

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ,  
ОПИСЫВАЕМОЙ УРАВНЕНИЯМИ МАКСВЕЛЛА  
С МЕЗОСКОПИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ© Ю. А. Еремин<sup>1</sup>, В. В. Лопушенко<sup>2</sup>*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова**e-mail: <sup>1</sup>eremin@cs.msu.ru, <sup>2</sup>lopushnk@cs.msu.ru**Поступила в редакцию 29.02.2024 г., после доработки 03.05.2024 г.; принята к публикации 04.06.2024 г.*

Разработан, обоснован и реализован численный метод решения граничной задачи дифракции для системы уравнений Максвелла с мезоскопическими граничными условиями, в основе которого лежит метод дискретных источников. Проведён численный анализ влияния поверхностных квантовых эффектов на оптические характеристики плазмонных наночастиц. Установлено, что поверхностные эффекты оказывают значимое влияние на характеристики полей, при этом результаты для них существенно отличаются от полученных для случая объёмных эффектов.

*Ключевые слова:* метод дискретных источников, мезоскопическое граничное условие, плазмонный резонанс.

DOI: 10.31857/S0374064124080083, EDN: KCOIAJ

## ВВЕДЕНИЕ

Наноплазмонные структуры находят широкое применение в различных практических приложениях, например, в медицине, биологии, солнечной энергетике, при разработке плазмонного нанолазера и др. В их основе лежит явление плазмонного резонанса (ПР), который заключается в возрастании амплитуды поля вблизи структуры на несколько порядков при определённой частоте внешнего возбуждения. Кроме того, плазмонные поля обладают уникальным свойством, существенно отличающим их от фотонных: они концентрируются вблизи структуры на расстояниях, намного превышающих рэлеевский предел. Именно эти особенности в основном используются на практике.

Современные технологии позволяют синтезировать структуры заданных формы и состава с размерами металлических элементов менее 10 нм [1]. В этом случае в металле начинают проявляться квантовые эффекты, такие как пространственная нелокальность, выброс электронов за поверхность металла, затухание Ландау и туннельный эффект [2]. Классическая теория Максвелла не позволяет строго описывать оптические свойства подобных структур. Учёт подобных квантовых эффектов необходим для правильного понимания принципов функционирования современных наноплазмонных устройств.

С целью описания объёмного эффекта пространственной нелокальности были разработаны гидродинамическая теория Друде и её обобщение — теория обобщённого нелокального оптического отклика (GNOR) [3]. Она объясняет возникающие новые оптические эффекты, которые могут существенно искажать картину, предсказанную классической теорией Максвелла, например, такие как снижение амплитуды ПР и его сдвиг в область коротких длин волн. Вместе с тем теория GNOR не допускает возможности выхода электронов за

пределы металла. Это обстоятельство в значительной степени стимулировало поиск новой теории, описывающей квантовые эффекты, оставаясь в рамках классической теории Максвелла. Она появилась в последние годы и получила название *мезоскопической теории* (МТ) [4, 5]. МТ ориентирована на анализ поверхностных квантовых эффектов, для чего используются функции поверхностного отклика — параметры Фейбельмана, и позволяет описать такие квантовые эффекты как выброс электронов за пределы металла и затухание Ландау. Считается, что МТ является неким синтезом между чисто квантовым и классическим описаниями происходящих явлений в наноплазмонике.

Нами разработан и реализован подход, позволяющий проводить анализ влияния поверхностных квантовых эффектов на оптические характеристики рассеяния. В основу численного метода положен метод дискретных источников (МДИ) [6, 7].

## 1. ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ

Рассмотрим математическую постановку граничной задачи дифракции поля электромагнитной плоской волны  $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$  на однородной осесимметричной плазмонной наночастице. Пусть частица занимает область  $D_i$  с гладкой замкнутой поверхностью  $\partial D_i \in C^{(2,\alpha)}$ , а неограниченную внешнюю область обозначим  $D_e$ . Будем предполагать, что все среды внутри и вне этой поверхности являются немагнитными, а зависимость от времени выбрана в виде  $\exp\{j\omega t\}$ . В этом случае математическая постановка задачи дифракции для полного поля  $\{\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i\}$  внутри  $D_i$  и рассеянного поля  $\{\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e\}$  во внешней области  $D_e$  может быть записана как [7]

$$\nabla \times \mathbf{H}_{i,e} = -jk\varepsilon_{i,e}\mathbf{E}_{i,e}, \quad \nabla \times \mathbf{E}_{i,e} = -jk\mathbf{H}_{i,e} \quad \text{в } D_{e,i}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_i \times (\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_e(P) - \mathbf{E}_0(P)) &= -d_\perp \mathbf{n}_i \times \nabla \{\mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_e(P) - \mathbf{E}_0(P))\}, \quad P \in \partial D_i, \\ \mathbf{n}_i \times (\mathbf{H}_i(P) - \mathbf{H}_e(P) - \mathbf{H}_0(P)) &= -j\omega d_\parallel \{\mathbf{n}_i \times [\mathbf{D}_i(P) - \mathbf{D}_e(P) - \mathbf{D}_0(P)]\} \times \mathbf{n}_i, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \sqrt{\varepsilon_e} \mathbf{E}_e \times \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{H}_e \right) = 0, \quad r = |\mathbf{M}|. \quad (3)$$

Здесь  $\varepsilon_{i,e}$  — диэлектрические проницаемости сред в областях  $D_{i,e}$ , при этом  $\text{Im } \varepsilon_e = 0$ ,  $\text{Im } \varepsilon_i \leq 0$ ,  $k = \omega/c$ ,  $d_\perp$ ,  $d_\parallel$  — параметры Фейбельмана,  $\mathbf{n}_i$  — единичная нормаль к поверхности  $\partial D_i$ ,  $\mathbf{D}_{i,e,0}$  — векторы электрического смещения. Параметры  $d_\perp$ ,  $d_\parallel$  представляют собой комплексные функции, зависящие от длины падающей волны; для плоского интерфейса  $y = \text{const}$  они определяются как

$$d_\perp(\omega) = \frac{\int \rho(x, \omega) x dx}{\int \rho(x, \omega) dx}, \quad d_\parallel(\omega) = \frac{\int \partial_x J_y(x, \omega) x dx}{\int \partial_x J_y(x, \omega) dx},$$

где  $\rho(x, \omega)$  — плотность индуцированных поверхностных зарядов,  $J_y(x, \omega)$  — плотность поверхностных токов. Отметим, что для случая границы раздела сред металл–диэлектрик параметр Фейбельмана  $d_\parallel = 0$  [2]. Будем полагать, что граничная задача (1)–(3) имеет единственное классическое решение. Для случая сферы это установлено в работе [8].

