ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 8, с. 1049–1062

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 917.955

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПОЛОСЕ

© Ш. А. Алимов[1], А. К. Кудайбергенов[2]

[1] Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, г. Ташкент, Узбекистан

[1,2] Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, г. Ташкент

e-mail: [1] sh_alimov@mail.ru, [2] khudaybergenovallambergen@mail.ru

Поступила в редакцию 03.06.2024 г., после доработки 03.06.2024 г.; принята к публикации 02.07.2024 г.

Исследованы вопросы существования и единственности решения задачи определения стационарной температуры на верхней границе полосы при известных условиях на нижней границе.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, задача Коши, аналитическая функция.

DOI: 10.31857/S0374064124080047, EDN: KDGAUS

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующий процесс распределения температуры в слое $P\subset\mathbb{R}^3$:

$$P=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\colon x_1,x_2\in\mathbb{R},\ \ -h<x_3<0,\ \ h>0\}.$$

Пусть $u(x_1,x_2,x_3,t)$ — температура в точке (x_1,x_2,x_3) в момент $t\geqslant 0$, а $k(x_1,x_2,x_3)$ — коэффициент теплопроводности. Процесс распространения тепла описывается уравнением (см. [1, гл. III, § 1])

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\operatorname{div}[k(x_1,x_2,x_3)\operatorname{grad}u]=0,\quad x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R},\quad t>0.$$

Предполагаем, что температура на верхней границе $\{x_3=0\}$ слоя P и тепловой поток через неё известны. Граничные условия на верхней границе имеют вид

$$u(x_1,x_2,0,t)=\phi(x_1,x_2,x_3),\quad x_1,x_2\in\mathbb{R},\tag{1}$$

$$\frac{\partial u(x_1,x_2,0,t)}{\partial x_3}=\chi(x_1,x_2,x_3),\quad x_1,x_2\in\mathbb{R}.\tag{2}$$

Требуется найти температуру $u(x_1,x_2,-h,t)$ на нижней границе слоя P.

Формально к граничным условиям (1), (2) следует присоединить начальное условие, однако в настоящей работе рассматривается установившийся процесс, в котором требуется найти стационарное, т.е. не зависящее от времени, решение. Кроме того, будем предполагать, что граничные данные не зависят от x_2, а коэффициент теплопроводности зависит только от глубины: $k=k(x_3)$.

Вводя новые обозначения $x = x_1$ и $y = -x_3$, получаем следующую плоскую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{k(y)} \frac{\partial}{\partial y}\left[k(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right] = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < y < h, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = \chi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

которую рассматриваем в области

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R},\ 0 < y < h\}.$$

Коэффициент теплопроводности $k(y)$ предполагается положительным и дважды непрерывно дифференцируемым на полупрямой $y \geqslant 0$.

Обозначим символом $\Lambda_h(\Omega)$ класс функций $u(x,y)$, непрерывных в области Ω и для любого компакта $K \subset (0,h)$ удовлетворяющих условию

$$\|u(\cdot,y)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C_K, \quad y \in K, \tag{5}$$

где C_K — некоторая постоянная; точка означает переменную, по которой находится норма.

Определение 1. Будем говорить, что функция $u(x,y)$ является *решением краевой задачи* (3), (4), если выполнены следующие условия:

i) функция u и все её производные, входящие в уравнение (3), принадлежат $\Lambda_h(\Omega)$;

ii) функция u удовлетворяет уравнению (3);

iii) выполняются граничные условия (4) в следующем смысле:

$$\lim_{y \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x,y) - \phi(x)|^2\, dx = 0, \tag{6}$$

$$\lim_{y \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - \chi(x)\right|^2 dx = 0. \tag{7}$$

Таким образом, мы ищем решения, для которых на каждом слое выполняется условие (5).

Заметим, что, вычитая из решения $u(x)$ произвольную функцию $w(x)$ из класса Λ_h, удовлетворяющую в области Ω уравнению (3) и только второму из граничных условий (4), т.е.

$$\frac{\partial w(x,0)}{\partial y} = \chi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

мы можем свести задачу (3), (4) к следующей задаче Коши:

$$\operatorname{div}[k(y) \operatorname{grad} u(x,y)] = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{8}$$

$$u(x,0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

с новой функцией $\phi(x)$.

