

УДК 517.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ЛИУВИЛЛЯ

© А. Д. Ахметшин

*Карагандинский государственный университет имени Е.А. Букетова, Казахстан**e-mail: aleksandr_050401@mail.ru**Поступила в редакцию 24.02.2024 г., после доработки 06.06.2024 г.; принята к публикации 02.07.2024 г.*

Рассмотрена краевая задача для уравнения с переменными коэффициентами, содержащего дробную производную Лиувилля по одной из переменных с началом в точке минус бесконечность. Получены представление решения задачи, достаточные условия его существования и единственности.

Ключевые слова: уравнение с частными производными, краевая задача, производная дробного порядка, производная Лиувилля, функция Райта.

DOI: 10.31857/S0374064124080109, EDN: KCECCJ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим в области $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R} : a < x < b, y < T\}$ уравнение

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \lambda(x) D_{-\infty y}^{\alpha} u(x, y) + \mu(x) u(x, y) = f(x, y), \quad (1)$$

где

$$D_{-\infty y}^{\alpha} u(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^y \frac{(y-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u(x, t) dt, \quad 0 < \alpha < 1,$$

— дробная производная Лиувилля [1, с. 85].

Одними из первых работ по решению уравнений с частными производными вида (1) были статьи [2, 3]. В [4–11] исследованы краевые задачи для уравнений с различными видами дробных производных как с постоянными, так и с переменными коэффициентами.

Ниже будем использовать обозначения

$$\Omega_a = \{(x, y) \in \mathbb{R} : a \leq x < b, y < T\}, \quad \Omega^{\varepsilon} = \{(x, y) \in \mathbb{R} : a < x < b - \varepsilon, y < T - \varepsilon\}.$$

Определение. Будем называть функцию $u(x, y)$ *регулярным решением уравнения (1)* в области Ω , если: $u(x, y) \in C(\Omega_a)$, функция $u(x, y)$ непрерывно дифференцируема по переменной x , а функция $D_{-\infty y}^{\alpha-1} u(x, y)$ — по переменной y для всех $(x, y) \in \Omega$; $(R - y)^{-\alpha} u(x, y)$, как функция переменной y , интегрируема на множестве $y \in (-\infty, R)$, $R < T$, для любого $x \in (a, b)$; $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) в Ω .

Задача. В области Ω найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$u(a, y) = \varphi(y), \quad y < T. \quad (2)$$

Рассмотрим функцию

$$\omega_\eta(x, y) = y^{\eta-1} \phi\left(-\alpha, \eta, -\frac{x}{y^\alpha}\right), \quad x, y > 0, \quad (3)$$

где

$$\phi(\xi, \eta, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\xi k + \eta)}, \quad \xi > -1,$$

— функция Райта [12, 13].

В данной работе будут использованы следующие свойства для функции (3) [11]:

$$\frac{\partial \omega_\eta(x, y)}{\partial x} = -\omega_{\eta-\alpha}(x, y); \quad (4)$$

$$D_{0y}^\beta \omega_\eta(x, y) = \omega_{\eta-\beta}(x, y), \quad \beta \in \mathbb{R}; \quad (5)$$

$$|\omega_\eta(x, y)| < C y^{\eta-1} \exp\{-\rho x^{1/(1-\alpha)} y^{-\alpha/(1-\alpha)}\}, \quad C = C(\alpha, \eta), \quad \rho < (1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}; \quad (6)$$

$$\omega_\eta(x, y) > 0, \quad \eta \geq 0;$$

$$|\omega_\eta(x, y)| < C x^{-\theta} y^{\eta+\alpha\theta-1}, \quad \begin{cases} -1, & -\eta \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0, & -\eta \notin \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{cases} \quad C = C(\alpha, \eta, \theta). \quad (7)$$

Здесь и далее через C обозначаются положительные постоянные, вообще говоря, различные, при этом в скобках, в случае необходимости, указываются параметры, от которых зависит их выбор.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть $\mu(x) \in C(a, b) \cap L(a, b)$, $\lambda(x) \in L(a, b)$, $(\lambda(x))^{-1} \in C(a, b)$, $\lambda(x) > 0$ при $x \in (a, b)$, $f(x, y), f(x, y)/(\lambda(x)) \in L(\Omega^\varepsilon)$, $\varphi(y) \in L(-\infty, T - \varepsilon)$ и

$$\lim_{R \rightarrow -\infty} \sup_{\substack{x \in (a, b - \varepsilon) \\ y < R}} |u(x, y)| = 0 \quad (8)$$

для любого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$.

