

УДК 517.925

# ЦЕЛЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОБОБЩАЮЩИХ УРАВНЕНИЯ ТИПА БРИО–БУКЕ

© А. Я. Янченко

*Национальный исследовательский университет “Московский энергетический институт”**e-mail: yanchenkoay@mpei.ru**Поступила в редакцию 26.02.2024 г., после доработки 07.05.2024 г.; принята к публикации 04.06.2024 г.*

Исследованы целые решения дифференциальных обобщённых уравнений типа Брио–Буке. Показано, что при некоторых условиях, которым удовлетворяют многочлены  $P$  и  $Q$ , все целые трансцендентные решения таких уравнений являются квазимногочленами.

*Ключевые слова:* целая функция, уравнение типа Брио–Буке.

DOI: 10.31857/S0374064124080111, EDN: KCCNTN

## 1. ВВЕДЕНИЕ. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Исследование целых (или мероморфных) решений для тех или иных классов уравнений является традиционной задачей теории алгебраических дифференциальных уравнений. При этом результатов (в отличие от линейных уравнений), описывающих (в том или ином смысле) целые (мероморфные) решения каких-либо достаточно общих классов нелинейных алгебраических дифференциальных уравнений, немного. К хорошо исследованным относятся так называемые уравнения типа Брио–Буке, имеющие вид  $P(y, y^{(n)}) = 0$  при некотором натуральном  $n$  и многочлене  $P$  с комплексными коэффициентами.

Существует гипотеза [1], что все мероморфные решения таких уравнений (при некоторых условиях на  $P$ ) лежат в классе  $W$ , состоящем из рациональных функций, рациональных функций от какой-либо экспоненты и эллиптических функций. Над доказательством этой гипотезы работали многие математики (Ш. Эрмит, Э. Пикар, Ш. Брио и Ж.-К. Буке, Э. Холле, Р. Кауфман, С. Бэнкс, А.Э. Ерёмченко и другие). В 2009 г. гипотеза была доказана А.Э. Ерёмченко с соавторами [2] при произвольных  $n$  для любых мероморфных функций, имеющих хотя бы один полюс. Далее в статье [3] было показано, что при произвольном  $n$  (при наличии некоторых ограничений на многочлен  $P$ ) любое целое трансцендентное решение уравнения  $P(y, y^{(n)}) = 0$  является лорановским многочленом от некоторой экспоненты  $e^{\alpha z}$ .

Разработанная в [4] техника позволила описать целые решения и для обобщённых уравнений типа Брио–Буке — уравнений вида  $P(y, y^{(n)}) + Q(z, y, \dots, y^{(n)}) = 0$ . Было показано, что при некоторых условиях на многочлены  $P$ ,  $Q$  все целые решения здесь также являются квазимногочленами. В доказательстве этого утверждения существенно использовалось то, что  $n$  одно и то же в  $P(y, y^{(n)})$  и в  $Q(z, y, \dots, y^{(n)})$ . Однако оказалось, что это условие “одинаковости  $n$ ” не является существенным, а именно, для класса уравнений вида  $P(y, y^{(l)}) + Q(z, t, \dots, y^{(n)}) = 0$  при произвольных  $l, n \in \mathbb{N}$  (и аналогичных ограничениях на многочлены  $P$ ,  $Q$ ) все целые решения также являются квазимногочленами. Доказательству этого факты посвящена данная статья.

Отметим, что для более общих уравнений вида  $P(y^{(k)}, y^{(l)}) + Q(z, t, \dots, y^{(n)}) = 0$  при произвольных натуральных  $k, l, n$  (с аналогичными ограничениями на  $P, Q$ ) вопрос описания целых решений пока остаётся открытым (возможно, что здесь целые решения квазимногочленами уже не исчерпываются).

В дальнейшем, как обычно, через  $\mathbb{N}$  и  $\mathbb{C}$  обозначаются множества натуральных и комплексных чисел; через  $\mathbb{C}[t_0, \dots, t_m]$  — кольцо многочленов над множеством  $\mathbb{C}$  от переменных  $t_0, \dots, t_m$ .

Пусть  $f(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  — целая функция. Тогда её порядок  $\rho$  определяется формулой

$$\rho = \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln M_f(R))}{\ln R},$$

где  $M_f(R) = \max_{|z|=R} |f(z)|$ . Если  $\rho < +\infty$ , то  $f(z)$  называется *функцией конечного порядка* [5, гл. 1].