Предельная задача Коши. *Для заданной функции $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ найти предельное значение решения $u(x,y)$ задачи (8), (9) на верхней границе $\{y = h\}$ области Ω.*

Определение 2. *Решением предельной задачи Коши* является пара функций, а именно: функция $u(x,y)$, удовлетворяющая (8) и (9) в смысле i)–iii), и функция $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x,h-\varepsilon) - \psi(x)|^2\, dx = 0. \tag{10}$$

Задаче Коши для эллиптических уравнений посвящено огромное число работ, начиная с классической книги Ж. Адамара [2], в которой данная задача была названа *некорректно поставленной* (достаточно полный обзор соответствующей литературы содержится в [3]). В большинстве работ изучаются вопросы устойчивости и регуляризации решений в предположении их существования и удовлетворения некоторым дополнительным условиям (см. [4–8]).

В настоящей статье условия разрешимости предельной задачи Коши устанавливаются в терминах принадлежности граничной функции ϕ специальному классу функций A_σ. Ранее аналогичные результаты были получены для случая ограниченной области [9].

Пусть задано число $\sigma > 0$. Символом A_σ обозначим класс функций $f \in L_2(\mathbb{R})$, которые могут быть аналитически продолжены внутрь полосы

$$S_\sigma = \{z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Im} z| < \sigma\}$$

так, что аналитическое продолжение $f(z)$ удовлетворяет условию

$$\|f\|_\sigma^2 = \sup_{|y|<\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2\,dx < +\infty. \tag{11}$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть функция ϕ принадлежит классу A_σ, где $\sigma = h$. Тогда решение предельной задачи Коши существует и является единственным.*

Теорема 2. *Предположим, что для заданной функции $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ существует решение предельной задачи Коши. Тогда функция ϕ принадлежит классу A_σ, где $\sigma = h$.*

Доказательства этих теорем во многом опираются на методы спектральной теории дифференциальных операторов и гармонического анализа (см. [10, 11]).

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА A_σ

Изучим свойства преобразования Фурье

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\,dx$$

функций из класса A_σ.

Теорема 3. *Для любой функции $f \in A_\sigma$ выполняются неравенства*

$$\pi\|f\|_\sigma^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 \operatorname{ch}(2\sigma\xi)\,d\xi \leqslant 2\pi\|f\|_\sigma^2. \tag{12}$$

Заметим, что функции из A_σ не предполагаются абсолютно интегрируемыми.

Установим справедливость неравенств (12) при дополнительном предположении абсолютной интегрируемости.

Лемма 1. *Пусть функция $f \in A_\sigma$. Предположим, что выполняется оценка*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|\,dx \leqslant \text{const}, \quad |y| < \sigma. \tag{13}$$

Тогда справедливо следующее равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{-2\xi y}\,d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2\,dx, \quad |y| < \sigma. \tag{14}$$

Доказательство. Из оценки (13) следует, что

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|\,dx\,dy\leqslant \mathrm{const}\,. \tag{15}$$

Положим

$$g(x)=\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}|f(x+iy)|\,dy,$$

тогда согласно (15)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(x)\,dx<+\infty.$$

Из сходимости последнего интеграла вытекает, что

$$\lim_{x\to-\infty}\inf g(x)=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\inf g(x)=0.$$

Следовательно, найдутся последовательности $a_k\to-\infty$ и $b_k\to+\infty$ такие, что

$$g(a_k)\to 0,\quad g(b_k)\to 0,\quad k\to+\infty. \tag{16}$$

Для любого $\xi\in\mathbb{R}$ функция $f(z)e^{-i\xi z}$ аналитична в полосе $|\operatorname{Im}z|\leqslant\sigma$, тогда по теореме Коши

$$\int\limits_{a_k}^{b_k}f(x)e^{-i\xi x}\,dx+\int\limits_{0}^{y}f(b_k+it)e^{-i\xi(b_k+it)}\,dt+\int\limits_{b_k}^{a_k}f(x+iy)e^{-i\xi(x+iy)}\,dx+\int\limits_{y}^{0}f(a_k+it)e^{-i\xi(a_k+it)}\,dt=0. \tag{17}$$

Из определения функции g следуют оценки

$$\left|\int\limits_{0}^{y}f(b_k+it)e^{-i\xi(b_k+it)}\,dt\right|\leqslant e^{\sigma|\xi|}g(b_k),\qquad \left|\int\limits_{y}^{0}f(a_k+it)e^{-i\xi(a_k+it)}\,dt\right|\leqslant e^{\sigma|\xi|}g(a_k),$$

и, принимая во внимание (16), можно записать

$$\lim_{k\to+\infty}\int\limits_{y}^{0}f(a_k+it)e^{-i\xi(a_k+it)}\,dt=\lim_{k\to+\infty}\int\limits_{0}^{y}f(b_k+it)e^{-i\xi(b_k+it)}\,dt=0.$$

Переходя в (17) к пределу при $k\to+\infty$, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x+iy)e^{-i\xi(x+iy)}\,dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}\,dx,\quad 0<|y|<\sigma. \tag{18}$$

Положим

$$\widehat{f}(\xi,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x+iy)e^{-i\xi x}\,dx. \tag{19}$$

Согласно (18) выполняется равенство

$$\widehat{f}(\xi,y)=e^{-\xi y}\widehat{f}(\xi). \tag{20}$$

Далее применим равенство Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi,y)|^2\,d\xi = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2\,dx.$$

Отсюда, принимая по внимание (20), получаем требуемое равенство (14). Лемма доказана.

