

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925+517.93

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕПОДВИЖНОЙ
ТОЧКИ ОПЕРАТОРА, ПОРОЖДАЕМОГО МНОГОМЕРНОЙ
СИСТЕМОЙ С РЕЛЕЙНЫМ ГИСТЕРЕЗИСОМ

© А. М. Камачкин¹, В. В. Евстафьева², Д. К. Потапов³

Санкт-Петербургский государственный университет

e-mail: ¹a.kamachkin@spbu.ru, ²v.evstafieva@spbu.ru, ³d.potapov@spbu.ru

Поступила в редакцию 25.03.2024 г., после доработки 23.06.2024 г.; принята к публикации 02.07.2024 г.

Для многомерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с релейной нелинейностью гистерезисного типа в специальном виде аналитически вычислена неподвижная точка оператора, порождаемого этой системой. Предложены способы выбора вектора, определяющего в фазовом пространстве системы расположение поверхностей разрыва (поверхностей переключения), при котором существует единственная неподвижная точка на одной из этих поверхностей. Приведены примеры, демонстрирующие полученные теоретические результаты.

Ключевые слова: многомерная динамическая система, релейная нелинейность с гистерезисом, неподвижная точка, точка переключения, поверхность переключения, периодическое решение, клетка Жордана, семейство точечно-множественных отображений, итерационный процесс.

DOI: 10.31857/S0374064124080029, EDN: KDNHXQ

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье исследуется многомерная релейная динамическая система, не имеющая положений равновесия. В связи с этим если в динамике такой системы существуют периодические движения различных типов, то в фазовом пространстве им соответствуют замкнутые траектории с различным числом точек переключения. Для определения конфигураций фазовых траекторий необходимо, прежде всего, уметь определять точки переключения. Под *конфигурацией* будем понимать вид фазовой траектории и её расположение в пространстве.

Последние несколько лет нелинейные системы с обратной связью в форме двухпозиционного реле с гистерезисом изучались в ряде работ (см., например, [1–11]). В [1] исследовались динамика и синхронизация циклических структур осцилляторов. Проблема существования колебательных и периодических режимов рассматривалась в статьях [2, 3]. Двухточечно-колебательные решения (периодические колебательные решения с двумя точками переключения за период) изучались в работах [4–8]. В [9] доказана теорема об ограниченности периодических и непериодических решений, а также теоремы о непрерывной зависимости от параметров периодических решений систем. Работы [10, 11] посвящены исследованию свойств семейства операторов, порождённых исследуемой системой. В [10] получены условия существования и единственности неподвижной точки оператора, а также условия, при выполнении которых существуют одновременно неподвижные точки у различных типов отображений. В [11] установлено необходимое и достаточное условие существования единственной неподвижной точки для семейства операторов. Данная статья является продолжением наших работ [9–11].

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = AX + BF(\sigma). \quad (1)$$

Здесь X — вектор состояний системы, $X \in \mathbb{R}^n$; A — постоянная невырожденная квадратная матрица n -го порядка с вещественными элементами; B — постоянный ненулевой вектор из пространства $\mathbb{R}^n$ с вещественными элементами; $F(\sigma)$ — релейная нелинейность, где F — оператор, определяющий работу неидеального (гистерезисного) двухпозиционного реле с пороговыми значениями l_1, l_2 ($l_1 < l_2$) и значениями выхода m_1, m_2 ($m_1 < m_2$), $\sigma = (\Gamma, X)$ — скалярное произведение векторов Γ и X , Γ — ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$ с вещественными элементами (вектор обратной связи).

Функция $F(\sigma(t))$ определена при непрерывном входе $\sigma(t)$ для $t \geq 0$ в классе кусочно-непрерывных функций и задаётся в соответствии с [12] следующим образом: из неравенства $\sigma(t) \leq l_1$ следует равенство $F(\sigma(t)) = m_1$, из неравенства $\sigma(t) \geq l_2$ — равенство $F(\sigma(t)) = m_2$, а из неравенств $l_1 < \sigma(t) < l_2$ ($t_1 < t \leq t_2$) — равенство $F(\sigma(t_1)) = F(\sigma(t_2))$, т.е. $F(\sigma(t))$ принимает постоянное значение на отрезке $[t_1, t_2]$, если $F(\sigma(t_1)) = m_1$ и $\sigma(t) < l_2$ или $F(\sigma(t_1)) = m_2$ и $\sigma(t) > l_1$.

Петля гистерезиса на плоскости (σ, F) обходится против хода часовой стрелки (положительный или пассивный гистерезис [13, с. 49]).

Ниже приведём определения из работ [4, 8], которые используются в данной статье.

Определение 1. Точкой переключения называется состояние системы (1), при котором входная функция $\sigma(t)$ достигает одного из пороговых значений $l_i, i = 1, 2$, а выходная функция $F(\sigma(t))$ при этом меняет значение выхода m_1 на m_2 или наоборот.

Определение 2. Поверхностью (гиперплоскостью) переключения называется гиперплоскость $L_i = \{X \in \mathbb{R}^n : (\Gamma, X) = l_i\}, i = 1, 2$.

Определение 3. Если в некоторый момент времени t' изображающая точка принадлежит гиперплоскости $L_i, i = 1, 2$, то наименьший момент времени t'' ($t'' > t'$), в который изображающая точка принадлежит гиперплоскости L_{3-i} , назовём моментом первой встречи изображающей точки с гиперплоскостью L_{3-i} .

Фазовая траектория любого непрерывного решения системы (1) с точками переключения состоит из кусков траекторий в силу систем

$$\dot{X} = AX + Bm_1, \quad \dot{X} = AX + Bm_2, \quad (2)$$

“склеивание” которых происходит в точке переключения по непрерывности. Непрерывному T -периодическому решению системы (1) соответствует замкнутая фазовая траектория (периодическая орбита) с точкой переключения X_* , которая согласно определениям 1 и 2 удовлетворяет равенствам $X_* = X(t_0) = X(t_0 + T)$, $(\Gamma, X_*) = l_i, i = 1, 2$, где $t_0 \geq 0$ — начальный момент времени, $T > 0$ — период, за который изображающая точка решения возвращается в точку X_* .