Если $u(x, y)$ — регулярное решение задачи (1), (2), то оно представимо в виде

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^y \varphi(t) G_0(x, a, y, t) dt + \int_a^x \int_{-\infty}^y f(q, t) G_0(x, q, y, t) dt dq, \quad (9)$$

где

$$G_\eta(x, q, y, t) = e^{-\int_q^x \mu(\gamma) d\gamma} \omega_\eta\left(\int_q^x \lambda(\gamma) d\gamma, y - t\right). \quad (10)$$

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения (1). Сделаем замену

$$u = \psi(x, y) e^{-\int_a^x \mu(\gamma) d\gamma}. \quad (11)$$

Легко заметить, что подстановка (11) позволит избавиться от третьего слагаемого в уравнении (1), при этом функция $\psi(x, y)$ будет регулярным решением нового уравнения. В результате замены и введения обозначений

$$z = \int_a^x \lambda(s) ds + a, \quad a < z < a + \int_a^b \lambda(s) ds,$$

$$\bar{\psi}(z, y) = \psi(x(z), y), \quad \bar{f}_2(z, y) = f(x(z), y) e^{\int_a^{x(z)} \mu(\gamma) d\gamma} (\lambda(x(z)))^{-1}$$

получим уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial \bar{\psi}(z, y)}{\partial z} + \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} \bar{\psi}(z, y) = \bar{f}_2(z, y).$$

Из регулярности $u(x, y)$ следует регулярность $\bar{\psi}(z, y)$ и

$$\lim_{R \rightarrow -\infty} \sup_{\substack{x(z) \in (a, b-\varepsilon) \\ y < R}} |\bar{\psi}(z, y)| = 0.$$

Заметим, что $\bar{\psi}(a, y) = \varphi(y)$.

В силу теоремы из [11] и обратной замены $x(s) = q$, $s = \int_a^q \lambda(\gamma) d\gamma + a$, регулярное решение уравнения, полученного в результате подстановки (11), можно записать в виде

$$\psi(x, y) = \int_{-\infty}^y \varphi(t) \omega_0 \left(\int_a^x \lambda(\gamma) d\gamma, y - t \right) dt + \int_{a-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(q, t) e^{\int_a^q \mu(\gamma) d\gamma} \omega_0 \left(\int_q^x \lambda(\gamma) d\gamma, y - t \right) dt dq.$$

Возвращаясь к начальным обозначениям (11), получим (9). Теорема доказана.

Теорема 2. Существует не более одного регулярного решения задачи (1), (2) в классе функций, удовлетворяющих условию (8).

Доказательство. Пусть $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ — два регулярных решения задачи (1), (2). Тогда их разность $v(x, y) \equiv u_2(x, y) - u_1(x, y)$ является регулярным решением задачи

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \lambda(x) D_{-\infty y}^\alpha v(x, y) + \mu(x) v(x, y) = 0,$$

$$v(a, y) = u_2(a, y) - u_1(a, y) = 0,$$

удовлетворяющим условию (8). В силу теоремы 1 это регулярное решение $v(x, y) \equiv 0$, откуда следует, что $u_2(x, y) \equiv u_1(x, y)$. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $\varphi(y) \in C(-\infty, T) \cap L(-\infty, T - \varepsilon)$, $f(x, y) \in C(\Omega_a) \cap L(\Omega^\varepsilon)$, $\mu(x) \in C(a, b) \cap L(a, b)$, $\lambda(x) = (x - a)^\zeta g_1(x)$, $g_1(x) \in C[a, b]$, $g_1(x) > 0$ для любого $x \in [a, b]$, $\zeta > -1$,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} (-y)^\delta \varphi(y) = 0, \quad \delta > 1 - \alpha, \quad (12)$$

и функция $f(x, y)$ представима в виде

$$f(x, y) = D_{-\infty y}^{-\nu} g(x, y), \quad \nu > \alpha, \quad (13)$$

где $g(x, y) \in L(\Omega^\varepsilon)$, $(x - a)^{-\sigma_1} g(x, y) \in C(\Omega_a)$ и

$$\sup \{ (x - a)^{-\sigma_1} (T - y)^{-\sigma_2} |g(x, y)| : (x, y) \in \Omega^\varepsilon \} \leq C(\varepsilon) \quad (14)$$

для некоторых $\sigma_1 > \zeta$, $-\sigma_2 > \nu + 1$ и любого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$.