## 2. МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Метод дискретных источников является численно-аналитическим методом, в рамках которого приближённое решение строится на основе полей дискретных источников, удовлетворяющих в аналитическом виде системе Максвелла (1) и условиям излучения (3) [6]. Соответствующие амплитуды дискретных источников (ДИ) определяются из мезоскопических граничных условий (2). Следует подчеркнуть, что МДИ весьма удобен для решения задачи рассеяния с мезоскопическими граничными условиями, так как поля вблизи поверх-

ности частицы представляют собой аналитические функции и, следовательно, допускают вычисление производных любого типа и порядка на её поверхности.

Прежде чем переходить к построению приближённого решения граничной задачи (1)–(3), остановимся на некоторых фундаментальных результатах МДИ.

**Теорема 1.** Пусть задан рассеиватель  $D$  с гладкой замкнутой поверхностью  $S \in C^{(2,\alpha)}$ , внутри  $D$  выбраны начало координат и множество точек  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ , расположенных на отрезке оси  $Oz$ , при этом данное множество имеет хотя бы одну точку сгущения  $z_0$  (внутри  $D$ ). Тогда системы “электрических”  $\nabla \times \nabla \times \{Y_{mn}(M)\mathbf{e}_\zeta\}$  и “магнитных”  $\nabla \times \{Y_{mn}(M)\mathbf{e}_\zeta\}$  векторных мультиполей полны и замкнуты в пространстве  $L_2^T(S)$ .

Здесь  $Y_{mn}(M) = h_m^{(2)}(k_e R_{Mz_n}) P_m^m(\cos \theta_{z_n}) \exp\{jm\varphi\}$  — мультиполи низшего порядка, рас-  
пределённые по отрезку оси;  $\mathbf{e}_\zeta$  — орты декартова базиса,  $\zeta = x, y, z$ ;  $L_2^T(S) = L_2(S) \times L_2(S)$  — пространство функций, определённых в касательной плоскости.

**Доказательство** см. в работе [9, с. 948].

**Следствие.** Линейная комбинация полей электрических и магнитных мультиполей полна и замкнута в пространстве  $L_2^T(S)$  на поверхности  $S$ .

**Доказательство** этого утверждения очевидно: достаточно выписать уравнения замкнутости [10].

При рассмотрении осесимметричных структур в вычислительной схеме МДИ источники как для внешнего  $\{\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e\}$ , так и для внутреннего  $\{\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i\}$  полей располагаются на оси симметрии, а приближённое решение  $\{\mathbf{E}_e^N, \mathbf{H}_e^N\}$  представляет собой конечную сумму ряда Фурье по азимутальной переменной  $\varphi$  [11]. С помощью разложения поля плоской волны  $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$  в ряд Фурье по  $\varphi$  процедура удовлетворения граничным условиям (2) на поверхности  $\partial D_i$  сводится к последовательным сшиваниям гармоник Фурье-полей на образующей поверхности вращения [6].

Будем рассматривать возбуждение осесимметричного рассеивателя  $D_i$  с гладкой поверхностью  $\partial D_i$  линейно-поляризованной плоской волной, распространяющейся под углом  $\pi - \theta_0$  к оси  $Oz$ . Как известно, поле плоской волны можно построить на основе двух базовых поляризаций  $P$  и  $S$ :

$$\mathbf{E}_0^P = (\mathbf{E}_x \cos \theta_0 + \mathbf{E}_z \sin \theta_0) \chi(x, z), \quad \mathbf{H}_0^P = -\sqrt{\varepsilon_e} \mathbf{E}_y \chi(x, z), \quad (4)$$

$$\mathbf{E}_0^S = \mathbf{E}_y \chi(x, z), \quad \mathbf{H}_0^S = \sqrt{\varepsilon_e} (\mathbf{E}_x \cos \theta_0 + \mathbf{E}_z \sin \theta_0) \chi(x, z), \quad (5)$$

где  $\chi(x, z) = \exp\{-jk_e(x \sin \theta_0 - z \cos \theta_0)\}$ ,  $k_e = k\sqrt{\varepsilon_e}$ ,  $(\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z)$  — декартов базис.

Очевидно, что эти поля ортогональны на поверхности вращения  $\partial D_i$ . В этом легко убедиться, используя разложение плоской волны в ряд Фурье вида

$$\exp\{-jk_e x \sin \theta_0\} = \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) (-j)^m J_m(k_e \rho \sin \theta_0) \cos(m\varphi). \quad (6)$$

Поскольку поверхность  $\partial D_i$  обладает осевой симметрией, то при распределении мультиполей на оси симметрии  $Oz$  их линейная комбинация будет представлять конечную сумму ряда Фурье по переменной  $\varphi$ .

Введём в рассмотрение векторные потенциалы

$$\mathbf{A}_{mn}^{(1)} = Y_{mn} \cos(m\varphi) \mathbf{E}_x - Y_{mn} \sin(m\varphi) \mathbf{E}_y, \quad \mathbf{A}_{mn}^{(2)} = Y_{mn} \sin(m\varphi) \mathbf{E}_x + Y_{mn} \cos(m\varphi) \mathbf{E}_y,$$

здесь  $(\rho, \varphi, z)$  — цилиндрические координаты, а

$$Y_{mn}(M) = h_m^{(2)}(k_e R_{Mz_n}) \left( \frac{\rho}{R_{Mz_n}} \right)^m.$$

Легко видеть, что  $\mathbf{A}_{mn}^{(1)}$  и  $\mathbf{A}_{mn}^{(2)}$  ортогональны на поверхности  $\partial D_i$ .