Лемма 2. *Равенство (14) справедливо для любой функции* $f\in A_\sigma$.

Доказательство. Для любого $\varepsilon>0$ положим

$$f_\varepsilon(x)=\frac{f(x)}{1+\varepsilon x^2},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Если $\varepsilon<1/\sigma^2$, то выполняется включение $f_\varepsilon\in A_\sigma$. Далее из неравенства

$$|f_\varepsilon(z)|\leqslant\frac{1}{2}|f(z)|^2+\frac{1}{2}\frac{1}{|1+\varepsilon z^2|^2},\quad |\operatorname{Im} z|<\sigma,$$

следует, что функция f_ε удовлетворяет условию (13).

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\varepsilon<1/(4\sigma^2)$. Тогда

$$|1+\varepsilon z^2|\geqslant 1/2+\varepsilon|z|^2,\quad |y|<\sigma,$$

отсюда

$$|f_\varepsilon(z)|\leqslant\frac{|f(z)|}{1/2+\varepsilon|z|^2}\leqslant 2|f(z)|,\quad |y|<\sigma.$$

Следовательно,

$$|f_\varepsilon(z)-f(z)|^2=|f(z)|^2\frac{\varepsilon^2|z|^4}{|1+\varepsilon z^2|^2}\leqslant|f(z)|^2\frac{\varepsilon^2|z|^4}{(1/2+\varepsilon|z|^2)^2}\leqslant|f(z)|^2.$$

В каждой точке полосы S_σ выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|f_\varepsilon(z)-f(z)|=0,\quad |\operatorname{Im} z|<\sigma,$$

поэтому, согласно теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [12, с. 155],

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f_\varepsilon(x+iy)-f(x+iy)|^2\,dx=0,\quad |y|<\sigma. \tag{21}$$

Аналогично определению (19) положим

$$\widehat{f}_\varepsilon(\xi,y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x+iy)e^{-i\xi x}\,dx.$$

Применяя равенство Парсеваля и соотношение (21), получаем

$$\|\widehat{f}_\varepsilon(\cdot,y)-\widehat{f}(\cdot,y)\|_{L_2(\mathbb{R})}=\|f_\varepsilon(\cdot+iy)-f(\cdot+iy)\|_{L_2(\mathbb{R})}\to 0,\quad \varepsilon\to 0. \tag{22}$$

Поскольку функция f_ε удовлетворяет условиям леммы 1, к ней применимо соотношение (20), т.е.

$$\widehat{f}_\varepsilon(\xi,y)=e^{-\xi y}\widehat{f}_\varepsilon(\xi). \tag{23}$$

Соотношение (22) выполняется и при $y=0$. В таком случае переход в равенстве (23) к пределу при $\varepsilon\to 0$ показывает, что соотношение (20) выполняется и для функции f. Тогда (22) мы можем записать в следующем виде:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}_\varepsilon(\xi)-\widehat{f}(\xi)|^2 e^{-2\xi y}\,d\xi=0,\quad |y|<\sigma. \tag{24}$$

Остаётся заметить, что согласно лемме 1

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}_\varepsilon(\xi)|^2 e^{-2\xi y}\,d\xi=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|f_\varepsilon(x+iy)|^2\,dx,\quad |y|<\sigma.$$

Принимая во внимание (21) и (24), отсюда в пределе получаем требуемое равенство (14). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $f\in A_\sigma$. Согласно лемме 1 эта функция удовлетворяет равенству (14). Заменив в нём y на противоположное значение $(-y)$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(\xi)|^2 e^{2\xi y}\,d\xi=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-iy)|^2\,dx.$$

Отсюда следует основное равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(\xi)|^2\operatorname{ch}(2\xi y)\,d\xi=\pi\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2\,dx+\pi\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-iy)|^2\,dx,\quad |y|<\sigma. \tag{25}$$

Принимая во внимание определение (11), из (25) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(\xi)|^2\operatorname{ch}(2\xi y)\,d\xi\leqslant 2\pi\|f\|_\sigma^2.$$

Тем самым справедливость правого неравенства в (12) установлена.