Тогда функция $u(x, y)$, определённая равенством (9), является регулярным решением задачи (1), (2).

Доказательство. Рассмотрим функцию (10). Из условий теоремы следует, что $g_1(x) \geq C(\varepsilon) > 0$ и $|\int_a^x \mu(\gamma) d\gamma| < +\infty$ для любого $x \in [a, b - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, откуда с учётом (7) получим

$$G_\eta(x, q, y, t) \leq C \left(\int_q^x \lambda(\gamma) d\gamma \right)^{-\theta} (y-t)^{\eta+\alpha\theta-1} \leq C(q-a+(x-q)\theta_1)^{-\zeta\theta} (x-q)^{-\theta} (y-t)^{\eta+\alpha\theta-1}, \quad (15)$$

где $\theta_1 = \theta_1(x, q)$, $\theta_1 \in (0, 1)$.

Если $q = a$, то

$$G_\eta(x, a, y, t) \leq C(x-a)^{-\theta(\zeta+1)} (y-t)^{\eta+\alpha\theta-1}.$$

Введём обозначения

$$\Phi(x, y) = \int_{-\infty}^y \varphi(t) G_0(x, a, y, t) dt, \quad F(x, y) = \int_a^x \int_{-\infty}^y f(q, t) G_0(x, q, y, t) dt dq,$$

$$L(u) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \lambda(x) D_{-\infty y}^\alpha u(x, y) + \mu(x) u(x, y).$$

Используя (12)–(15), получаем

$$|\Phi(x, y)| \leq C \int_{-\infty}^y (T-t)^{-\delta} G_0(x, a, y, t) dt \leq C(T-y)^{-\delta}, \quad (16)$$

$$|F(x, y)| \leq C \int_a^x \int_{-\infty}^y (q-a)^{\sigma_1} (T-t)^{\sigma_2} (q-a+(x-q)\theta_1)^{-\zeta\theta} (x-q)^{-\theta} (y-t)^{\nu+\alpha\theta-1} dt dq \leq$$

$$\leq C(x-a)^{\sigma_1-\theta+1-\zeta\theta} (T-y)^{\nu+\sigma_2+\alpha\theta}. \quad (17)$$

Из (16) и (17) заключаем, что $(R-y)^{-\alpha} u(x, y) \in L(-\infty, R)$ как функция переменной y для любых $x \in (a, b)$ и $R < T$.

Ввиду свойств (4), (5) имеем

$$\frac{\partial G_\eta(x, q, y, t)}{\partial x} = -\mu(x) G_\eta(x, q, y, t) - \lambda(x) G_{\eta-\alpha}(x, q, y, t),$$

$$D_{yt}^\alpha G_\eta(x, q, y, t) = D_{yt}^\alpha G_\eta(x, q, y, t) = G_{\eta-\alpha}(x, q, y, t). \quad (18)$$

Тогда с учётом

$$\lim_{t \rightarrow y} \varphi(t) G_{1-\alpha}(x, q, y, t) = 0, \quad y < T - \varepsilon, \quad x - a \geq \varepsilon > 0,$$

запишем преобразование

$$L(\Phi) = \int_{-\infty}^y \varphi(t) \left(\frac{\partial G_0(x, a, y, t)}{\partial x} + \lambda(x) G_{-\alpha}(x, a, y, t) + \mu(x) G_0(x, a, y, t) \right) dt \equiv 0.$$

Аналогично для функции $F(x, y)$:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = f(x, y) + \int_a^x \int_{-\infty}^y g(q, t) (-\lambda(x) G_{\nu-\alpha}(x, q, y, t) - \mu(x) G_\nu(x, q, y, t)) dt dq,$$

$$\frac{\partial^\alpha F(x, y)}{\partial y^\alpha} = \frac{\partial}{\partial y} \int_a^x \int_{-\infty}^y g(q, t) D_{ty}^{\alpha-1} G_\nu(x, q, y, t) dt dq = \int_a^x \int_{-\infty}^y g(q, t) G_{\nu-\alpha}(x, q, y, t) dt dq.$$