Основным результатом данной статьи является доказательство следующей теоремы.

**Теорема.** Пусть  $l, n, d$  — натуральные числа;  $P \in \mathbb{C}[\omega_0, \omega_l]$ ;  $Q \in \mathbb{C}[z, \omega_0, \dots, \omega_n]$ , причём:

1)  $P = \prod_{j=1}^d (\omega_l - \alpha_j \omega_0)$ , где все  $\alpha_j \in \mathbb{C}$  и  $\alpha_i \neq \alpha_j$  при  $i \neq j$ ;

2) степень многочлена  $Q$  по совокупности переменных  $\{\omega_0, \dots, \omega_n\}$  не превосходит  $d-1$ .

Пусть  $y = f(z)$  — целая функция, являющаяся решением дифференциального уравнения

$$P(y, y^{(l)}) + Q(z, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

Тогда либо  $f(z)$  — многочлен из  $\mathbb{C}[z]$ , либо  $f(z)$  — квазимногочлен, т.е.

$$f(z) = \sum_{j=1}^M T_j(z) e^{\beta_j z},$$

где  $M \in \mathbb{N}$ ,  $T_j(z) \in \mathbb{C}[z]$ ,  $\beta_j \in \mathbb{C}$ ,  $j = \overline{1, M}$ .

## 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

**Лемма 1.** Если целая функция  $y = f(z)$  удовлетворяет уравнению (1), то  $f(z)$  — целая функция конечного порядка.

**Доказательство.** Для любого монома вида  $I \equiv a(z) \omega_0^{j_0} \dots \omega_t^{j_t}$  (где  $a(z) \in \mathbb{C}[z]$ ) определим его степень  $\deg I = j_0 + \dots + j_t$  и норму  $\|I\| = j_0 + 2j_1 + \dots + (t+1)j_t$ . Для любого многочлена  $H = \sum_l I_l$ , где  $I_l$  — мономы, определим его главную часть как совокупность мономов из  $\{I_l\}$ , у которых степень  $\deg I$  максимальна. Далее, из главной части отберём те мономы  $I$ , у которых норма  $\|I\|$  максимальна. Обозначим получившееся множество мономов через  $B(H)$ . Пусть

$$B(H) = \{I_q = a_q(z) \omega_0^{j_{0,q}} \dots \omega_t^{j_{t,q}}, a_q(z) \in \mathbb{C}[z]\}.$$

Будем называть многочлен *правильным*, если  $\sum_{I_q \in B(H)} a_q(z) \neq 0$ .

Доказано [6, теорема С], что если целая функция  $y = f(z)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению вида  $H(z, y, y', \dots, y^{(t)}) = 0$ , где  $H$  — правильный многочлен, то  $f(z)$  — целая функция конечного порядка. Рассмотрим многочлен  $H = P(\omega_0, \omega_l) + Q(z, \omega_0, \dots, \omega_n)$  из условия теоремы, который является правильным.

Действительно, в силу условий теоремы множество  $B(H)$  в данном случае состоит только из одного монома  $I = \omega_l^d$ . Таким образом, утверждение леммы верно.

**Лемма 2.** Пусть  $\varphi(z)$  — целая функция порядка  $\rho < +\infty$  и  $M \in \mathbb{N}$ . Тогда найдутся числа  $R_0$  и  $\delta$ , зависящие от  $M$  и  $\varphi(z)$ , такие, что при любых  $R > R_0$  в кольце  $C_R =$

$= \{2R \leq |z| \leq 3R\}$  можно выбрать конечное множество  $B_R$  кругов с общей суммой радиусов не более  $2M^2R^{1/2}$  так, что при всяком  $z \in C_R \setminus B_R$  и любом  $j \in \{0, 1, \dots, M\}$  справедливо неравенство

$$\left| \frac{\varphi^{(j)}(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \delta R^{\rho M}.$$

**Замечание 1.** Утверждение леммы 2 вытекает из следствия 1 к лемме 4 [3, с. 203] при  $\varepsilon = 1/2$ ,  $H = R^{1/2}$ .

**Лемма 3.** Пусть  $R > 0$ ;  $L \in \mathbb{N}$ ;  $C_R = \{2R \leq |z| \leq 3R\}$ ;  $B_R$  — конечное множество замкнутых кругов с общей суммой радиусов не более  $2L^2R^{1/2}$ , причём  $B_R \subset C_R$ . Тогда найдётся постоянная  $R_0 > 0$  (зависящая от  $L$ ) такая, что при всяком  $R > R_0$  найдётся  $R_1 \in [2R, 3R]$  такое, что окружность  $\gamma_{R_1} = \{z: |z| = R_1\}$  не пересекается с множеством  $B_R$ .