Система (1) не имеет положений равновесия, если имеют место неравенства

$$-(\Gamma, A^{-1}Bm_2) < l_1, \quad -(\Gamma, A^{-1}Bm_1) > l_2. \quad (3)$$

Действительно, при выполнении (3) точка виртуальной устойчивости $X_i = -A^{-1}Bm_i, i = 1, 2$, полученная из (2) при условии $\dot{X} = 0$, находится за границами зоны неоднозначности релейной нелинейности $F(\sigma)$.

Будем рассматривать непрерывные T -периодические решения $X(t)$ с фазовыми траекториями, составленными из конечного числа кусков траекторий в силу систем (2); число этих кусков совпадает с числом точек переключения за период T . В силу решения системы (1) гиперплоскость L_i (или её подмножество), $i = 1, 2$, отображается в себя.

Пусть существует T -периодическое решение $X(t)$ с $2k$ ($k \in \mathbb{N}$) точками переключения $X^1, X^2, \dots, X^{2k}$ в фазовом пространстве системы (1) и следующим поведением. Изображающая точка решения начинает движение в точке X^1 на L_1 в момент времени t_0 и достигает L_2 в точке X^2 в момент времени t_1 в силу системы (2) с $m_i = m_1$, затем переходит на L_1 в точку X^3 в момент времени t_2 в силу (2) с $m_i = m_2$, далее достигает L_2 в точке X^4 в момент времени t_3 в силу (2) с $m_i = m_1$ и так продолжает движение от L_1 к L_2 и обратно k раз. В момент времени $t_{2k} = T$ изображающая точка возвращается на гиперплоскость L_1 в начальную точку X^1 в силу системы (2) с $m_i = m_2$.

Таким образом, $t_1, t_2, \dots, t_{2k}$ — моменты переключения реле, при этом согласно определению 3 $t_1, \dots, t_{2k-1}$ (с нечётными номерами) являются моментами первой встречи изображающей точки с L_2 после её ухода с гиперплоскости L_1 , а $t_2, \dots, t_{2k}$ (с чётными номерами) — моментами первой встречи с L_1 после ухода с L_2 .

Выпишем систему относительно точек и моментов переключения в соответствии с описанным выше поведением движения изображающей точки решения, используя форму Коши для аналитического представления решения:

$$\begin{aligned} (\Gamma, X^1) &= l_1, \quad X^2 = e^{A(t_1-t_0)} X^1 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B m_1 d\tau, \\ (\Gamma, X^2) &= l_2, \quad X^3 = e^{A(t_2-t_1)} X^2 + \int_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2-\tau)} B m_2 d\tau, \\ &\dots, \\ (\Gamma, X^{2k-1}) &= l_1, \quad X^{2k} = e^{A(t_{2k-1}-t_{2k-2})} X^{2k-1} + \int_{t_{2k-2}}^{t_{2k-1}} e^{A(t_{2k-1}-\tau)} B m_1 d\tau, \\ (\Gamma, X^{2k}) &= l_2, \quad X^{2k+1} = e^{A(t_{2k}-t_{2k-1})} X^{2k} + \int_{t_{2k-1}}^{t_{2k}} e^{A(t_{2k}-\tau)} B m_2 d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части. Тогда на гиперплоскости L_i существует выпуклое компактное множество Ω_i ($i = 1, 2$), которое в силу системы (1) отображается в себя (см. [9, 10]). Множество Ω_i является пересечением ограниченного замкнутого множества из $\mathbb{R}^n$ с гиперплоскостью L_i , а значит, это множество (из пространства $\mathbb{R}^{n-1}$) является компактным.

Система (4) для любого $k \in \mathbb{N}$ описывает процесс отображения множества $\Omega_1 \subset L_1$ в себя в силу систем (2). Аналогично можно построить процесс отображения множества $\Omega_2 \subset L_2$ в себя. При этом если $X^{2k+1} = X^1$, то $X^j \in \Omega_i$ ($j = \overline{1, 2k}, i = 1, 2$) принадлежит траектории T -периодического решения. Если $X^{2k+1} \neq X^1$, то $X^j \in \Omega_i$ ($j = \overline{1, 2k+1}$) не принадлежит траектории T -периодического решения с начальной точкой X^1 .

Обозначим оператор через P_2 , если отображение множества Ω_i ($i = 1, 2$) в себя в силу систем (2) имеет два перехода, через P_4 , если четыре перехода, и т.д. В результате получим семейство операторов $\mathcal{P} = \{P_{2k}\}_{k=1}^\infty$, каждый из которых соответствует отображению множества Ω_i в себя. Известно [10, 11], что семейство $\mathcal{P}$ различает точки и замкнутые множества. Если оператор P_{2k} имеет неподвижную точку, то существует периодическое решение системы (1) с $2k$ точками переключения в фазовом пространстве и периодом $T = t_{2k}$.

Задача состоит в том, чтобы установить условия, при выполнении которых система (1) имеет периодические решения, соответствующие операторам семейства $\mathcal{P}$, и получить формулы для вычисления неподвижных точек оператора P_2 .

2. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ОПЕРАТОРА P_2

В работе [10] найдены условия, при которых каждый из операторов семейства $\mathcal{P}$ имеет на множестве Ω_i ($i = 1, 2$) по крайней мере одну неподвижную точку. Установлено также, когда оператор P_2 имеет единственную неподвижную точку на множестве Ω_i . Справедлива

Теорема 1 [10, теорема 2, следствие 1]. *Пусть система (1) удовлетворяет предположениям, сделанным относительно её правой части, собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части, $b = (\Gamma, B) \neq 0$ и выполнены неравенства (3). Тогда оператор P_2 имеет хотя бы одну неподвижную точку. Если дополнительно выполнено равенство*

$$A^T \Gamma = \lambda \Gamma, \quad (5)$$

где t — операция транспонирования, Γ — собственный вектор матрицы A^T , который отвечает вещественному собственному числу λ матрицы A , то оператор P_2 имеет единственную неподвижную точку, которой соответствует орбитально асимптотически устойчивая замкнутая фазовая траектория, состоящая из двух кусков в силу разных систем (2), с областью притяжения, совпадающей со всем фазовым пространством.