Здесь были использованы равенства, полученные на основании (7), (13) и (15):

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow y-0} \int_a^x g(q, t) G_{\nu+1-\alpha}(x, q, y, t) dq &= 0, \quad x, y \in \Omega^\varepsilon, \\ \lim_{q \rightarrow x-0} \int_{-\infty}^y g(q, t) G_\nu(x, q, y, t) dt &= \int_{-\infty}^y g(x, t) \frac{(y-t)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} dt = f(x, y), \quad x, y \in \Omega^\varepsilon, \\ \lim_{q \rightarrow x-0} G_\nu(x, q, y, t) &= \frac{(y-t)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}, \quad y-t \geq \varepsilon > 0, \quad x < b-\varepsilon. \end{aligned}$$

В результате получаем $L(F) \equiv f(x, y)$, т.е. функция (9) является решением уравнения (1). Проверим выполнение условия (2). Из неравенства (17) следует предельное соотношение

$$\lim_{x \rightarrow a+0} F(x, y) = 0, \quad y < T.$$

Покажем, что

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \Phi(x, y) = \varphi(y). \quad (19)$$

Для доказательства (19) рассмотрим выражение

$$\Phi(x, y) = \left(\int_{-\infty}^{y-\varepsilon} + \int_{y-\varepsilon}^y \right) [\varphi(t) - \varphi(y)] G_0(x, a, y, t) dt + \varphi(y) \int_{-\infty}^y G_0(x, a, y, t) dt = I_1 + I_2 + \varphi(y) I_3.$$

Из оценок (6) и (15) вытекает, что $\lim_{x \rightarrow a} I_1 = 0$. Для интеграла I_2 получим $|I_2| \leq C \sup_{t \in (y-\varepsilon, y)} |\varphi(t) - \varphi(y)|$, откуда из произвольности выбора ε и из непрерывности $\varphi(t)$ следует, что $\lim_{x \rightarrow a} I_2 = 0$. Для интеграла I_3 с помощью (18) вычислим

$$\lim_{x \rightarrow a+0} I_3 = \lim_{x \rightarrow a+0} \int_{-\infty}^y G_0(x, a, y, t) dt = \lim_{x \rightarrow a+0} \lim_{z \rightarrow \infty} G_1(x, a, z, 0) = \lim_{x \rightarrow a+0} e^{-\int_a^x \mu(\gamma) d\gamma} = 1.$$

Это подтверждает справедливость (19) и завершает доказательство теоремы.

Замечание. В условии (13), в отличие от аналогичного условия из работы [11] (см. условие (21)), требуется представимость правой части $f(x, y)$ в виде дробного интеграла лишь по одной переменной y . В этом смысле данное условие оказывается слабее условия (21) из [11]. При этом меняются (немного усиливаются) требования к поведению функции $g(x, y)$ на границе области.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 687 с.
2. Псху, А.В. Решение краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка / А.В. Псху // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. академии наук. — 2000. — Т. 5, № 1. — С. 45–53.
3. Clément, Ph. Schauder estimates for equations with fractional derivatives / Ph. Clément, G. Gripenberg, S-O Londen // Trans. Amer. Math. Soc. — 2000. — V. 352, № 5. — P. 2239–2260.

4. Мамчуев, М.О. Краевая задача для уравнения первого порядка с частной производной дробного порядка с переменными коэффициентами / М.О. Мамчуев // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. академии наук. — 2009. — Т. 11, № 1. — С. 32–35.
5. Псху, А.В. Краевая задача для многомерного дифференциального уравнения дробного порядка / А.В. Псху // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 3. — С. 385–395.
6. Псху, А.В. О краевой задаче для уравнения в частных производных дробного порядка в области с криволинейной границей / А.В. Псху // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 8. — С. 1076–1082.
7. Богатырева, Ф.Т. Краевая задача для уравнения в частных производных первого порядка с оператором Джрбашьяна–Нерсесяна / Ф.Т. Богатырева // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. академии наук. — 2015. — Т. 15, № 1. — С. 9–16.
8. Богатырева, Ф.Т. Краевая задача для уравнения в частных производных с оператором дробного дифференцирования Джрбашьяна–Нерсесяна / Ф.Т. Богатырева // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. академии наук. — 2015. — Т. 17, № 2. — С. 17–24.
9. Псху, А.В. Краевая задача для уравнения в частных производных первого порядка с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования / А.В. Псху // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 12. — С. 1682–1694.
10. Мамчуев, М.О. Краевая задача для линейной системы уравнений с частными производными дробного порядка / М.О. Мамчуев // Челяб. физ.-мат. журн. — 2017. — Т. 2, № 3. — С. 295–311.
11. Псху, А.В. Краевая задача для уравнения в частных производных первого порядка с дробной производной Лиувилля / А.В. Псху // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 8. — С. 1043–1051.
12. Wright, E.M. On the coefficients of power series having exponential singularities / E.M. Wright // J. London Math. Soc. — 1933. — V. s1-8, № 1. — P. 71–79.
13. Wright, E.M. The generalized Bessel function of order greater than one / E.M. Wright // Quart. J. Math. — 1940. — V. 11, № 1. — P. 36–48.

**BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE DIFFERENTIAL EQUATION
WITH VARIABLE COEFFICIENTS
AND A FRACTIONAL LIOUVILLE DERIVATIVE**

A. D. Akhmetshin

*Karaganda Buketov University, Kazakhstan
e-mail: aleksandr_050401@mail.ru*

A boundary value problem for an equation with variable coefficients containing a fractional Liouville derivative for one of the variables with a beginning at minus infinity is considered. A representation of the solution of the problem and sufficient conditions for its existence and uniqueness have been obtained.

Keywords: partial fractional order differential equation, boundary value problem, fractional order derivative, Liouville derivative, Wright function.

REFERENCES

1. Samko, S.G., Kilbas, A.A., and Marichev, O.I., *Integraly i proizvodnye drobnogo poriyadka i nekotorye ikh prilozheniya* (Fractional Integrals and Derivatives and Some Applications), Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987.
2. Pskhu, A.V., Solution of a boundary value problem for a fractional partial differential equation, *Dokl. Adygsk. (Cherkessk.) Mezhdunar. Akad. Nauk*, 2000, vol. 5, no. 1, pp. 45–53.
3. Clément, Ph., Gripenberg, G., and Londen, S.-O., Schauder estimates for equations with fractional derivatives, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2000, vol. 352, no. 5, pp. 2239–2260.

4. Mamchuev, M.O., Boundary value problem for a first-order equation with a fractional partial derivative with variable coefficients, *Dokl. Adygsk. (Cherkessk.) Mezhdunar. Akad. Nauk*, 2009, vol. 11, no. 1, pp. 32–35.
5. Pskhu, A.V., Boundary value problem for a multidimensional fractional partial differential equation, *Differ. Equat.*, 2011, vol. 47, no. 3, pp. 382–392.
6. Pskhu, A.V., On a boundary value problem for a fractional partial differential equation in a domain with curvilinear boundary, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 8, pp. 1072–1078.
7. Bogatyreva, F.T., Boundary value problem for a first-order partial differential equation with the Dzhrbashyan–Nersesyan operator, *Dokl. Adygsk. (Cherkessk.) Mezhdunar. Akad. Nauk*, 2015, vol. 15, no. 1, pp. 9–16.
8. Bogatyreva, F.T., Boundary value problem for a partial differential equation with the Dzhrbashyan–Nersesyan operator, *Dokl. Adygsk. (Cherkessk.) Mezhdunar. Akad. Nauk*, 2015, vol. 17, no. 2, pp. 17–24.
9. Pskhu, A.V., Boundary value problem for a first-order partial differential equation with a fractional discretely distributed differentiation operator, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 12, pp. 1610–1623.
10. Mamchuev, M.O., Boundary value problem for a linear system of equations with the partial derivatives of fractional order, *Chelyab. Fiz.-Mat. Zh.*, 2017, vol. 2, no. 3, pp. 295–311.
11. Pskhu, A.V., Boundary value problem for a first-order partial differential equation with Liouville fractional derivative, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 8, pp. 1043–1051.
12. Wright, E.M., On the coefficients of power series having exponential singularities, *J. London Math. Soc.*, 1933, vol. s1-8, no. 1, pp. 71–79.
13. Wright, E.M., The generalized Bessel function of order greater than one, *Quart. J. Math.*, 1940, vol. 11, no. 1, pp. 36–48.