**Замечание 2.** Утверждение леммы 3 следует из леммы 5 [3, с. 204] при  $H = R^{1/2}$ .

**Лемма 4.** Пусть  $\varphi(z)$  — функция конечного порядка  $\rho$ ;  $L \in \mathbb{N}$ . Тогда найдутся числа  $R_0, \delta > 0$  (зависящие только от  $\varphi(z)$  и  $L$ ) такие, что при каждом  $R > R_0$  существует число  $R_1 \in [2R, 3R]$  с условием: при любых  $j = \overline{0, L}$  и  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| = R_1$ , справедлива оценка

$$\left| \frac{\varphi^{(j)}(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \delta R^{\rho L}.$$

**Замечание 3.** Утверждение леммы 4 вытекает из лемм 2 и 3.

**Лемма 5.** Пусть целая функция  $y = f(z)$  является решением уравнения (1). Тогда найдутся постоянные  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$  (не зависящие от  $R$ ) такие, что при любом  $R > \gamma_1$  найдётся число  $R_1 \in [2R, 3R]$  такое, что при всяком  $z$  с условием  $|z| = R_1$  справедлива оценка

$$\prod_{j=1}^d \left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} - \alpha_j \right| \leq \frac{R^{\gamma_2}}{|f(z)|}.$$

**Доказательство.** Применим лемму 4 с  $L = \max\{l, n\}$ . Тогда при всех достаточно больших  $R$  найдётся  $R_1 \in [2R, 3R]$  такое, что при всех натуральных  $j \leq L$  выполняется неравенство

$$\max_{|z|=R_1} \left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq \delta R^{\rho L}, \quad (2)$$

где  $\delta$  не зависит от  $R$ . Пусть (см. уравнение (1))

$$Q(z, \omega_0, \dots, \omega_n) = \sum_{j_0 + \dots + j_n \leq d-1} a_{\bar{j}}(z) \omega_0^{j_0} \dots \omega_n^{j_n},$$

где  $a_{\bar{j}}(z)$  — многочлены степени не выше  $h$ , причём максимум модулей коэффициентов у них не превосходит  $B$ .

Пусть  $z \in \mathbb{C}$  и  $|z| = R_1$ . Разделим обе части уравнения (1) на  $(f(z))^d$ . Тогда с учётом (2) получим

$$\prod_{j=1}^d \left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} - \alpha_j \right| \leq d^{d+1} B (3R)^h \delta R^{\rho L(d-1)} \frac{1}{|f(z)|}$$

или

$$\prod_{j=1}^d \left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} - \alpha_j \right| \leq \frac{R^{\gamma_2}}{|f(z)|},$$

где  $\gamma_2$  не зависит от  $R$ . Таким образом, лемма доказана.

**Лемма 6.** Пусть  $f(z)$  — целая функция, удовлетворяющая уравнению (1). Тогда найдутся числа  $R_0$  и  $m$  (зависящие только от  $f(z)$  и многочленов  $P, Q$  из уравнения (1)) такие, что при всяком  $R > R_0$  найдётся число  $R_1 \in [2R, 3R]$  такое, что при любом  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| = R_1$ , имеется число  $\alpha(z) \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ , удовлетворяющее условию

$$|f^{(l)}(z) - \alpha(z)f(z)| < R^m. \quad (3)$$

**Доказательство.** По лемме 5 при достаточно большом  $R > R_0$  найдётся  $R_1 \in [2R, 3R]$  такое, что при любом  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| = R_1$ , имеет место оценка

$$\prod_{j=1}^d \left| \frac{f^{(l)}(z)}{f(z)} - \alpha_j \right| \leq \frac{R_2^\gamma}{|f(z)|}, \quad (4)$$

где  $\gamma_2$  зависит только от  $f(z)$ , уравнения (1) и не зависит от  $R$ .

Считаем также, что  $R_0$  столь велико, что

$$\min_{i,j} |\alpha_i - \alpha_j| \geq 10R_0^{-\gamma_2/d}. \quad (5)$$

Зафиксируем произвольное  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| = R_1$ . Возможны два случая.