Геометрический смысл теоремы 1 заключается в следующем: по любому направлению, ортогональному вектору Γ (т.е. на гиперплоскости $(\Gamma, X) = l_i$), имеет место сжатие вдоль любой траектории, в том числе вдоль траектории периодического решения.

Перечислим ниже некоторые свойства решений системы (1), которые используются в дальнейшем.

В работе [9] установлено, что изображающая точка любого решения системы (1) с точками переключения в фазовом пространстве за конечное время попадает и остаётся в ограниченной области этого пространства, т.е. оператор P_{2k} отображает множество Ω_i в себя для любого k . В случае существования периодического решения с $2k$ изолированными точками переключения в фазовом пространстве доказано, что при $b \neq 0$ эти точки локально непрерывно зависят от параметров A , B , Γ , l_1 , l_2 , m_1 и m_2 . Точка переключения является изолированной в том смысле, что в её окрестности не существует точек переключения других периодических орбит. Кроме того, если $b \neq 0$, то в точке переключения траектория решения одновременно (при подходе к поверхности переключения и уходе с неё) не касается поверхности переключения. В статье [10] отмечено, что если точка касания принадлежит множеству Ω_i , то это множество может быть заменено его подмножеством, не содержащим точку касания. Это подмножество сохраняет свойства связности, выпуклости и компактности множества Ω_i . Поэтому далее полагаем, что Ω_i не содержит точку касания и выполняется условие $b \neq 0$.

Таким образом, из теоремы 1 и свойств решений следует, что динамика системы (1) существенно зависит от выбора вектора обратной связи Γ , который определяет в фазовом пространстве расположение поверхностей переключения. Вектор Γ влияет на количество неподвижных точек операторов семейства $\mathcal{P}$ и конфигурацию траекторий, которые могут как принадлежать зоне неоднозначности релейной нелинейности $F(\sigma)$, так и выходить за границы этой зоны.

3. СПОСОБЫ ВЫБОРА ВЕКТОРА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ Γ

Согласно теореме 1 если $b \neq 0$, выполнены неравенства (3) и равенство (5), где вещественное собственное число $\lambda < 0$ (по условию теоремы 1 все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части), то имеет место утверждение теоремы 1 о единственности неподвижной точки.

Условие $b \neq 0$ можно обеспечить за счёт выбора вектора B , неравенства (3) — за счёт выбора параметров нелинейности l_1, l_2, m_1 и m_2 . Ставится следующая задача: найти вектор Γ , удовлетворяющий равенству (5). Отметим, что число λ может быть простым или кратным. Ниже рассмотрим способ выбора вектора Γ в зависимости от собственного числа λ .

Способ 1. Пусть λ — простое собственное число. Обозначим его через λ_s , где s — некоторый индекс. Из непосредственного разрешения (5) относительно переменных $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ (элементов вектора Γ) получим вектор Γ с одним ненулевым элементом γ_s и остальными нулевыми элементами (см., например, [4, 7]). В этом случае поверхности переключения ориентируются ортогонально оси Ox_s в фазовом пространстве.

Способ 2. Пусть λ — собственное число кратности m ($m \leq n$). Положим $X = SY$, где S — некоторая невырожденная матрица такая, что $S^{-1}AS = A_j$. Здесь и далее A_j — это жорданова форма матрицы A . Тогда система (1) после преобразования с матрицей S примет вид

$$\dot{Y} = A_j Y + S^{-1}BF(\sigma), \quad \sigma = (S^T \Gamma, Y).$$

Пусть $S_1, S_2, \dots, S_n$ — линейно независимые вектор-столбцы матрицы $S = (S_1 \ S_2 \ \dots \ S_n)$, т.е. $\det S \neq 0$. Известно [14, с. 460], что существует клетка Жордана порядка m , связанная с собственным числом λ матрицы A лишь в том случае, если m линейно независимых векторов $S_1, S_2, \dots, S_m$ удовлетворяют равенствам

$$AS_1 = \lambda S_1, \quad AS_2 = \lambda S_2 + S_1, \quad \dots, \quad AS_m = \lambda S_m + S_{m-1}. \quad (6)$$

Далее воспользуемся этим фактом и построим новую невырожденную матрицу $\tilde{S}$ такую, что $\tilde{S}^{-1}A\tilde{S} = A_j$ и выполняется равенство

$$A_j^T \tilde{\Gamma} = \lambda \tilde{\Gamma}, \quad (7)$$

где $\tilde{\Gamma} = \tilde{S}^T \Gamma$. Отсюда находим вектор Γ по формуле

$$\Gamma = (\tilde{S}^T)^{-1} \tilde{\Gamma}. \quad (8)$$

Поскольку $A^T = (\tilde{S}^T)^{-1} A_j^T \tilde{S}^T$, то Γ удовлетворяет равенству (5).

Оба способа выбора вектора Γ продемонстрируем на примере.

Пример 1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\lambda_{1,2} = -4 < 0$ и $\lambda_3 = -2 < 0$ являются собственными числами матрицы A .

Способ 1. Пусть $\lambda_3 = \lambda$. Разрешив непосредственно (5), получим ненулевой вектор $\Gamma = (0, 0, \gamma_3)^T$, где $\gamma_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Здесь вектор Γ задаёт ортогональное расположение поверхностей переключения относительно оси Ox_3 . В этом случае траектория решения не выходит за границы зоны неоднозначности релейной нелинейности [15, с. 30]. Заметим, что условие $b \neq 0$ выполняется при любых $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ и $b_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, где b_1, b_2, b_3 — элементы вектора B .