**Утверждение.** *Линейная комбинация полей электрических и магнитных мультиполей вида  $\mathbf{B}_{mn}^{(1,2)} = c_1 \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_{mn}^{(1)} + c_2 \nabla \times \mathbf{A}_{mn}^{(2)}$  ортогональна полю  $S$ -поляризованной плоской волны на поверхности  $\partial D_i$ , т.е.  $\int_{\partial D_i} \mathbf{B}_{mn}^{1,2} \mathbf{E}_0^S d\sigma = 0$ .*

**Доказательство.** Для доказательства достаточно подставить разложение плоской волны (6) в выражение для поля (5), а векторные потенциалы  $\mathbf{A}_{mn}^{(1,2)}$  записать в виде

$$\mathbf{A}_{mn}^{(1)} = Y_{mn} \cos((m+1)\varphi) \mathbf{E}_\rho - Y_{mn} \sin((m+1)\varphi) \mathbf{E}_\varphi, \quad (7)$$

$$\mathbf{A}_{mn}^{(2)} = Y_{mn} \sin((m+1)\varphi) \mathbf{E}_\rho + Y_{mn} \cos((m+1)\varphi) \mathbf{E}_\varphi, \quad (8)$$

где  $(\mathbf{E}_\rho, \mathbf{E}_\varphi, \mathbf{E}_z)$  — базис цилиндрической системы координат. Утверждение доказано.

Аналогично может быть установлена ортогональность  $\mathbf{B}_{mn}^{(2,1)}$  полю  $\mathbf{E}_0^P$ .

Будем строить представления для полей в виде линейной комбинации электрических и магнитных мультиполей отдельно для  $P$ - и  $S$ -поляризаций на основе потенциалов (7), (8). Представление для электрического поля в случае  $P$ -поляризации примет вид

$$\mathbf{E}_e^N = \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N \left\{ p_{mn}^e \frac{j}{k\varepsilon_e} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_{mn}^{(1)} + q_{mn}^e \frac{j}{\varepsilon_e} \nabla \times \mathbf{A}_{mn}^{(2)} \right\} + \sum_{n=1}^N r_n^e \frac{j}{k\varepsilon_e} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_n^{(3)},$$

где  $\mathbf{A}_n^{(3)} = Y_{0n}(M, z_n) \mathbf{E}_z$ . Появление последнего члена обусловлено независимой от  $\varphi$  составляющей по оси  $Oz$ .

Покажем полноту и замкнутость системы вертикальных электрических диполей, располагающихся на оси, в классе полей, не зависящих от  $\varphi$ . В этом случае задача сводится к скалярной задаче в полуплоскости [12, с. 27–29].

**Лемма.** *Система  $\{Y_{0n}(M)\}_{n=1}^\infty$  замкнута в пространстве  $L_2(\gamma)$ , где  $\gamma$  — образующая поверхности вращения  $\partial D_i$ .*

**Доказательство.** Предположим, что существует функция  $f(\eta)$ , не равная тождественно нулю, для которой имеет место формула

$$\Phi(M) = \int_{\zeta} h_0^{(2)}(k_e R_{Mz_n}) f(\eta) dl = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Напомним, что  $\{z_n\}_{n=1}^\infty$  имеет точку сгущения  $z_0$  внутри  $D_i$ , выберем в ней начало координат. Тогда существует такая окрестность  $g$  этой точки  $z_0$ , которая целиком лежит внутри  $D_i$ . В окрестности  $g$  функция  $\Phi(M)$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца и имеет место представление

$$\Phi(M) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l j_l(k_e r) P_l(\cos \theta).$$

Опустим точку  $M$  на ось  $z$ , полагая при этом  $\cos \theta = 1$ . Тогда

$$\Phi(M) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l j_l(k_e z).$$

Устремляя  $z$  к нулю, будем иметь  $a_0 = 0$ . Далее, поделив оставшийся ряд на  $z$  и устремив  $z$  к нулю, последовательно получим, что все  $a_l = 0$ ,  $l = 0, 1, \dots$ . Следовательно,  $\Phi(M) \equiv 0$  на всём отрезке оси  $z$ . Доказательство завершается использованием результатов теоремы 2 из [11].

Суммируя изложенное выше, сформулируем следующий основной результат.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда поле  $P$  поляризованной плоской волны (4) для любого угла падения  $\theta_0$  на поверхности вращения  $\partial D_i$  может быть приближено с любой точностью полями мультиполей в пространстве  $L_2^r(\partial D_i)$ , т.е. для любого  $\delta > 0$  существуют  $N$  и такие коэффициенты  $\{p_{mn}^e, q_{mn}^e, r_n^e\}$ , что

$$\|\mathbf{e}_e^N - \mathbf{e}_0^P\|_{L_2^r(\partial D_i)} \leq \delta.$$

**Замечание.** Аналогично строится представление для внутреннего поля в  $D_i$  [11].

Таким образом, приближённое решение в рамках МДИ может быть записано в виде [7]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_\xi^N \\ \mathbf{H}_\xi^N \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N_m^\xi} \left\{ p_{mn}^\xi \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_1^\xi \mathbf{A}_{mn}^{(1)\xi} + q_{mn}^\xi \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_2^\xi \mathbf{A}_{mn}^{(2)\xi} \right\} + \sum_{n=1}^{N_m^\xi} r_n^\xi \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_1^\xi \mathbf{A}_{mn}^{(3)\xi}, \quad \xi = e, i. \quad (9)$$

Здесь

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_1^\xi = \begin{pmatrix} \frac{j}{k\varepsilon_\xi} \nabla \times \nabla \times \\ -\frac{1}{\varepsilon_\xi} \nabla \times \end{pmatrix}, \quad \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{R}}_2^\xi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_\xi} \nabla \times \\ \frac{j}{k\varepsilon_\xi} \nabla \times \nabla \times \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{mn}^{(1)\xi} = \{Y_m^\xi(\eta, z') \cos((m+1)\varphi), -Y_m^\xi(\eta, z') \sin((m+1)\varphi), 0\},$$

$$\mathbf{A}_{mn}^{(2)\xi} = \{Y_m^\xi(\eta, z') \sin((m+1)\varphi), Y_m^\xi(\eta, z') \cos((m+1)\varphi), 0\},$$

$$\mathbf{A}_{mn}^{(3)\xi} = \{0, 0, Y_0^\xi(\eta, z')\}, \quad \eta = (\rho, z),$$

$$Y_m^e(\eta, z') = h_m^{(2)}(k_e R_{\eta z'}) \left( \frac{\rho}{R_{\eta z'}} \right)^m, \quad Y_m^i(\eta, z') = j_m(k_i R_{\eta z'}) \left( \frac{\rho}{R_{\eta z'}} \right)^m,$$

$(\rho, \varphi, z)$  — цилиндрические координаты,  $z'$  — точка источника, располагающегося на оси вращения  $Oz$  внутри  $D_i$ ,  $h_m^{(2)}$  — сферическая функция Ханкеля, удовлетворяющая условиям излучения,  $j_m$  — сферическая функция Бесселя. Легко видеть, что приближённое решение (9) удовлетворяет системе уравнений Максвелла (1) и условиям излучения (3).