Из основного равенства (25) следует выполнение оценки

$$\pi\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2\,dx\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(\xi)|^2\operatorname{ch}(2\sigma\xi)\,d\xi,\quad |y|<\sigma,$$

которая, согласно определению (11), доказывает справедливость левого неравенства в (12). Теорема доказана.

Следствие. *Если для функции $f\in L_2(\mathbb{R})$ интеграл в формуле (12) сходится, то $f\in A_\sigma$.*

Действительно, в этом случае аналитическое продолжение функции f внутрь полосы S_σ можно определить равенством

$$f(x+iy)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\xi)e^{i(x+iy)\xi}\,d\xi.$$

Принадлежность данной функции f классу A_σ проверяется с помощью равенства Парсеваля.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Доказательство теорем 1 и 2 основано на представлении решения задачи в виде преобразования Фурье по переменной x функции, удовлетворяющей по переменной y обыкновенному дифференциальному уравнению. Мы ищем решение в следующем виде:

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{u}(s,y)e^{isx}\,ds, \tag{26}$$

где функция $\widehat{u}(s,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{k(y)}\frac{d}{dy}\left[k(y)\frac{d\widehat{u}}{dy}\right]=s^2\widehat{u}(s,y),\quad y>0. \tag{27}$$

При введении новой функции

$$v(s,y)=\sqrt{k(y)}\,\widehat{u}(s,y) \tag{28}$$

уравнение (27) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-q(y)v-s^2v=0. \tag{29}$$

Согласно сделанным выше предположениям потенциал $q(y)$ в уравнении (29) является непрерывной на полупрямой $y\geqslant 0$ функцией, равной

$$q(y)=\frac{1}{2}\frac{k''(y)}{k(y)}-\frac{1}{4}\left(\frac{k'(y)}{k(y)}\right)^2.$$

Среди решений уравнения (29) следующие два обладают важными свойствами.

Предложение 1. *Уравнение (29) имеет решения $v_1(s,y)$ и $v_2(s,y)$, которые при $s\to\infty$ равномерно на каждом компакте полупрямой $y\geqslant 0$ удовлетворяют асимтотическим формулам*

$$v_1(s,y)=e^{|s|y}\left[1+\frac{O(1)}{1+|s|}\right],\quad v_2(s,y)=e^{-|s|y}\left[1+\frac{O(1)}{1+|s|}\right].$$

Для производных этих функций справедливы аналогичные асимптотические формулы:

$$\frac{\partial v_1(s,y)}{\partial y}=|s|e^{|s|y}\left[1+\frac{O(1)}{1+|s|}\right],\quad \frac{\partial v_2(s,y)}{\partial y}=-|s|e^{-|s|y}\left[1+\frac{O(1)}{1+|s|}\right].$$

Доказательство см. в [11, гл. II, § 4, теорема 1].

Для дальнейших рассуждений потребуется следующее утверждение.

Предложение 2. *Уравнение (27) имеет решения $V_1(s,y)$ и $V_2(s,y)$, которые при $|s|\to\infty$ равномерно на каждом компакте полупрямой $y\geqslant 0$ удовлетворяют асимтотическим формулам*

$$V_1(s,y)=\frac{e^{|s|y}}{\sqrt{k(y)}}\left[1+\frac{O(1)}{1+|s|}\right],\quad V_2(s,y)=\frac{e^{-|s|y}}{\sqrt{k(y)}}\left[1+\frac{O(1)}{1+|s|}\right]. \tag{30}$$

Для производных этих функций справедливы аналогичные асимптотические формулы:

$$V_{1y}(s,y)\equiv\frac{\partial V_1(s,y)}{\partial y}=\frac{|s|e^{|s|y}}{\sqrt{k(y)}}\left[1+\frac{O(1)}{1+|s|}\right],\quad V_{2y}(s,y)\equiv\frac{\partial V_2(s,y)}{\partial y}=-\frac{|s|e^{-|s|y}}{\sqrt{k(y)}}\left[1+\frac{O(1)}{1+|s|}\right]. \tag{31}$$

Доказательство следует непосредственно из предложения 1 и соотношения (28).

Введём в рассмотрение функцию

$$V(s,y)=\frac{V_{1y}(s,0)V_2(s,y)-V_{2y}(s,0)V_1(s,y)}{V_{1y}(s,0)V_2(s,0)-V_{2y}(s,0)V_1(s,0)}. \tag{32}$$

Прямая проверка показывает, что функция $V(s,y)$ является решением следующей задачи Коши:

$$V_{yy}+\frac{k'(y)}{k(y)}V_y-s^2V(s,y)=0, \tag{33}$$

$$V(s,0)=1, \quad V'_y(s,0)=0. \tag{34}$$

Интегрируя уравнение (33) и учитывая второе из условий (34), получаем

$$V_y(s,y)=\frac{s^2}{k(y)}\int\limits_0^y k(\eta)V(s,\eta)\,d\eta. \tag{35}$$

Повторное интегрирование с учётом первого из условий (34) приводит к следующему интегральному уравнению:

$$V(s,y)=1+s^2\int\limits_0^y\frac{dt}{k(t)}\int\limits_0^t k(\eta)V(s,\eta)\,d\eta, \tag{36}$$

равносильному задаче Коши (33), (34).