Способ 2. Пусть $\lambda_{1,2} = \lambda$. Для приведения матрицы A к жордановой форме

$$A_j = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

подходит матрица

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{11} & s_{22} & s_{23} \\ 0 & 0 & -s_{23} \end{pmatrix}$$

с $s_{11} \neq 0$, $s_{23} \neq 0$ и $s_{12} \neq s_{22}$.

Приведём матрицу A к виду A_j с помощью, например, матрицы преобразования

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1.5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det S = 0.5 \neq 0.$$

Вектор-столбцы $S_1 = (1, 1, 0)^T$, $S_2 = (1, 1.5, 0)^T$ и $S_3 = (0, -1, 1)^T$, составляющие матрицу S , линейно независимые.

Первое равенство $AS_1 = \lambda S_1$ из (6) выполняется, т.е. S_1 — собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному числу $\lambda = -4$. Рассмотрим второе равенство из (6), а именно

$$AS_2 = \lambda S_2 + S_1. \quad (9)$$

Подставим вектор S_1 в (9) и полученное равенство рассмотрим как систему линейных алгебраических уравнений относительно переменных s_{12} , s_{22} и s_{32} (элементов вектора S_2). Системе (9) удовлетворяют значения $s_{12} = 1$, $s_{22} = 1.5$ и $s_{32} = 0$, т.е. элементы вектор-столбца S_2 матрицы S . Общим решением системы (9) является вектор $\tilde{S}_2 = (s_{12}, 0.5(1 + 2s_{12}), 0)^T$, где переменная s_{12} может быть выбрана произвольно. Нетрудно проверить, что векторы S_1 , $\tilde{S}_2$ и S_3 линейно независимы. Вектор $\tilde{S}_2$ неоднозначен в силу произвольности выбора s_{12} . Подберём такое значение s_{12} , чтобы выполнялось равенство $A_j^T \tilde{S}_2 = \lambda \tilde{S}_2$ (аналогичное равенству (7)). Имеем

$$A_j^T \tilde{S}_2 = \begin{pmatrix} -4s_{12} \\ s_{12} - 2(1 + 2s_{12}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \tilde{S}_2 = \begin{pmatrix} -4s_{12} \\ -2(1 + 2s_{12}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Равенства первой и третьей строк — это тождества, а из равенства второй строки следует, что $s_{12} = 0$, т.е. $\tilde{S}_2 = (0, 0.5, 0)^T$.

Получим новую матрицу

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (S_1 \ \tilde{S}_2 \ S_3), \quad \det \tilde{S} = 0.5 \neq 0,$$

с линейно независимыми столбцами. Отметим, что преобразования с матрицами S и $\tilde{S}$ приводят к одной и той же жордановой форме A_j . Таким образом, векторы, составляющие матрицы S и $\tilde{S}$, являются векторами базиса, в котором $A = A_j$ и выполняется равенство $A_j^T \tilde{S}_2 = \lambda \tilde{S}_2$. Отсюда в силу (7) имеем $\tilde{\Gamma} = \tilde{S}_2$.

Вектор $\Gamma = (-1, 1, 1)^T$, вычисленный по формуле (8), удовлетворяет равенству (5). Действительно, $A^T \Gamma = (4, -4, -4)^T = -4\Gamma$. Следовательно, Γ — собственный вектор матрицы A^T , отвечающий $\lambda = -4$. Заметим, что условие $b \neq 0$ выполняется, если элементы вектора B удовлетворяют неравенству $-b_1 + b_2 + b_3 \neq 0$.

Замечание 1. В примере 1 клетка Жордана имеет порядок $m = 2$, поэтому для построения матрицы $\tilde{S}$ и вычисления вектора Γ использованы два равенства из (6). В случае если $m > 2$ проводятся аналогичные рассуждения с большим числом равенств из (6), что расширяет выбор вектора Γ .

Замечание 2. В примере 1, разрешив непосредственно систему $A^T \Gamma = -4\Gamma$, получим $\Gamma = (\gamma_1, -\gamma_1, -\gamma_1)^T$, где $\gamma_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. При $\gamma_1 = -1$ имеем найденный в примере 1 вектор Γ .

4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ ОПЕРАТОРА P_2

Имеет место

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, причём $\lambda < 0$, $b < 0$, дополнительно $t_0 = 0$ и имеют место неравенства

$$-\frac{bm_2}{\lambda} < l_1 < l_2 < -\frac{bm_1}{\lambda}. \quad (10)$$

Тогда времена перехода t_1 и $t_2 - t_1$ из Ω_1 в Ω_2 и из Ω_2 в Ω_1 определяются соответственно как

$$t_1 = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda l_2 + bm_1}{\lambda l_1 + bm_1}, \quad t_2 - t_1 = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda l_1 + bm_2}{\lambda l_2 + bm_2}, \quad (11)$$

а неподвижная точка $X_*^1 \in \Omega_1 \subset L_1$ оператора P_2 вычисляется по формуле

$$X_*^1 = (E - e^{AT})^{-1} (e^{A(t_2-t_1)} A^{-1} (e^{At_1} - E) B m_1 + A^{-1} (e^{A(t_2-t_1)} - E) B m_2), \quad (12)$$

где E — единичная матрица n -го порядка, $T = t_2$.

Доказательство. Пусть справедливы условия теоремы 1. Тогда на компактном множестве Ω_1 (или Ω_2) оператор $P_2 \in \mathcal{P}$ имеет единственную неподвижную точку, которой соответствует замкнутая траектория.