### 3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Рассмотрим сначала локальный случай ( $d_\perp = 0$ ). Отметим, что векторные потенциалы  $\mathbf{A}_{mn}^{(2,3)\xi}$  выбраны таким образом, чтобы согласовать их зависимость от азимутальной переменной  $\varphi$  с зависимостью фурье-гармоник плоской волны (6) после разложения поля в ряд Фурье. Это обстоятельство позволяет свести задачу аппроксимации поля плоской волны на поверхности вращения к задаче аппроксимации фурье-гармоник полей на образующей поверхности вращения [6]. Таким образом, соответствие между гармониками Фурье на образующей поверхности вращения может быть записано в виде

$$\begin{pmatrix} W_m^i & X_m^i & -W_m^e & -X_m^e \\ U_m^i & V_m^i & -U_m^e & -V_m^e \\ -X_m^i & W_m^i & X_m^e & -W_m^e \\ -V_m^i & U_m^i & V_m^e & -U_m^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_m^i \\ q_m^i \\ p_m^e \\ q_m^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}_m^0 \\ \mathbf{E}_\varphi \cdot \mathbf{E}_m^0 \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{H}_m^0 \\ \mathbf{E}_\varphi \cdot \mathbf{H}_m^0 \end{pmatrix}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Строки матрицы соответствуют компонентам полей  $E_\tau$ ,  $E_\varphi$ ,  $H_\tau$ ,  $H_\varphi$ , где  $\boldsymbol{\tau} = (\alpha, 0, \beta)$  — единичный касательный вектор к образующей поверхности  $\partial D_i$ . Соответствующие матричные элементы определяются по формулам

$$W_m^\xi = \frac{j}{k\varepsilon_\xi} \left[ \alpha k_\xi^2 (Y_{m+2}^\xi + Y_m^\xi) - \alpha k_\xi \frac{m+1}{\rho} Y_{m+1}^\xi + \beta k_\xi^2 \frac{z-z'}{\rho} Y_{m+2}^\xi \right], \quad X_m^\xi = \frac{k_\xi}{\varepsilon_\xi} Y_{m+1}^\xi \left[ \alpha \frac{z-z'}{\rho} - \beta \right],$$

$$U_m^\xi = \frac{j}{k\varepsilon_\xi} \left[ \frac{m+1}{\rho} k_\xi Y_{m+1}^\xi - k_\xi^2 Y_m^\xi \right], \quad V_m^\xi = \frac{k_\xi}{\varepsilon_\xi} \frac{z-z'}{\rho} Y_{m+1}^\xi.$$

Компоненты в правой части (10) записываются как

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}_m^0 = e_m \{ \alpha \cos \theta_0 S_m^- - 2j\beta \sin \theta_0 J_{m+1}(\kappa) \},$$

$$\mathbf{E}_\varphi \cdot \mathbf{E}_m^0 = e_m \cos \theta_0 S_m^+, \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{H}_m^0 = -e_m \alpha n_e S_m^+, \quad \mathbf{E}_\varphi \cdot \mathbf{H}_m^0 = -e_m n_e S_m^-,$$

где

$$S_m^\pm = J_m(\kappa) \pm J_{m+2}(\kappa), \quad \kappa = k_e \rho \sin \theta_0, \quad e_m = (-j)^m \exp\{jk_e \rho \cos \theta_0\}, \quad n_e = \sqrt{\varepsilon_e}.$$

Рассмотрим независимую от  $\varphi$  гармонику, соответствующую последнему слагаемому в представлении для полей (9). Отметим, что она вносит основной вклад в поле дифракции для угла падения плоской волны  $\theta_0 = 90^\circ$ . В данном случае матрица будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} W^i & -W^e \\ U^i & -U^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^i \\ r^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{E}_\varphi \cdot \mathbf{H}^0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

соответствующие элементы матрицы

$$W^\xi = \frac{j}{k\varepsilon_\xi} \left[ \alpha k_\xi^2 \frac{z-z'}{\rho} Y_2^\xi - \beta \left( \frac{1}{\rho} k_\xi^2 Y_1^\xi + \left( \frac{z-z'}{\rho} \right)^2 k_\xi^2 Y_2^\xi + k_\xi^2 Y_0^\xi \right) \right], \quad U^\xi = k_\xi Y_1^\xi,$$

а

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}^0 = e_0 [j\alpha \cos \theta_0 J_1(\kappa) - \beta \sin \theta_0 J_0(\kappa)], \quad \mathbf{E}_\varphi \cdot \mathbf{H}^0 = -je_0 J_1(\kappa).$$

Перейдём теперь к анализу мезоскопического граничного условия

$$\mathbf{n}_i \times (\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_e(P) - \mathbf{E}_0^P(P)) = -d_\perp \mathbf{n}_i \times \nabla \{ \mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_e(P) - \mathbf{E}_0^P(P)) \}, \quad P \in \partial D_i.$$

Перепишем его в виде

$$\mathbf{n}_i \times \mathbf{B} + d_\perp \mathbf{n}_i \times \nabla \{ \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{B} \} = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{E}_i - \mathbf{E}_e - \mathbf{E}_0^P.$$

Оно также может быть записано в виде двух скалярных уравнений:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B} + d_\perp \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{B}) = 0, \quad \mathbf{E}_\varphi \cdot \mathbf{B} + d_\perp \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{B}) = 0. \quad (12)$$

Учитывая специфическую зависимость поля  $\mathbf{E}$  от переменной  $\varphi$  для гармоник  $m = 0, 1, 2, \dots$ , последнее соотношение принимает вид

$$\mathbf{E}_\varphi \cdot \mathbf{B} - d_\perp \frac{m+1}{\rho} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (13)$$

Из сказанного выше ясно, что добавки за счёт параметра Фейбельмана возникают только в первой и второй строках матрицы (10).