Из соотношений (33)–(36) вытекает, что выполняются соотношения

$$V(s,y)\geqslant 1, \quad V_y(s,y)\geqslant 0, \quad y\geqslant 0, \quad s\in\mathbb{R}. \tag{37}$$

Выше отмечалось, что решение предельной задачи Коши мы ищем в виде интеграла (26). Естественно предположить, что выполняется равенство

$$\widehat{u}(s,y)=\widehat{\phi}(s)V(s,y), \tag{38}$$

где

$$\widehat{\phi}(s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi(x)e^{-isx}\,dx.$$

Далее покажем, что в случае $\phi\in A_\sigma$ функция

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{\phi}(s)V(s,y)e^{isx}\,ds \tag{39}$$

действительно является решением предельной задачи Коши.

Лемма 3. *Решение $V(s,y)$ задачи Коши (33), (34) с некоторыми положительными постоянными C_j, $j=1,2$, удовлетворяет оценкам*

$$C_1e^{|s|y}\leqslant V(s,y)\leqslant C_2e^{|s|y}. \tag{40}$$

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать справедливость неравенств (40) для достаточно бо́льших значений $|s|$. Воспользуемся представлением решения в виде дроби (32). Согласно асимптотическим равенствам (30) и (31) для числителя этой дроби справедлива оценка

$$V_{1y}(s,0)V_2(s,y)-V_{2y}(s,0)V_1(s,y)=\frac{2|s|\operatorname{ch}(|s|y)}{\sqrt{k(0)k(y)}}\left[1+\frac{O(1)}{1+|s|}\right],\quad y\geqslant 0.$$

Для знаменателя выполняется аналогичная оценка:

$$V_{1y}(s,0)V_2(s,0)-V_{2y}(s,0)V_1(s,0)=\frac{2|s|}{k(0)}\left[1+\frac{O(1)}{1+|s|}\right].$$

Следовательно, для решения задачи Коши (33), (34) выполняется асимптотическая формула

$$V(s,y)=\sqrt{\frac{k(0)}{k(y)}}\operatorname{ch}(|s|y)\left[1+\frac{O(1)}{1+|s|}\right],$$

из которой для достаточно бо́льших $|s|$ вытекают оценки

$$C_1\operatorname{ch}(|s|y)\leqslant V(s,y)\leqslant C_2\operatorname{ch}(|s|y),$$

а непосредственно из них — требуемая оценка (40). Лемма доказана.

Лемма 4. *Производные решения $V(s,y)$ задачи Коши (33), (34) обладают следующими свойствами:*

$$|V_y(s,y)|\leqslant C(1+|s|)e^{|s|y},\quad |V_{yy}(s,y)|\leqslant C(1+|s|)^2e^{|s|y}. \tag{41}$$

Доказательство. Первая оценка (41) непосредственно вытекает из (35) и (40):

$$V_y(s,y)=O(s^2)\int_0^y V(s,\eta)\,d\eta=O(s^2)\int_0^y e^{|s|\eta}\,d\eta=O(|s|)e^{|s|y}.$$

Далее из уравнения (33) получаем

$$|V_{yy}(s,y)|\leqslant C|V_y(s,y)|+s^2|V(s,y)|.$$

Для завершения доказательства леммы остаётся применить первую оценку (41) и правое неравенство в (40).

Лемма 5. *Пусть функция $\phi\in A_\sigma$. Тогда функция $u(x,y)$, определённая равенством (39), бесконечно дифференцируема по x и дважды непрерывно дифференцируема по y в полосе $S_\sigma^+=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant y<\sigma\}$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное число ρ из интервала $0<\rho<\sigma$ и докажем, что функция $u(x,y)$ бесконечно дифференцируема по x и дважды непрерывно дифференцируема по y в полосе S_ρ^+.