Из (4) выпишем систему с двумя переходами, которая определяет оператор P_2 . Для начальной точки $X^1 \in \Omega_1$ и начального момента времени $t_0 = 0$ имеем

$$\begin{aligned} X^2 &= e^{At_1} X^1 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B m_1 d\tau, \quad (\Gamma, X^1) = l_1, \\ X^1 &= e^{A(t_2-t_1)} X^2 + \int_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2-\tau)} B m_2 d\tau, \quad (\Gamma, X^2) = l_2, \end{aligned} \quad (13)$$

где t_1 и t_2 — моменты первой встречи с L_2 и L_1 соответственно, $t_2 = T$, точки X^1 , X^2 принадлежат замкнутой траектории T -периодического решения.

Для любого решения $X(t)$ системы (1) независимо от начальной точки на множестве Ω_1 время перехода t_1 из Ω_1 в Ω_2 такое же, как и время перехода $t_2 - t_1$ из Ω_2 в Ω_1 , т.е. для любой начальной точки $X(0) \in \Omega_1$ сумма $T = t_1 + (t_2 - t_1) = t_2$ является постоянной величиной. Действительно, если выполнено равенство (5), то приходим к дифференциальному уравнению относительно функции $\sigma(t) = (\Gamma, X(t))$ следующего вида:

$$\dot{\sigma}(t) = \lambda \sigma(t) + bF(\sigma(t)). \quad (14)$$

Решив задачу Коши для уравнения (14) с начальным условием $\sigma(0) = l_1$ на интервале $[0, t_1)$, начальным условием $\sigma(t_1) = l_2$ на интервале $[t_1, t_2)$ и с учётом равенства $\sigma(t_2) = l_1$, получим для времён перехода формулы (11), имеющие смысл при выполнении неравенств (10) в условии теоремы 2 (см. [16, с. 564–565]).

Введём обозначения

$$I_1 = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B m_1 d\tau, \quad I_2 = \int_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2-\tau)} B m_2 d\tau.$$

Множество Ω_1 , содержащее начальную точку X^1 , и значения t_1, t_2 известны. Поэтому, используя представление (13) с учётом введённых обозначений, далее построим итерационный процесс для нахождения единственной неподвижной точки. Вообще операторы семейства $\mathcal{P}$ представляют собой семейство точечно-множественных отображений компактного множества Ω_1 в себя, и поэтому оператор P_2 обеспечивает стандартный итерационный процесс отображения выпуклого компактного множества Ω_1 в себя (определение стандартного процесса см. в [17, с. 47]).

Пусть $X_{(1)}^1 \in \Omega_1$ является начальной точкой, где номер в скобках означает порядковый номер итерации. Тогда первая итерация описывается равенствами

$$\begin{aligned} X_{(1)}^2 &= e^{At_1} X_{(1)}^1 + I_1, & X_{(1)}^2 &\in \Omega_2, \\ X_{(2)}^1 &= e^{A(t_2-t_1)} X_{(1)}^2 + I_2, & X_{(2)}^1 &\in \Omega_1. \end{aligned} \quad (15)$$

Точка $X_{(2)}^1$ является начальной для второй итерации. Выразим $X_{(2)}^1$ через $X_{(1)}^1$, подставив выражение для $X_{(1)}^2$ из первого равенства системы (15) во второе:

$$X_{(2)}^1 = e^{AT} X_{(1)}^1 + e^{A(t_2-t_1)} I_1 + I_2.$$

Вторая итерация с учётом последнего равенства описывается равенствами

$$\begin{aligned} X_{(2)}^2 &= e^{At_1} X_{(2)}^1 + I_1 = e^{AT} e^{At_1} X_{(1)}^1 + e^{AT} I_1 + e^{At_1} I_2 + I_1, & X_{(2)}^2 &\in \Omega_2, \\ X_{(3)}^1 &= e^{A(t_2-t_1)} X_{(2)}^2 + I_2 = e^{AT} X_{(2)}^1 + e^{A(t_2-t_1)} I_1 + I_2, & X_{(3)}^1 &\in \Omega_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Точка $X_{(3)}^1$ — начальная точка для третьей итерации. Выразим $X_{(3)}^1$ через $X_{(1)}^1$:

$$X_{(3)}^1 = e^{2AT} X_{(1)}^1 + e^{A(t_2-t_1)} e^{AT} I_1 + e^{AT} I_2 + e^{A(t_2-t_1)} I_1 + I_2.$$

Данный процесс можно продолжить и получить последовательность точек переключения $\{X_{(k)}^1\}_{k=1}^\infty \in \Omega_1 \subset L_1$. Выпишем формулы для $X_{(k)}^1$ и $X_{(k+1)}^1$:

$$\begin{aligned} X_{(k)}^1 &= e^{(k-1)AT} X_{(1)}^1 + e^{A(t_2-t_1)} e^{(k-2)AT} I_1 + e^{(k-2)AT} I_2 + \dots + e^{A(t_2-t_1)} e^{AT} I_1 + e^{AT} I_2 + e^{A(t_2-t_1)} I_1 + I_2, \\ X_{(k+1)}^1 &= e^{AT} X_{(k)}^1 + e^{A(t_2-t_1)} I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогично строится последовательность точек переключения $\{X_{(k)}^2\}_{k=1}^\infty \in \Omega_2 \subset L_2$.