1.  $|f(z)| \leq R^{2\gamma_2}$ . Тогда по лемме 4 найдём, что  $|f^{(l)}(z)| \leq \delta R^{\rho L} R^{2\gamma_2}$ , откуда при любом  $j = \overline{1, d}$  следует оценка

$$|f^{(l)}(z) - \alpha_j f(z)| \leq (1 + \max_j |\alpha_j|)(1 + \delta) R^{\rho L + 2\gamma_2}.$$

Тогда, выбрав  $m$  так, чтобы  $(1 + \max_j |\alpha_j|)(1 + \delta) R^{\rho L + 2\gamma_2} < R^m$ , утверждение леммы будет выполняться.

2.  $|f(z)| > R^{2\gamma_2}$ . Пусть  $j_0$  таково, что

$$\min_j \left| \frac{f^{(l)}(z)}{f(z)} - \alpha_j \right| = \left| \frac{f^{(l)}(z)}{f(z)} - \alpha_{j_0} \right|.$$

Тогда из (4) найдём

$$\left| \frac{f^{(l)}(z)}{f(z)} - \alpha_{j_0} \right| \leq \left( \frac{R^{\gamma_2}}{|f(z)|} \right)^{1/d} \leq R^{-\gamma_2/d}.$$

Далее с учётом оценки (5) получим соотношения

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^d \left| \frac{f^{(l)}(z)}{f(z)} - \alpha_j \right| &\geq \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^d \left( |\alpha_j - \alpha_{j_0}| - \left| \frac{f^{(l)}(z)}{f(z)} - \alpha_{j_0} \right| \right) \geq \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^d (|\alpha_j - \alpha_{j_0}| - R^{-\gamma_2/d}) \geq \\ &\geq \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^d (|\alpha_j - \alpha_{j_0}| - R_0^{-\gamma_2/d}) \geq \left( \frac{9}{10} \right)^d \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^d |\alpha_j - \alpha_{j_0}|. \end{aligned}$$

Поэтому из (4) имеем

$$\left| \frac{f^{(l)}(z)}{f(z)} - \alpha_j \right| \leq \frac{R_2^\gamma}{|f(z)|} \gamma_3,$$

где

$$\gamma_3 = \left( \frac{9}{10} \right)^d \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^d |\alpha_j - \alpha_{j_0}|.$$

Но тогда  $|f^{(l)}(z) - \alpha_{j_0} f(z)| \leq R^m$  (здесь  $m \in \mathbb{N}$  такое, что  $\gamma_3 R^{\gamma_2} < R^m$ ). Таким образом, утверждение леммы и в этом случае верно.

### 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

По лемме 6 существует число  $M \in \mathbb{N}$  такое, что при всех достаточно больших  $R > R_0$  найдётся  $R_1 \in [2R, 3R]$  такое, что при всяком  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| = R_1$ , и при некотором  $\alpha \equiv \alpha(z) \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$  справедливо неравенство

$$|f^{(l)}(z) - \alpha f(z)| < R^M. \quad (6)$$

Далее будем обозначать через  $\gamma_i$  постоянные, не зависящие от  $R$ . Зафиксируем произвольное  $z$  такое, что  $|z| = R_1$ . Применив лемму 4 к  $\varphi(z) = f^{(l)}(z) + \alpha f(z)$ , найдём, что

$$|f^{(2l)}(z) - \alpha f^{(l)}(z)| < \gamma_1 R^{lM},$$

откуда

$$\begin{aligned} |f^{(2l)}(z) - \alpha f^{(l)}(z)| &= |f^{(2l)}(z) - \alpha f^{(l)}(z) + \alpha f^{(l)}(z) - \alpha^2 f(z)| \leq \\ &\leq |f^{(2l)}(z) - f^{(l)}(z)| + |\alpha| |f^{(l)}(z) - \alpha f(z)| \leq \gamma_2 R^{lM}. \end{aligned}$$

Рассуждая далее аналогично, получаем, что при всех  $k = \overline{1, d}$  справедливы оценки

$$|f^{(kl)}(z) - \alpha^k f(z)| < R^{\gamma_2}$$

с некоторой постоянной  $\gamma_2 > 0$ .