Согласно (39) для производной функции $u(x,y)$ можем записать следующее равенство:

$$\frac{\partial^{n+k}u(x,y)}{\partial x^n\partial y^k}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(is)^n\widehat{\phi}(s)\frac{\partial^k V(s,y)}{\partial y^k}e^{isx}\,ds,\quad n\in\mathbb{N},\quad k=0,1,2. \tag{42}$$

Отсюда, применяя оценки (40) и (41), получаем

$$\left|\frac{\partial^{n+k}u(x,y)}{\partial x^n\partial y^k}\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|s|^n\,|\widehat{\phi}(s)|\left|\frac{\partial^k V(s,y)}{\partial y^k}\right|ds\leqslant C\int_{-\infty}^{\infty}|s|^{n+k}|\widehat{\phi}(s)|e^{|s|y}\,ds.$$

Далее, для любого $y \leqslant \rho$ воспользуемся неравенством Коши–Буняковского:

$$\left|\frac{\partial^{n+k}u(x,y)}{\partial x^n\partial y^k}\right| \leqslant C\int\limits_{-\infty}^{\infty}|s|^{n+k}|\widehat{\phi}(s)|e^{|s|\rho}\,ds = C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(|\widehat{\phi}(s)|e^{|s|\sigma}\right)|s|^{n+k}e^{-|s|(\sigma-\rho)}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\phi}(s)|^2e^{2|s|\sigma}\,ds\right)^{1/2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|s|^{2(n+k)}e^{-2|s|(\sigma-\rho)}\,ds\right)^{1/2}. \tag{43}$$

Так как $e^{2\sigma|s|} \leqslant 2\operatorname{ch}(2\sigma|s|)$, то согласно оценке (12) первый интеграл в правой части (43) сходится:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\phi}(s)|^2e^{2|s|\sigma}\,ds \leqslant 2\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\phi}(s)|^2\operatorname{ch}(2|s|\sigma)\,ds \leqslant 4\pi\|\phi\|_\sigma^2.$$

Положим

$$M_{nk}(\rho) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}|s|^{2(n+k)}e^{-2|s|(\sigma-\rho)}\,ds, \quad \rho < \sigma.$$

Подставив эту величину в (43), получим ключевую оценку

$$\left|\frac{\partial^{n+k}u(x,y)}{\partial x^n\partial y^k}\right| \leqslant C\sqrt{M_{nk}(\rho)}\|\phi\|_\sigma.$$

Отсюда очевидным образом следует утверждение леммы.

Лемма 6. *Пусть функция $\phi \in A_\sigma$. Тогда функция $u(x,y)$, определённая равенством (39), и все её производные, входящие в уравнение (8), принадлежат классу Λ_σ.*

Доказательство. Применим к равенству (42) теорему Парсеваля:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^{n+k}u(x,y)}{\partial x^n\partial y^k}\right|^2dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\phi}(s)|^2\left|\frac{\partial^kV(s,y)}{\partial y^k}\right|^2s^{2n}\,ds.$$

Далее воспользуемся оценками (40) и (41):

$$\left\|\frac{\partial^{n+k}u(\cdot,y)}{\partial x^n\partial y^k}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})}dx \leqslant C\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\phi}(s)|^2e^{2y|s|}s^{2n+2k}\,ds.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 7. *Пусть функция $\phi \in A_\sigma$, а $u(x,y)$ — функция, определённая равенством (39). Существует функция $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ такая, что*

$$\lim_{y\to\sigma-0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|u(x,y)-\psi(x)\right|^2dx = 0.$$

Доказательство. Пусть $0 < y' < y'' < \sigma$. Воспользуемся равенством Парсеваля:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|u(x,y'')-u(x,y')\right|^2dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\phi}(s)|^2[V(s,y'')-V(s,y')]^2\,ds.$$

В силу (37) функция $V(s,y)$ возрастает на полупрямой $y > 0$, поэтому

$$\left|V(s,y'')-V(s,y')\right|^2 \leqslant |V(s,\sigma)-V(s,y')|^2 \leqslant V^2(s,\sigma).$$

Согласно лемме 3 и теореме 3

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(s)|^2 V^2(s,\sigma)\,ds \leqslant C \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(s)|^2 \operatorname{ch}(2\sigma s)\,ds \leqslant C\|\phi\|_\sigma^2.$$

Таким образом, можно применить теорему Лебега [12, с. 155], из которой следует, что

$$\lim_{y'\to\sigma,\ y''\to\sigma} \|u(\cdot,y') - u(\cdot,y'')\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0.$$

Полнота пространства $L_2(\mathbb{R})$ влечёт существование функции ψ, удовлетворяющей условиям леммы.