Сумма двух последних слагаемых в формулах (17) является постоянной величиной, которую обозначим через C , т.е.

$$C = e^{A(t_2-t_1)} I_1 + I_2 = e^{A(t_2-t_1)} \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B m_1 d\tau + \int_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2-\tau)} B m_2 d\tau. \quad (18)$$

Пусть $X_{(1)}^1$ и $\tilde{X}_{(1)}^1$ из множества Ω_1 являются начальными точками. Тогда, исходя из соотношений (17), получим равенство

$$\|X_{(k+1)}^1 - \tilde{X}_{(k+1)}^1\| = \|e^{kAT}\| \|X_{(1)}^1 - \tilde{X}_{(1)}^1\|.$$

По теореме 1 вещественная часть $\operatorname{Re} \lambda_i$ собственного числа λ_i матрицы A отрицательна. Пусть $\alpha = \max_{i=1, \dots, n} \operatorname{Re} \lambda_i$, тогда $\alpha < 0$. Согласно [14, с. 57] справедлива оценка $\|e^{At}\| \leq c e^{\alpha t}$ при $t \geq 0$, где c — положительная константа. Отсюда следует неравенство

$$\|X_{(k+1)}^1 - \tilde{X}_{(k+1)}^1\| \leq c e^{\alpha kT} \|X_{(1)}^1 - \tilde{X}_{(1)}^1\|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Величина $\|X_{(1)}^1 - \tilde{X}_{(1)}^1\|$ ограничена, так как не превосходит $\sup_{X_1, X_2 \in \Omega_1} \|X_1 - X_2\|$; $ce^{\alpha kT} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. Значит $\|X_{(k+1)}^1 - \tilde{X}_{(k+1)}^1\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$, т.е. итерационный процесс сходится.

Рассмотрим второе равенство из (17), а именно $X_{(k+1)}^1 = e^{AT} X_{(k)}^1 + C$. Итерационный процесс сходится к неподвижной точке $X_*^1 \in \Omega_1 \subset L_1$ (т.е. $\|X_{(k)}^1 - X_*^1\| \rightarrow 0$) тогда и только тогда, когда $\|X_{(k+1)}^1 - X_{(k)}^1\| = \|(e^{AT} - E)X_{(k)}^1 + C\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$, откуда $X_*^1 = (E - e^{AT})^{-1}C$.

После интегрирования выражений в равенстве (18) получим для неподвижной точки $X_*^1 \in \Omega_1$ оператора P_2 формулу (12). Теорема доказана.

Замечание 3. Формулу для вычисления неподвижной точки $X_*^2 \in \Omega_2 \subset L_2$ можно получить аналогично.

Далее пусть X, Y — топологические пространства. Приведём определения из [18, с. 24].

Определение 4. Гомотопией или деформацией из X в Y называется непрерывное отображение $\Theta: X \times [0, 1] \rightarrow Y$, т.е. для каждого $\nu \in [0, 1]$ отображение $\Theta_\nu: X \rightarrow Y$, $\Theta_\nu(x) = \Theta(x, \nu)$, является непрерывным. Однопараметрическое семейство $\{\Theta_\nu\}_{0 \leq \nu \leq 1}$ также называется гомотопией или деформацией.

Определение 5. Два непрерывных отображения $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ называются гомотопными, если существует деформация $\{\Theta_\nu: X \rightarrow Y\}_{0 \leq \nu \leq 1}$ такая, что $f_0 = \Theta_0$ и $f_1 = \Theta_1$.

Справедливо

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда любой оператор семейства $\mathcal{P} = \{P_{2k}\}$ при $k > 1$ имеет единственную неподвижную точку, которая совпадает с неподвижной точкой $X_*^1 \in \Omega_1$ оператора P_2 .

Доказательство. В работе [11] показано, что семейство операторов $\mathcal{P}$ имеет единственную неподвижную точку тогда и только тогда, когда для $n \geq 3$ выполняется условие

$$\Lambda(P_2) = 1 + (-1)^{n-2} \text{sign } J_{P_2}(X_{\text{fp}}) = 0,$$

где X_{fp} — неподвижная точка оператора P_2 , $J_{P_2}(X_{\text{fp}})$ — якобиан отображения P_2 , вычисленный в точке X_{fp} .

Для точки $X_{\text{fp}} = X_*^1$, определяемой по формуле (12), выполняется равенство $\Lambda(P_2) = 0$ (см. [19, с. 252, 255]), что геометрически в условиях теоремы 1 означает следующее: на множестве Ω_1 существует непрерывное касательное к траекториям векторное поле, нигде не обращающееся в нуль. При этом якобиан $J_{P_2}(X)$ отличен от нуля, непрерывен и не меняет свой знак на множестве Ω_1 , поскольку это множество связное и замкнутое.

Покажем гомотопность семейства $\mathcal{P}$. Для отображения P_2 при t_1 и $t_2 = T$ (одних и тех же для всех переходов) из (15) получим

$$X_{(2)}^1 = e^{A(T-t_1)}(e^{At_1} X_{(1)}^1 + I_1) + I_2,$$

а для отображения P_4 из (16) имеем

$$X_{(3)}^1 = e^{A(T-t_1)}(e^{At_1} X_{(2)}^1 + I_1) + I_2,$$

где $X_{(1)}^1, X_{(2)}^1 \in \Omega_1$, при этом точка $X_{(1)}^1$ произвольная. Определим теперь деформацию (или гомотопию) относительно Ω_1 . Положим $X_{(2)}^1 = f_0$ и $X_{(3)}^1 = f_1$. Функции f_0 и f_1 определены на множестве Ω_1 . Зададим $\{\Theta_\nu: \Omega_1 \rightarrow \Omega_1\}_{0 \leq \nu \leq 1}$ равенством $\Theta_\nu = (1 - \nu)f_0 + \nu f_1$. Имеем $\Theta_0 = f_0$ и $\Theta_1 = f_1$. Следовательно, непрерывные отображения P_2 и P_4 являются гомотопными. Аналогичное утверждение можно получить для отображений P_4 и P_6 и т.д. для всего семейства $\mathcal{P}$.

Итак, все операторы семейства $\mathcal{P}$ — гомотопные между собой отображения, поэтому степень отображения определена и одинакова для любого отображения из семейства $\mathcal{P}$ [20,

с. 94–95]. В частности, все отображения из $\mathcal{P}$ удовлетворяют теореме Брауэра о неподвижной точке (см. [19, с. 255]). Значит, степень отображения P_2 является инвариантом класса гомотопных между собой отображений P_{2k} , $k \geq 1$. Отсюда следует единственность неподвижной точки $X_*^1 \in \Omega_1$ для семейства $\mathcal{P}$. Следствие доказано.