Вычисления организуем следующим образом.

1. В (13) необходимо найти  $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{E}_\xi$ . Для этого в представлении  $W_m^\xi$  достаточно выполнить замену  $\boldsymbol{\tau} = (\alpha, 0, \beta)$ ,  $\mathbf{n} = (\beta, 0, -\alpha)$  и умножить на  $d_\perp(m+1)/\rho$ . Аналогично поступаем с добавкой к правой части  $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}_m^0$ .

2. В первом соотношении (12) используем выражение для  $W_m^\xi$ , полученное на предыдущем этапе. При вычислении касательной производной  $\partial/\partial\tau$  следует учесть, что для элементов матрицы имеют место соотношения

$$\frac{\partial}{\partial\rho} Y_m^\xi = \frac{m}{\rho} Y_m^\xi - k_\xi Y_{m+1}^\xi, \quad \frac{\partial}{\partial z} Y_m^\xi = -k_\xi \frac{z-z'}{\rho} Y_{m+1}^\xi.$$

Аналогично вычисляется добавка к правой части  $\mathbf{E}_\varphi \cdot \mathbf{E}_m^0$ .

3. Такие же преобразования проводятся со второй строкой матрицы (11).

Для определения неизвестных амплитуд дискретных источников  $\mathbf{p} = \{p_m^i, q_m^i, p_m^e, q_m^e\}$  используем обобщённый метод коллокаций [13], поточечно сшивая гармоники Фурье-полей на образующей поверхности вращения. При этом количество точек коллокации  $L$  остаётся одинаковым для всех гармоник Фурье, а число дискретных источников  $N_m^\xi$  может быть разным для внутреннего и внешнего полей и зависит от номера гармоники  $m$ . Как правило, выполняется соотношение  $N_m^i + N_m^e < L$ , т.е. системы (10), (11) оказываются переопределёнными. Вектор амплитуд ДИ вычисляется с помощью факторизации матрицы с последующим вычислением псевдорешения [14, с. 78–80]. Определив амплитуду ДИ, можно проверить точность полученного приближённого решения посредством вычисления невязки полей на поверхности рассеивателя. Невязка, вычисляемая в точках, промежуточных по отношению к точкам коллокации, служит надёжным критерием сходимости приближённого решения [13].

При проведении расчётов нас будет интересовать сечение экстинкции, которое показывает, какая часть энергии плоской волны уходит на рассеяние и поглощение частиц. Сечение экстинкции вычисляется по диаграмме направленности рассеянного поля [15, с. 130–131], компоненты которой применительно к решению (9) принимают вид

$$\begin{aligned} F_\theta(\theta, \varphi) &= jk_e \sum_{m=0}^M (j \sin \theta)^m \cos((m+1)\varphi) \sum_{n=1}^{N_m^e} (p_{mn}^e \cos \theta + q_{mn}^e) \exp\{jk_e z_n^e \cos \theta\} - \\ &\quad - jk_e \sin \theta \sum_{n=1}^{N_0^e} r_n^e \exp\{jk_e z_n^e \cos \theta\}, \\ F_\varphi(\theta, \varphi) &= -jk_e \sum_{m=0}^M (j \sin \theta)^m \sin((m+1)\varphi) \sum_{n=1}^{N_m^e} (p_{mn}^e + q_{mn}^e \cos \theta) \exp\{jk_e z_n^e \cos \theta\}. \end{aligned}$$

Сечение экстинкции в этом случае находится как

$$\sigma_{\text{ext}}(\theta_0) = -\frac{4\pi}{k_e} \text{Im} F_\theta(\pi - \theta_0, \pi). \quad (14)$$

Отметим, что согласно результатам [16] сечение рассеяния, входящее в сечение экстинкции, также может быть представлено в аналитическом виде.

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Будем рассматривать частицы сфероидальной формы (“нанорисинки”), расположенные во внешней прозрачной среде — стекле с показателем преломления  $n_e = 1.52$ . В качестве веществ

выберем плазмонные металлы — золото (Au) и серебро (Ag). Для того чтобы определить значение параметра Фейбельмана, будем использовать аналитическое выражение [17]

$$d_{\perp}(\omega) = -j \frac{\varepsilon_i \varepsilon_e}{\varepsilon_i - \varepsilon_e} \frac{\beta}{\omega_p \sqrt{\varepsilon_b}} \left( \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_i} - 1 \right)^{3/2}.$$

Здесь  $\varepsilon_b = \varepsilon_i + \omega_p^2 / (\omega^2 - j\gamma\omega)$ ,  $\omega_p$  — плазменная частота металла,  $\beta^2 = 3v_F^2/5$ ,  $v_F$  — скорость Ферми,  $\gamma$  — скорость затухания Друде. Результаты расчёта по этой формуле хорошо коррелируют с экспериментальными значениями, полученными для случая интерфейса “золото” или “серебро–вакуум” [18].

Квантовые параметры для золота и серебра выберем в соответствии с [19]:

Au:  $\hbar\omega_p = 9.02$  эВ,  $\hbar\gamma = 0.071$  эВ,  $v_F = 1.39 \cdot 10^{12}$  мкм/с.

Ag:  $\hbar\omega_p = 8.99$  эВ,  $\hbar\gamma = 0.025$  эВ,  $v_F = 1.39 \cdot 10^{12}$  мкм/с.