Лемма 8. *Предположим, что функция $u(x,y)$ является решением задачи Коши (8), (9). Тогда её преобразование Фурье имеет вид (38).*

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ — решение уравнения (8), удовлетворяющее условиям (9) в смысле (6) и (7) с функцией $\psi\equiv 0$. Рассмотрим преобразование Фурье

$$\widehat{u}(s,y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)e^{-ixs}\,dx. \tag{44}$$

Принадлежность функции u и её производных классу Λ_h позволяет продифференцировать (44) под знаком интеграла. Отсюда следует, что функция $\widehat{u}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (27) и представима в виде

$$\widehat{u}(s,y) = A(s)V(s,y) + B(s)W(s,y), \quad s\in\mathbb{R}, \quad 0<y<h. \tag{45}$$

Здесь $V(s,y)$ — решение задачи Коши (33), (34), а функция $W(s,y)$ — решение задачи

$$W_{yy} + \frac{k'(y)}{k(y)}W_y - s^2W(s,y) = 0,$$

$$W(s,0)=0, \quad W_y(s,0)=1.$$

Преобразование Фурье производной $u_y(x,y)$ равно

$$\frac{\partial\widehat{u}}{\partial y}(s,y) = A(s)V'(s,y) + B(s)W'(s,y), \quad s\in\mathbb{R}, \quad 0<y<h. \tag{46}$$

Применяя равенство Парсеваля к (46), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_y(x,y)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |A(s)V'(s,y) + B(s)W'(s,y)|^2\,ds.$$

Согласно граничному условию (7), в котором следует положить $\chi=0$, выполняется равенство

$$\lim_{y\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} |u_y(x,y)|^2\,dx = 0,$$

следовательно, для любых чисел $a<b$

$$\lim_{y\to 0}\int_a^b |A(s)V'(s,y) + B(s)W'(s,y)|^2\,ds = 0.$$

В силу условия (34) $V'(s,y)\to 0$ при $y\to 0$, тогда

$$\int\limits_a^b |B(s)W'(s,y)|^2\,ds \leqslant \int\limits_a^b |A(s)V'(s,y)+B(s)W'(s,y)|^2\,ds + \int\limits_a^b |A(s)V'(s,y)|^2\,ds \to 0, \quad y\to 0.$$

С другой стороны, $W'(s,y)\to 1$ при $y\to 0$, поэтому

$$\int\limits_a^b |B(s)|^2\,ds = \lim_{y\to 0}\int\limits_a^b |B(s)W'(s,y)|^2\,ds = 0.$$

Отсюда получаем, что $B(s)\equiv 0$. Следовательно, равенство (45) принимает вид

$$\widehat{u}(s,y)=A(s)V(s,y), \quad s\in\mathbb{R}, \quad 0<y<h.$$

Далее в соответствии с граничным условием (6) мы можем, применяя равенство Парсеваля, записать

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(s)-A(s)V(s,y)|^2\,ds = 2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)-u(x,y)|^2\,dx \to 0, \quad y\to 0,$$

откуда, как и выше, следует $\widehat{\phi}(s)-A(s)V(s,0)=0$. Принимая во внимание условие $V(s,0)=1$, получаем требуемое равенство (38). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Существование решения предельной задачи Коши следует из лемм 5–7. Действительно, пусть $\phi\in A_\sigma$. Тогда функция u, определённая равенством (39), согласно лемме 5 является два раза непрерывно дифференцируемой в полосе S_σ^+, а прямое вычисление показывает, что она удовлетворяет уравнению (8) и граничным условиям (9).

Согласно лемме 6 функция u является решением задачи (8), (9) в смысле выполнения условий i)–iii). Что же касается условия (10), то существование функции ψ и выполнение соответствующего равенства гарантируется леммой 7.

Единственность решения следует непосредственно из леммы 8.

Доказательство теоремы 2. Пусть $u(x,y)$ — решение предельной задачи Коши (8), (9). Это означает, что функция u удовлетворяет условиям i)–iii) и существует функция $\psi\in L_2(\mathbb{R})$ такая, что выполняется равенство (10).

Согласно лемме 8 функция u имеет вид (39). В таком случае равенство (10) для неё может быть записано как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(s)V(s,y)-\widehat{\psi}(s)|^2\,ds \to 0, \quad y\to h.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(s)V(s,h)|^2\,ds = \|\psi\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Из этого равенства и из (40) получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}(s)|^2 e^{2h|s|}\,ds \leqslant C\|\psi\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Данная оценка, согласно следствию из теоремы 3, означает, что функция ϕ принадлежит классу A_σ при $\sigma=h$.