Пусть  $P(t) = (t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_n) = t^d + \beta_{d-1}t^{d-1} + \dots + \beta_0$ . Положим

$$L(f) = f^{(dl)} + \beta_{d-1}f^{((d-1)l)} + \dots + \beta_1 f^{(l)} + \beta_0 f.$$

Тогда с учётом (6) имеет место оценка

$$\begin{aligned} |(f^{(dl)} - \alpha^d f) + \beta_{d-1}(f^{((d-1)l)} - \alpha^{d-1} f) + \dots + \beta_1(f^{(l)} - \alpha f) + \beta_0(f - f)| &= |L(f) - P(\alpha)f| = \\ &= |L(f)| \leq R^{\gamma_2}(1 + |\beta_{d-1}| + \dots + |\beta_0|) \leq R_1^{\gamma_3} \end{aligned}$$

с некоторой постоянной  $\gamma_3 > 0$ .

Итак, получили, что при любом  $R > R_0$  найдётся  $R_1 \in [2R, 3R]$  такое, что для всякого  $z \in \mathbb{C}$  с условием  $|z| = R_1$  выполняется неравенство  $|L(f(z))| \leq R_1^{\gamma_3}$ , где постоянная  $\gamma_3$  не зависит от  $R$ . Но  $L(f(z))$  — целая функция, поэтому (см., например, [5, гл. 1])  $L(f(z)) = q(z)$ , где  $q(z)$  — некоторый многочлен. Но тогда  $f(z)$  является квазимногочленом, т.е.  $f(z) = \sum_i h_i(z)e^{\delta_i z}$  при некоторых  $\{h_i(z)\} \in \mathbb{C}[z]$  и  $\{\delta_i\} \in \mathbb{C}$ . Теорема доказана.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24-21-00196).

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Еременко, А.Э. Мероморфные решения алгебраических дифференциальных уравнений / А.Э. Еременко // Успехи мат. наук. — 1982. — Т. 37, № 4 (226). — С. 53–82.
2. Eremenko, A.E. Meromorphic solutions of higher order Briot–Bouquet differential equations / A.E. Eremenko, L. Liao, N.W. Ng // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 2009. — V. 146, № 1. — P. 197–206.
3. Янченко, А.Я. Об одном продвижении в доказательстве гипотезы о мероморфных решениях уравнений типа Брио–Буке / А.Я. Янченко // Изв. РАН. Сер. матем. — 2022. — Т. 86, № 5. — С. 197–208.
4. Янченко, А.Я. О целых решениях одного класса нелинейных алгебраических дифференциальных уравнений / А.Я. Янченко // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 9. — С. 1186–1192.
5. Левин, Б.Я. Распределение корней целых функций / Б.Я. Левин. — М. : Гостехиздат, 1956. — 632 с.
6. Hayman, W.K. The growth of solutions of algebraic differential equations / W.K. Hayman // Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9. — 1996. — V. 7, № 2. — P. 67–73.

# WHOLE SOLUTIONS OF ONE CLASS OF ALGEBRAIC DIFFERENTIAL EQUATIONS GENERALIZING BRIOT–BOUQUET TYPE EQUATIONS

A. Ya. Yanchenko

National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, Russia  
e-mail: yanchenkoay@mpei.ru

The paper examines entire solutions of differential equations of Briot–Bouquet type. It is shown that (under some conditions that the polynomials  $P$ ,  $Q$  satisfy) all integer transcendental solutions of such equations are quasi-polynomials.

*Keywords:* integer function, equation of Briot–Bouquet type.

## FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00196).

## REFERENCES

1. Eremenko, A.E., Meromorphic solutions of algebraic differential equations, *Russ. Math. Surv.*, 1982, vol. 37, no. 4, pp. 61–95.
2. Eremenko, A.E., Liao, L., and Ng, N.W., Meromorphic solutions of higher order Briot–Bouquet differential equations, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 2009, vol. 146, no. 1, pp. 197–206.
3. Yanchenko, A.Ya., One advance in the proof of the conjecture on meromorphic solutions of Briot–Bouquet type equations, *Izvestiya: Math.*, 2022, vol. 86, no. 5, pp. 1020–1030.
4. Yanchenko, A.Ya., On integer solutions of one class of nonlinear algebraic differential equations, *Differ. Uravn.*, 2022, vol. 58, no. 9, pp. 1186–1192.
5. Levin, B.Y., *Raspredeleniye korney tselykh funktsiy* (Distribution of Roots of Integer Functions), Moscow: Gostekhizdat, 1956.
6. Hayman, W.K., The growth of solutions of algebraic differential equations, *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9*, 1996, vol. 7, no. 2, pp. 67–73.