Приведём пример, иллюстрирующий основной теоретический результат.

Пример 2. Рассмотрим

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Gamma = (-1, 1, 1)^T$$

из примера 1. Положим $B = (2, 0, 0)^T$, $l_1 = 0.01$, $l_2 = 0.2$, $m_1 = -2$ и $m_2 = 0$. Отметим, что петля гистерезиса несимметричная.

Собственные числа $\lambda_{1,2} = -4$, $\lambda_3 = -2$ матрицы A являются вещественными и отрицательными. Имеем $b = -2 \neq 0$. Справедливы неравенства (3), поскольку $-(\Gamma, A^{-1}Bm_2) = 0 < l_1$, $-(\Gamma, A^{-1}Bm_1) = 1 > l_2$. Равенство (5) выполняется для $\lambda = -4$ (см. пример 1). Таким образом, выполнены условия теоремы 1, причём $\lambda < 0$, $b < 0$. Имеем $-bm_2/\lambda = 0$, $-bm_1/\lambda = 1$, откуда получим $0 < 0.01 < 0.2 < 1$, т.е. выполнены неравенства (10) в теореме 2.

Рассмотрим матрицу неособого преобразования

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

из примера 1. Получим матрицу

$$A_j = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

вычисленную по формуле $A_j = \tilde{S}^{-1}A\tilde{S}$. Поскольку A_j — жорданова форма матрицы A , то $e^{At} = \tilde{S}e^{A_j t}\tilde{S}^{-1}$ [14, с. 56]. Итак,

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-4t} & te^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (1-2t)e^{-4t} & 2te^{-4t} & 2te^{-4t} \\ -2te^{-4t} & (1+2t)e^{-4t} & (1+2t)e^{-4t} - e^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Далее расчёты выполнены с точностью до 10^{-9} , полученные результаты представлены с округлением до тысячных. По формулам (11) находим $t_1 = 0.053$ и $t_2 - t_1 = 0.749$, откуда $T = 0.802$. После подстановки значений в (12) получим неподвижную точку X_*^1 оператора P_2 . Имеем $X_*^1 = (0.006, 0.016, 0)^T$ и $(\Gamma, X_*^1) = 0.01 = l_1$, значит $X_*^1 \in \Omega_1 \subset L_1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе доказанного ранее утверждения (теорема 1), что орбитально асимптотически устойчивой замкнутой траектории с двумя точками переключения в фазовом пространстве

соответствует единственная неподвижная точка оператора, порождаемого исследуемой системой для двух переходов за некоторое время T при определённых условиях на вектор обратной связи, получены результаты данной работы. Предложены способы выбора вектора обратной связи, которые иллюстрируются на примере 1. Установлены условия существования неподвижной точки и получена формула для её вычисления (теорема 2). Доказано, что найденная неподвижная точка является единственной для любого оператора из порождённого семейства (следствие). Пример 2 подтверждает конструктивность теоремы 2 и демонстрирует её применение.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00069).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Камачкин, А.М. Динамика и синхронизация циклических структур осцилляторов с гистерезисной обратной связью / А.М. Камачкин, Д.К. Потапов, В.В. Евстафьева // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. — 2020. — Т. 16, № 2. — С. 186–199.
2. О существовании колебательных режимов в одной нелинейной системе с гистерезисами / А.С. Фурсов, Т.С. Тодоров, П.А. Крылов, Р.П. Митрев // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 8. — С. 1103–1121.
3. О существовании периодического режима в одной нелинейной системе / А.С. Фурсов, Р.П. Митрев, П.А. Крылов, Т.С. Тодоров // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 8. — С. 1104–1115.
4. Евстафьева, В.В. О существовании двухточечно-колебательных решений возмущённой релейной системы с гистерезисом / В.В. Евстафьева // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 2. — С. 169–178.
5. Евстафьева, В.В. Существование T/k -периодических решений нелинейной неавтономной системы с кратным собственным числом матрицы / В.В. Евстафьева // Мат. заметки. — 2021. — Т. 109, № 4. — С. 529–543.
6. Євстаф'єва, В.В. Існування двоточково-коливних розв'язків релейної неавтономної системи з кратним власним числом дійсної симетричної матриці / В.В. Євстаф'єва // Укр. мат. журн. — 2021. — Т. 73, № 5. — С. 640–650.
7. Евстафьева, В.В. Синтез управления возмущённой системой с неоднозначной нелинейностью / В.В. Евстафьева // Автоматика и телемеханика. — 2023. — № 3. — С. 44–64.
8. Евстафьева, В.В. Критерий существования двухточечно-колебательного решения возмущённой системы с реле / В.В. Евстафьева // Мат. заметки. — 2023. — Т. 114, № 2. — С. 260–273.
9. Kamachkin, A.M. Continuous dependence on parameters and boundedness of solutions to a hysteresis system / A.M. Kamachkin, D.K. Potapov, V.V. Yevstafyeva // Appl. Math. — 2022. — V. 67, № 1. — P. 65–80.
10. Камачкин, А.М. Неподвижные точки отображения, порождённого системой обыкновенных дифференциальных уравнений с релейным гистерезисом / А.М. Камачкин, Д.К. Потапов, В.В. Евстафьева // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 4. — С. 456–469.
11. Камачкин, А.М. Существование единственной неподвижной точки отображений, порождённых многомерной системой с релейным гистерезисом / А.М. Камачкин, В.В. Евстафьева, Д.К. Потапов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 7. — С. 996–1000.
12. Покровский, А.В. Существование и расчёт устойчивых режимов в релейных системах / А.В. Покровский // Автоматика и телемеханика. — 1986. — № 4. — С. 16–23.
13. Цыпкин, Я.З. Релейные автоматические системы / Я.З. Цыпкин. — М. : Наука, 1974. — 575 с.

14. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. — М. : Наука, 1967. — 472 с.
15. Точные методы исследования нелинейных систем автоматического управления / В.М. Кунцевич, А.М. Лётов, Б.Н. Наумов [и др.]. — М. : Машиностроение, 1971. — 322 с.
16. Зубов, В.И. Колебания в нелинейных и управляемых системах / В.И. Зубов. — Л. : Судпромгиз, 1962. — 631 с.
17. Итеративные методы в теории игр и программировании / В.З. Беленький, В.А. Волконский, С.А. Иванков [и др.]. — М. : Наука, 1974. — 239 с.
18. Дольд, А. Лекции по алгебраической топологии / А. Дольд. — М. : Мир, 1976. — 463 с.
19. Спеньер, Э. Алгебраическая топология / Э. Спеньер. — М. : Мир, 1971. — 680 с.
20. Понтрягин, Л.С. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий / Л.С. Понтрягин. — М. : Наука, 1976. — 174 с.

ANALYTICAL CALCULATION OF FIXED POINT OF OPERATOR GENERATED BY MULTIDIMENSIONAL SYSTEM WITH RELAY HYSTERESIS

A. M. Kamachkin¹, V. V. Yevstafyeva², D. K. Potapov³

Saint Petersburg State University, Russia

e-mail: ¹a.kamachkin@spbu.ru, ²v.evstafieva@spbu.ru, ³d.potapov@spbu.ru

We consider a multidimensional system of ordinary differential equations with relay nonlinearity of a hysteresis type in a special form that has made it possible to analytically calculate the fixed point of the operator generated by this system. We propose procedures for selecting a vector defining the location of discontinuity surface (switch surfaces) in the phase space such that there exists a unique fixed point on one of these surfaces. Examples representing the obtained theoretical results are given.

Keywords: multidimensional dynamical system, relay nonlinearity with hysteresis, fixed point, switch point, switch surface, periodic solution, Jordan block, family of point-multiple mappings, iterative process.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00069).

REFERENCES

1. Kamachkin, A.M., Potapov, D.K., and Yevstafyeva, V.V., Dynamics and synchronization in feedback cyclic structures with hysteresis oscillators, *Vestn. S.-Peterb. Univ. Prikl. Mat. Inf. Protsess. Upr.*, 2020, vol. 16, no. 2, pp. 186–199.
2. Fursov, A.S., Todorov, T.S., Krylov, P.A., and Mitrev, R.P., On the existence of oscillatory modes in a nonlinear system with hystereses, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 8, pp. 1081–1099.
3. Fursov, A.S., Mitrev, R.P., Krylov, P.A., and Todorov, T.S., On the existence of a periodic mode in a nonlinear system, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 8, pp. 1076–1087.
4. Yevstafyeva, V.V., On the existence of two-point oscillatory solutions of a perturbed relay system with hysteresis, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 155–164.
5. Yevstafyeva, V.V., Existence of T/k -periodic solutions of a nonlinear nonautonomous system whose matrix has a multiple eigenvalue, *Math. Notes*, 2021, vol. 109, no. 4, pp. 551–562.
6. Yevstafyeva, V.V., Existence of two-point oscillatory solutions of a relay nonautonomous system with multiple eigenvalue of a real symmetric matrix, *Ukr. Math. J.*, 2021, vol. 73, no. 5, pp. 746–757.
7. Yevstafyeva, V.V., Control design for a perturbed system with an ambiguous nonlinearity, *Autom. Remote Control*, 2023, vol. 84, no. 3, pp. 254–269.
8. Yevstafyeva, V.V., Criterion for the existence of two-point oscillatory solution of a perturbed system with a relay, *Math. Notes*, 2023, vol. 114, no. 2, pp. 212–222.

9. Kamachkin, A.M., Potapov, D.K., and Yevstafyeva, V.V., Continuous dependence on parameters and boundedness of solutions to a hysteresis system, *Appl. Math.*, 2022, vol. 67, no. 1, pp. 65–80.
10. Kamachkin, A.M., Potapov, D.K., and Yevstafyeva, V.V., Fixed points of a mapping generated by a system of ordinary differential equations with relay hysteresis, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 4, pp. 455–467.
11. Kamachkin, A.M., Yevstafyeva, V.V., and Potapov, D.K., The existence of a unique fixed point of mappings generated by a multidimensional system with relay hysteresis, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 7, pp. 998–1002.
12. Pokrovskii, A.V., Existence and computation of stable modes in relay systems, *Autom. Remote Control*, 1986, vol. 47, no. 4, pp. 451–458.
13. Tsypkin, Ya.Z., *Releinye avtomaticheskie sistemy* (Relay Automatic Systems), Moscow: Nauka, 1974.
14. Demidovich, B.P., *Lektsii po matematicheskoi teorii upravleniya* (Lectures on Mathematical Stability Theory), Moscow: Nauka, 1967.
15. Kuntsevich, V.M., Letov, A.M., Naumov, B.N. [et al.], *Tochnye metody issledovaniya nelineinykh sistem avtomaticheskogo upravleniya* (Exact Analysis Methods for Nonlinear Automatic Control Systems), Moscow: Mashinostroenie, 1971.
16. Zubov, V.I., *Kolebaniya v nelineinykh i upravlyaemykh sistemakh* (Oscillations in Nonlinear and Controlled Systems), Leningrad: Sudpromgiz, 1962.
17. Belenkii, V.Z., Volkonskii, V.A., Ivankov, S.A. [et al.], *Iterativnye metody v teorii igr i programmirovanii* (Iterative Methods in Games Theory and Programming), Moscow: Nauka, 1974.
18. Dold, A., *Lectures on Algebraic Topology*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1972.
19. Spanier, E.H., *Algebraic Topology*, New York: Springer-Verlag, 1966.
20. Pontryagin, L.S., *Gladkie mnogoobraziya i ikh primeneniya v teorii gomotopii* (Smooth Manifolds and Their Applications in Homotopy Theory), Moscow: Nauka, 1976.