Пример. Функция

$$\phi(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)(p+\cos x)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad p > 1,$$

бесконечно дифференцируема и аналитична в каждой точке вещественной прямой, но принадлежит A_σ только при $\sigma < \mu$, где

$$\mu = \min\bigl\{a, \ln(p + \sqrt{p^2-1})\bigr\}.$$

Следовательно, предельная задача Коши с такой граничной функцией имеет решение в любой полосе ширины $h < \mu$, но не имеет решения при $h \geqslant \mu$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М. : Наука, 1966. — 724 с.
2. Hadamard, J. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations / J. Hadamard / New Haven : Yale University Press; London : Humphrey Milford; Oxford : University Press, 1923. — 316 p.
3. The stability for the Cauchy problem for elliptic equations / G. Alessandrini, L. Rondi, E. Rosset, S. Vessella. — arXiv:0907.2882v1[math.AP] 16 Jul 2009.
4. Лаврентьев, М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа / М.М. Лаврентьев. — Изв. АН СССР. Сер. математическая. — 1956. — Т. 20, № 6. — С. 819–842.
5. Мизохата, С. Теория уравнений с частными производными / С. Мизохата ; пер. с яп. Ю.В. Егорова ; под ред. О.А. Олейник. — М. : Мир, 1977. — 504 с.
6. Кальменов, Т.Ш. Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа / Т.Ш. Кальменов, У.А. Искакова // Дифференц. уравнения. — 2009. — Т. 45, № 10. — С. 1460–1466.
7. Kabanikhin, S.I. Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications / S.I. Kabanikhin. — Berlin; Boston : Springer, 2010. — 254 p.
8. Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems / A.N. Tikhonov, A.V. Goncharsky, V.V. Stepanov, A.G. Yagola. — Kluwer Academic Publishers, 1995. — 254 p.
9. Alimov, Sh.A. Determination of temperature at the outer boundary of a body / Sh.A. Alimov, A.K. Qudaybergenov // J. Math. Sci. — 2023. — V. 274, № 2. — P. 159–171.
10. Ильин, В.А. Спектральная теория дифференциальных операторов. Самосопряженные дифференциальные операторы / В.А. Ильин. — М. : Наука, 1991. — 366 с.
11. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.
12. Садовничий, В.А. Теория операторов. 5-е изд. / В.А. Садовничий. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2004. — 384 с.

ON THE DETERMINATION OF THE STATIONARY TEMPERATURE IN AN UNLIMITED STRIP

Sh. A. Alimov[1], A. K. Kudaybergenov[2]

[1]Branch of Lomonosov Moscow State University, Tashkent, Uzbekistan
[1,2]National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
e-mail: [1]sh_ alimov@mail.ru, [2]khudaybergenovallambergen@mail.ru

The problem of determining the stationary temperature at the upper boundary of the strip under known conditions at the lower boundary is considered. The existence and uniqueness of the solution to this problem are proved.

Keywords: elliptic equation, Cauchy problem, analytic function.

REFERENCES

1. Tikhonov, A.N. and Samarsky, A.A., *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics), Moscow: Nauka, 1966.
2. Hadamard, J., *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, New Haven: Yale University Press; London: Humphrey Milford; Oxford: University Press, 1923.
3. Alessandrini, G., Rondi, L., Rosset, E., and Vessella, S., *The stability for the Cauchy problem for elliptic equations*, arXiv:0907.2882v1[math.AP] 16 Jul 2009.
4. Lavrentyev, M.M., On the Cauchy problem for Laplace equation, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1956, vol. 20, no. 6, pp. 819–842.
5. Mizohata, S., *The Theory of Partial Differential Equations*, London: Cambridge University Press, 1973.
6. Kal'menov, T.Sh. and Iskakova, U.A., Criterion for the strong solvability of the mixed Cauchy problem for the Laplace equation, *Differ. Equat.*, 2009, vol. 45, no. 10, pp. 1460–1466.
7. Kabanikhin, S.I., *Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications*, Berlin; Boston: Springer, 2010.
8. Tikhonov, A.N., Goncharsky, A.V., Stepanov, V.V., and Yagola, A.G., *Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems*, Kluwer Academic Publishers, 1995.
9. Alimov, Sh.A. and Qudaybergenov, A.K., Determination of temperature at the outer boundary of a body, *J. Math. Sci.*, 2023, vol. 274, no. 2, pp. 159–171.
10. Il'in, V.A., *Spektral'naya teoriya differentsial'nykh operatorov. Samosopryazhennyye differentsial'nyye operatory* (Spectral Theory of Differential Operators, Self-Adjoint Differential Operators), Moscow: Nauka, 1991.
11. Naimark, M.A., *Lineynyye differentsial'nyye operatory* (Linear Differential Operators), 2nd ed., Moscow: Nauka, 1969.
12. Sadovnichiy, V.A., *Teoriya operatorov* (Operator Theory), 5th ed., Moscow: MSU Press, 2004.