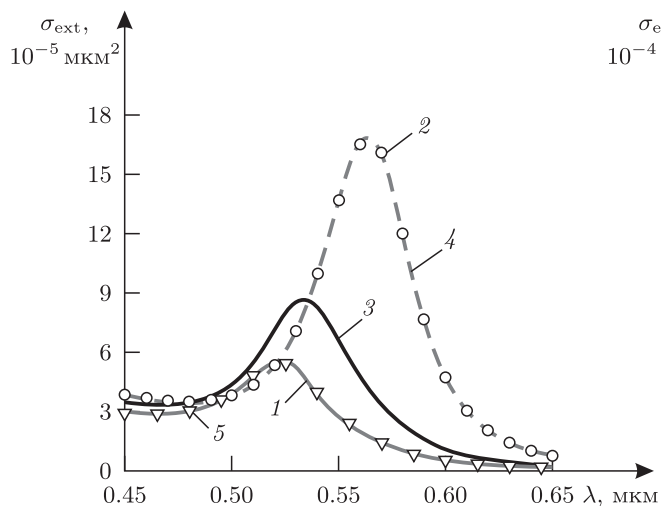
Кроме сечения экстинкции (14) нас будет интересовать интегральный коэффициент усиления (КУ) поля на поверхности частицы  $F(\lambda)$ , наиболее ярко демонстрирующий различия во влиянии поверхностных и объёмных эффектов на характеристики рассеяния [7]:

$$F(\lambda) = \frac{\int_{\partial D_i} |\mathbf{E}_N^e + \mathbf{E}^0|^2 d\sigma}{\int_{\partial D_i} |\mathbf{E}^0|^2 d\sigma}. \quad (15)$$

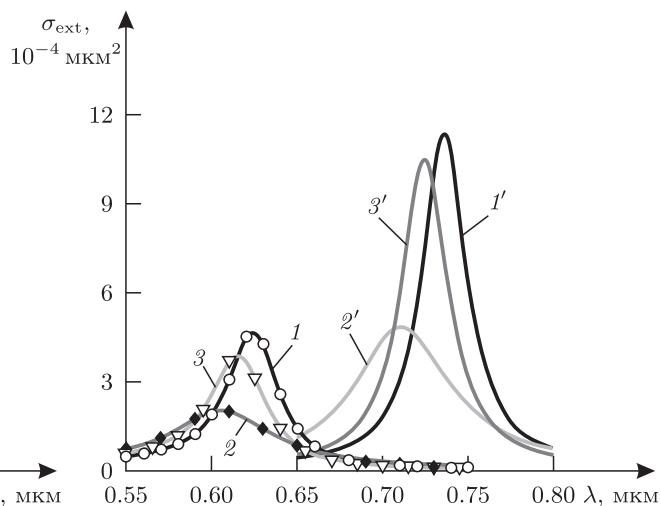
На рис. 1 приведены значения сечения экстинкции для золотой сферы диаметром  $D = 10$  нм со значениями параметра Фейбельмана  $d_{\perp} = \pm 0.5$  нм. Кривые демонстрируют результаты, полученные с помощью МДИ, а точки — результаты теории Ми [8] с использованием граничных условий МТ. Отметим полное соответствие результатов МДИ и теории Ми. Для сравнения приведены также результаты, соответствующие локальному случаю (LRA)  $d_{\perp} = 0$  (кривая 3). В то же время наблюдается существенное различие между графиками, соответствующими ненулевым значениям параметра Фейбельмана: при  $d_{\perp} = +0.5$  нм максимальное значение функции кривой оказывается почти вдвое больше, чем у функции кривой LRA, при этом максимум смещается в сторону длинных волн; при  $d_{\perp} = -0.5$  нм график, наоборот, имеет сниженное значение максимума, который при этом сдвигается в сторону коротких волн. Подобная ситуация не является неожиданной, так как при положительных значениях  $d_{\perp}$  электронное облако “выходит” за поверхность частицы, увеличивая её объём, в то время как отрицательные значения  $d_{\perp}$  означают “вдавливание” облака внутрь частицы, что как бы уменьшает её размер. Следует отметить, что благородные металлы (Au, Ag, Pt) характеризуются отрицательными значениями действительной части параметров Фейбельмана [18].

На рис. 2 приведены результаты расчётов для сечения экстинкции (14) золотых вытянутых сфероидов эквиобъёмного диаметра  $D = 10$  нм с соотношением осей  $r = 2, 3$  при угле падения волны  $\theta_0 = 90^\circ$ . Видно, что при увеличении вытянутости частицы с сохранением её объёма растёт соотношение между площадью поверхности и объёмом. Сравнение влияния объёмных (GNOR) и поверхностных (МТ) эффектов показывает существенные различия в амплитудах ПР — в более чем два раза, причём если сдвиг в область коротких волн для МТ составляет 10 нм, то для GNOR он близок к 20 нм.

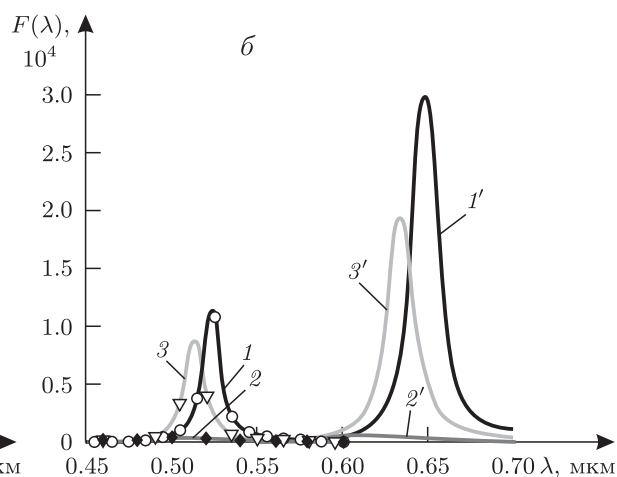
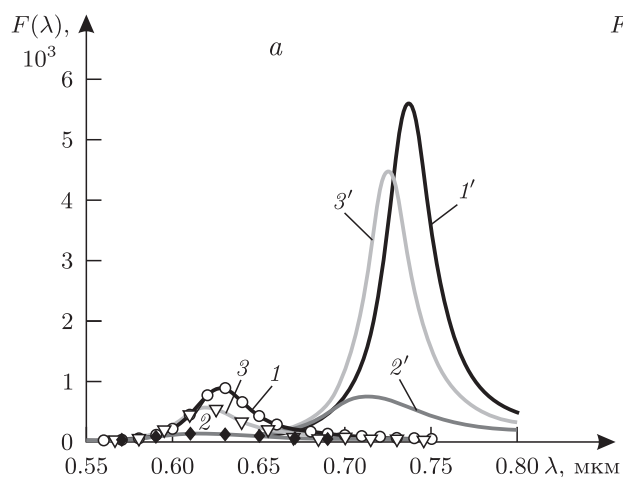
Ещё большее различие в проявлениях поверхностных и объёмных эффектов можно наблюдать при анализе КУ ближнего поля (15) на рис. 3, а для таких же сфероидов — в амплитудах достигает пяти раз при тех же сдвигах в спектральной области, что на рис. 2. Это обстоятельство не является неожиданным, так как представленные результаты относятся непосредственно к ближнему полю. Значительное влияние поверхностных эффектов



**Рис. 1.** Сечение экстинкции золотой сферы: 1, 2 —  $d = -0.5$  нм; 3 —  $d = 0$  нм; 4, 5 —  $d = +0.5$  нм.



**Рис. 2.** Сечение экстинкции вытянутых золотых сфероидов: 1–3 —  $r = 2$ ; 1'–3' —  $r = 3$ ; 1, 1' — LRA; 2, 2' — GNOR; 3, 3' — MT.



