, V.F., Nefedov, N.N., and Schneider, K.R., Singularly perturbed boundary value problems for systems of Tichonov's type in case of exchange of stabilities, *J. Differ. Equat.*, 1999, vol. 159, no. 2, pp. 427–446.
12. Shchepakina, E.A., Two forms of stability change for integral manifolds, *Differ. Equat.*, 2004, vol. 40, no. 5, pp. 766–769.
13. Neishtadt, A.I. and Treschev, D.V., Dynamical phenomena connected with stability loss of equilibria and periodic trajectories, *Russ. Math. Surv.*, 2021, vol. 76, no. 5, pp. 883–926.
14. Benoit, E., Callot, J.L., Diener, F., and Diener, M., Chasse au canard, *Collectanea Mathematica*, 1981, vol. 31–32, no. 1–3, pp. 37–119.
15. Zvonkin, A.K. and Shubin, M.A., Nonstandard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations, *Russ. Math. Surv.*, 1984, vol. 39, no. 2, pp. 69–131.

16. Gorelov, G.N. and Sobolev, V.A., Mathematical modeling of critical phenomena in thermal explosion theory, *Combustion and Flame*, 1991, vol. 87, pp. 203–210.
17. Sobolev, V.A. and Shchepakina, E.A., Duck trajectories in a problem of combustion theory, *Differ. Equat.*, 1996, vol. 32, no. 9, pp. 1177–1186.
18. Shchepakina, E. and Sobolev, V., Integral manifolds, canards and black swans, *Nonlin. Anal. A*, 2001, vol. 44, pp. 897–908.
19. Shchepakina, E.A., Slow integral manifolds with stability change in the case of a fast vector variable, *Differ. Equat.*, 2002, vol. 38, no. 10, pp. 1446–1452.
20. Shchepakina, E.A., Black swans and canards in self-ignition problem, *Nonlin. Anal.: Real World Appl.*, 2003, vol. 4, pp. 45–50.