**Рис. 3.** Коэффициент усиления поля на поверхности вытянутых золотых (а) и серебряных (б) сфероидов: 1–3 —  $r = 2$ ; 1'–3' —  $r = 3$ ; 1, 1' — LRA; 2, 2' — GNOR; 3, 3' — MT.

можно также наблюдать на рис. 3, б, где построены кривые КУ для аналогичных серебряных частиц. В этом случае различие в амплитудах GNOR и MT становится ещё больше и достигает 30 раз при сдвиге в спектральной области — около 10 нм для MT и 35 нм для GNOR.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поскольку MT появилась недавно, авторы имеющихся публикаций рассматривают лишь частицы сферической формы, для которых существует аналитическое решение на основе теории Ми [8]. Вместе с тем в наноплазмонике зачастую применяются и общие подходы, связанные с использованием поверхностных интегральных уравнений [20]. В методе поверхностных интегральных уравнений применительно к граничной задаче (1)–(3) возможно, за счёт поверхностной дивергенции, получение уравнения с более сильной, чем в классическом локальном случае [21], особенностью в ядре.

Сформулируем основные результаты работы.

1. На основе обобщения метода дискретных источников разработан и реализован численный метод решения задач дифракции плоской волны на плазмонных наночастицах, расположенных в плотной внешней среде, в котором используются мезоскопические граничные условия, позволяющие моделировать поверхностные квантовые эффекты в наночастицах. Представлено обоснование метода, подробно описана его вычислительная схема.

2. Обобщённый метод применён к анализу плазмонных “нанорисинков”. Проведён сравнительный анализ влияния объёмных и поверхностных эффектов на рассеивающие свойства наночастиц. Установлено существенное (в десятки раз по амплитуде) различие в проявлениях объёмных и поверхностных эффектов, особенно заметное в случае вытянутых сфероидальных частиц при анализе полей вблизи их поверхностей. Обнаружен значительный сдвиг в спектральной области.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Plasmonic metal nanostructures with extremely small features: new effects, fabrication and applications / H. Shi, X. Zhu, S. Zhang [et al.] // *Nanoscale Adv.* — 2021. — V. 3. — P. 4349–4369.
2. Stamatopoulou, P.E. Finite-size and quantum effects in plasmonics: manifestations and theoretical modelling [Invited] / P.E. Stamatopoulou, C. Tserkezis // *Optical Materials Express.* — 2022. — V. 12, № 5. — P. 1869–1893.
3. A generalized non-local optical response theory for plasmonic nanostructures / N.A. Mortensen, S. Raza, M. Wubs [et al.] // *Nat. Commun.* — 2014. — Art. 5:3809.
4. Mortensen, N.A. Mesoscopic electrodynamics at metal surfaces / N.A. Mortensen // *Nanophotonics.* — 2021. — V. 10. — P. 2563–2616.
5. Yang, F. Transformation optics approach to mesoscopic plasmonics / F. Yang, K. Ding // *Phys. Rev. B.* — 2022. — V. 105. — Art. L121410.
6. Еремин, Ю.А. Квазиклассические модели квантовой наноплазмоники на основе метода дискретных источников (обзор) / Ю.А. Еремин, А.Г. Свешников // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.* — 2021. — Т. 61, № 4. — С. 34–62.
7. Еремин, Ю.А. Анализ влияния квантовых эффектов на оптические характеристики плазмонных наночастиц методом дискретных источников / Ю.А. Еремин, В.В. Лопушенко // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.* — 2023. — Т. 63, № 11. — С. 1911–1921.
8. Plasmon–emitter interactions at the nanoscale / P.A.D. Gonçalves, T. Christensen, N. Rivera [et al.] // *Nat. Commun.* — 2020. — V. 11, № 1. — Art. 366.
9. Еремин, Ю.А. Анализ методом дискретных источников дифракции электромагнитных волн на трехмерных рассеивателях / Ю.А. Еремин, А.Г. Свешников // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.* — 1999. — Т. 39, № 12. — С. 2050–2063.
10. Купрадзе, В.Д. О приближённом решении задач математической физики / В.Д. Купрадзе // *Успехи мат. наук.* — 1967. — Т. 22, № 2. — С. 58–104.
11. Еремин, Ю.А. Построение интегральных представлений для полей в задачах дифракции на проницаемых телах вращения / Ю.А. Еремин, В.В. Лопушенко // *Дифференц. уравнения.* — 2023. — Т. 59, № 9. — С. 1219–1216.

12. Дмитриев, В.И. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике / В.И. Дмитриев, Е.В. Захаров. — М. : МАКС Пресс, 2008. — 316 с.
13. New scheme of the discrete sources method for two-dimensional scattering problems by penetrable obstacles / Yu.A. Eremin, N.L. Tsitsas, M. Kouroubakis, G. Fikioris // *J. Comput. Appl. Math.* — 2023. — V. 417, № 2. — Art. 114556.
14. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. — М. : Наука, 1984. — 320 с.
15. Колтон, Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс ; пер. с англ. Ю.Е. Еремина, Е.В. Захарова ; под ред. А.Г. Свешникова. — М. : Мир, 1987. — 311 с.
16. Еремин, Ю.А. Аналитическое представление для интегрального поперечника рассеяния в рамках интегрофункционального метода дискретных источников / Ю.А. Еремин, Е.В. Захаров // *Дифференц. уравнения.* — 2022. — Т. 58, № 8. — С. 1073–1077.
17. Nonlocal effects in atom-plasmon interactions / M.H. Eriksen, C. Tserkezis, N.A. Mortensen, J.D. Cox // *ArXiv.* 2023. arXiv:2308.09134.
18. Optical response of noble metal nanostructures: quantum surface effects in crystallographic facets / A.R. Echarrri, P.A.D. Gonçalves, C. Tserkezis [et al.] // *Optica.* — 2021. — V. 8, № 5. — P. 710–721.
19. Nonlocal optical response in metallic nanostructures / S. Raza, S.I. Bozhevolnyi, M. Wubs, N.A. Mortensen // *J. Physics: Condens. Matter.* — 2015. — V. 27, № 18. — Art. 183204.
20. A review on the application of integral equation-based computational methods to scattering problems in plasmonics / X. Zheng, M. Kupresak, V. Verellen [et al.] // *Adv. Theory Simul.* — 2019. — V. 2. — Art. 1900087.
21. Setukha, A.V. Method of boundary integral equations with hypersingular integrals in boundary-value problems / A.V. Setukha // *J. Math. Sci.* — 2021. — V. 257, № 1. — P. 114–126.

# NUMERICAL METHOD FOR SOLVING OF THE DIFFRACTION PROBLEM DESCRIBED BY MAXWELL'S EQUATIONS WITH MESOSCOPIC BOUNDARY CONDITIONS

Yu. A. Eremin<sup>1</sup>, V. V. Lopushenko<sup>2</sup>

*Lomonosov Moscow State University, Russia*  
*e-mail: <sup>1</sup>eremin@cs.msu.ru, <sup>2</sup>lopushnk@cs.msu.ru*

A numerical method for solving the diffraction boundary problem for the system of Maxwell's equations with mesoscopic boundary conditions has been developed and implemented. It is based on the discrete source method. A numerical analysis of the influence of surface quantum effects on the optical characteristics of plasmonic nanoparticles is carried out. It has been established that surface effects have a significant impact on the field characteristics, and the results differ significantly from the case of volumetric effects.

*Keywords:* discrete source method, mesoscopic boundary condition, plasmon resonance.

## FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-284.

## REFERENCES

1. Shi, H., Zhu, X., Zhang, S. [et al.], Plasmonic metal nanostructures with extremely small features: new effects, fabrication and applications, *Nanoscale Adv.*, 2021, vol. 3, pp. 4349–4369.
2. Stamatopoulou, P.E. and Tserkezis, C., Finite-size and quantum effects in plasmonics: manifestations and theoretical modelling [Invited], *Optical Materials Express*, 2022, vol. 12, no. 5, pp. 1869–1893.
3. Mortensen, N.A., Raza, S., Wubs, M. [et al.], A generalized non-local optical response theory for plasmonic nanostructures, *Nat. Commun.*, 2014, art. 5:3809.

4. Mortensen, N.A., Mesoscopic electrodynamics at metal surfaces, *Nanophotonics*, 2021, vol. 10, pp. 2563–2616.
5. Yang, F. and Ding, K., Transformation optics approach to mesoscopic plasmonics, *Phys. Rev. B.*, 2022, vol. 105, art. L121410.
6. Eremin, Yu.A. and Sveshnikov, A.G., Semi-classical models of quantum nanoplasmonics based on the discrete source method (review), *Computat. Math. Math. Phys.*, 2021, vol. 61, no. 4, pp. 564–590.
7. Eremin, Yu.A. and Lopushenko, V.V., Analysis of quantum effects on optical characteristics of plasmonic nanoparticles based on the discrete sources method, *Computat. Math. Math. Phys.*, 2023, vol. 63, no. 11, pp. 2139–2149.
8. Gonçalves, P.A.D., Christensen, T., Rivera, N. [et al.], Plasmon–emitter interactions at the nanoscale, *Nat. Commun.*, 2020, vol. 11, no. 1, art. 366.
9. Eremin, Yu.A. and Sveshnikov, A.G., Analysis of electromagnetic diffraction by three-dimensional bodies using the discrete-sources method, *Computat. Math. Math. Phys.*, 1999, vol. 36, no. 12, pp. 1967–1980.
10. Kupradze, V.D., On the approximate solution of problems in mathematical physics, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1967, vol. 22, no. 2, pp. 59–107.
11. Eremin, Yu.A. and Lopushenko, V.V., Construction of integral representations of fields in problems of diffraction by penetrative bodies of revolution, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 9, pp. 1235–1241.
12. Dmitriev, V.I. and Zakharov, E.V., *Metod integral'nykh uravnenij v vychislitel'noj elektrodinamike* (Integral Equations Method in Computational Electrodynamics), Moscow: MAKS Press, 2008.
13. Eremin, Yu.A., Tsitsas, N.L., Kouroubakis, M., and Fikioris, G., New scheme of the discrete sources method for two-dimensional scattering problems by penetrable obstacles, *J. Comput. Appl. Math.*, 2023, vol. 417, no. 2, art. 114556.
14. Voevodin, V.V. and Kuznetsov, Yu.A., *Matricy i vychisleniya* (Matrices and Calculations), Moscow: Nauka, 1984.
15. Colton, D. and Kress, R., *Integral Equations Methods in Scattering Theory*, New York: J. Wiley and Sons, 1983.
16. Eremin, Yu.A. and Zakharov, E.V., Analytical representation of the integral scattering cross-section in the integrofunctional discrete source method, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 8, pp. 1064–1069.
17. Eriksen, M.H., Tserkezis, C., Mortensen, N.A., and Cox, J.D., Nonlocal effects in atom-plasmon interactions, *arXiv:2308.09134*, 2023.
18. Echarri, A.R., Gonçalves, P.A.D., Tserkezis, C. [et al.], Optical response of noble metal nanostructures: quantum surface effects in crystallographic facets, *Optica*, 2021, vol. 8, no. 5, pp. 710–721.
19. Raza, S., Bozhevolnyi, S.I., Wubs, M., and Mortensen, N.A., Nonlocal optical response in metallic nanostructures, *J. Physics: Condens. Matter*, 2015, vol. 27, no. 18, art. 183204.
20. Zheng, X., Kupresak, M., Verellen, V. [et al.], A review on the application of integral equation-based computational methods to scattering problems in plasmonics, *Adv. Theory Simul.*, 2019, vol. 2, art. 1900087.
21. Setukha, A.V., Method of boundary integral equations with hypersingular integrals in boundary-value problems, *J. Math. Sci.*, 2021, vol. 257, no. 1, pp. 114–126.