

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.925.5

ОЦЕНКИ СНИЗУ ГЛАВНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ БИЛАПЛАСИАНА НА ГРАФЕ

© Р. Ч. Кулаев¹, С. А. Каркузаев²

¹Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН,
г. Владикавказ

²Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова, г. Владикавказ
e-mail: ¹kulaevrch@mail.ru, ²s.a.karkuzayev@mail.ru

Поступила в редакцию 26.03.2024 г., после доработки 30.04.2024 г.; принята к публикации 02.07.2024 г.

Найдены нижние оценки для минимальных собственных значений дифференциальных операторов четвёртого порядка на графах. Установлен аналог тождества Пиконе для уравнения четвёртого порядка на сети. Получены теоремы сравнения штурмовского типа для такого уравнения.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение на графе, собственное значение, уравнение стержня, теорема Штурма.

DOI: 10.31857/S0374064124080032, EDN: KDHDXT

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье изучается краевая задача на собственные значения для дифференциального оператора L четвёртого порядка на графе Γ , возникающая при моделировании малых деформаций плоских стержневых систем:

$$Lu(x) = \lambda \rho(x)u(x), \quad x \in \Gamma, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Gamma} = (\beta u'' - \vartheta u')|_{\partial\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Оператор L задаётся обыкновенными дифференциальными уравнениями на рёбрах графа Γ , а в узлах графа — наборами условий трансмиссии (см. п. 2). Под *дифференциальным уравнением на графе* подразумеваем, следуя [1], набор обыкновенных дифференциальных уравнений на рёбрах графа и набор условий согласования в его внутренних вершинах.

К настоящему времени подробно изучен вопрос об асимптотике спектра краевых задач на графах произвольного порядка [2–5], получены оценки кратностей собственных значений оператора Штурма–Лиувилля [6] и оператора четвёртого порядка на графе [7]. В данной работе мы находим оценку снизу ведущего собственного значения краевой задачи для уравнения четвёртого порядка. Имеется несколько подходов к получению таких оценок. Наиболее общим является операторный подход, развитый в работах М.А. Красносельского (см., например, [8, гл. 2]) и его учеников. Его основная идея заключается в том, что оценка снизу ведущего собственного значения краевой задачи эквивалентна оценке спектрального радиуса интегрального оператора, обращающего краевую задачу. Ядром такого интегрального оператора является функция Грина соответствующей краевой задачи. А поскольку положительность функции Грина задачи на графе обеспечивают оператору “хорошие” зна-

корегулярные свойства [1, 3, 9–13], то для получения оценки ведущего собственного значения можно применить теорию операторов в пространствах с конусами. Однако этот операторный подход не может быть применён для наших целей ввиду его трудоёмкости.

Другой подход при получении оценок ведущего собственного значения краевой задачи для лапласиана с краевыми условиями Дирихле на графе основан на принципе Рэлея и методе перестановок–симметризаций [14]. При симметризации Шварца (при симметричной перестановке) неотрицательной функции из пространства $H^1(\mathbb{R})$ норма её градиента в $L^2(\mathbb{R})$ не возрастает. Вместе с принципом Рэлея этот факт позволил получить оценку первого собственного значения лапласиана, подчинённого условиям Дирихле.

В настоящей статье мы получаем оценку снизу минимального собственного значения краевой задачи для дифференциального уравнения четвёртого порядка на графе Γ , аналогичную оценке Д.Р. Даннингера [15] (см. также [16]). Для её обоснования используется аналог тождества Пиконе [17, гл. X], позволяющий также сформулировать теорему сравнения типа Штурма для уравнения четвёртого порядка на графе.

2. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

В данной статье будем использовать терминологию и обозначения работ [1, 9]. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ — связный и конечный *геометрический граф* без петель с множеством $V(\Gamma)$ вершин и множеством $E(\Gamma)$ точек рёбер графа. *Ребро* графа — это открытый прямолинейный интервал конечной длины, а *вершина* графа — это концевая точка одного или нескольких рёбер. Рёбра графа обозначаются как γ_i , вершины — $a, b, c, \dots$. Для любой вершины $a \in V(\Gamma)$ через $I(a)$ обозначим множество индексов рёбер, инцидентных вершине a , и через $|I(a)|$ — количество элементов множества $I(a)$. Элементы множеств $J(\Gamma) = \{a \in V(\Gamma) : |I(a)| \geq 2\}$ и $\partial\Gamma = \{a \in V(\Gamma) : |I(a)| = 1\}$ называются *внутренними* и *граничными* вершинами соответственно. Предполагаем, что $\Gamma = E(\Gamma) \cup J(\Gamma)$ и $\partial\Gamma \neq \emptyset$. Обратим внимание, что граничные вершины не включены в граф. *Подграфом* графа Γ называется любое связное подмножество Γ .

Введём функциональные пространства:

$$C[\Gamma] = \{u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, \text{ } u \text{ равномерно непрерывна на каждом ребре } \gamma_i \subset E(\Gamma)\},$$

$$C[E(\Gamma)] = \{u : E(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ } u \text{ равномерно непрерывна на каждом ребре } \gamma_i \subset E(\Gamma)\}.$$

Каждая функция $u \in C[\Gamma]$ (или $C[E(\Gamma)]$) имеет предел $\lim_{\gamma_i \ni x \rightarrow a} u_i(x)$, $i \in I(a)$, в каждой вершине $a \in V(\Gamma)$, обозначим его через $u_i(a)$. Отметим, что $u_k(a)$ не обязательно равны $u_i(a)$ или $u(a)$, где $k, i \in I(a)$ ($k \neq i$).

Теперь определим производную функции на графе. Для этого зададим функцию $\mu(x) \in C[E(\Gamma)]$, линейно отображающую каждое ребро $\gamma_i \subset E(\Gamma)$ на интервал $(0, l_i) \subset \mathbb{R}$, где l_i — длина γ_i . Положим $u'_i(x) := \lim_{\gamma_i \ni y \rightarrow x} (u_i(y) - u_i(x)) / (\mu_i(y) - \mu_i(x))$, $x \in \bar{\gamma}_i$. Аналогично определяются производные более высокого порядка.

Через $C^n[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$) будем обозначать пространство функций $u(x) \in C[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$), производные которых до порядка n включительно существуют и принадлежат пространству $C[E(\Gamma)]$. Для функции $u(x) \in C^n[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$) в любой вершине $a \in V(\Gamma)$ пусть $u_i^{(j)}(a)$, $j = \overline{1, n}$, — множество производных вдоль рёбер, смежных с этой вершиной. Производные нечётного порядка зависят от ориентации рёбер. В дальнейшем при записи условий связи с производными в вершинах графа нам будет удобно использовать производные по направлению “от вершины”, которые будем обозначать $u_i^{(k)}(a)$ (одномерный аналог производных по внутренней нормали).

Далее рассмотрим спектральную краевую задачу (1), (2) на геометрическом графе Γ . При этом под *дифференциальным уравнением (1) на графе* мы подразумеваем набор обыкновенных дифференциальных уравнений на рёбрах графа:

$$(p_i(x)u_i'')'' + r_i(x)u_i = \lambda\rho_i(x)u_i, \quad x \in \gamma_i \subset E(\Gamma), \quad (3)$$

и набор условий согласования во внутренних вершинах графа $a \in J(\Gamma)$. В каждой вершине $a \in J(\Gamma)$, $|I(a)| \geq 3$, накладываются условия

$$u_i(a) = u(a), \quad i \in I(a),$$

$$u_i'(a) = \alpha_{ki}(a)u_k'(a) + \alpha_{ji}(a)u_j'(a), \quad i \in I(a) \setminus \{j, k\}, \quad (4)$$

$$(p_k u_k'')(a) + \sum_{i \in I(a) \setminus \{j, k\}} \alpha_{ki}(a)(p_i u_i'')(a) = 0,$$

$$(p_j u_j'')(a) + \sum_{i \in I(a) \setminus \{j, k\}} \alpha_{ji}(a)(p_i u_i'')(a) = 0, \quad (5)$$

$$\sum_{i \in I(a)} (p_i u_i'')'(a) + r(a)u(a) = \lambda\rho(a)u(a), \quad a \in J(\Gamma). \quad (6)$$

Здесь k и j — фиксированные индексы из множества $I(a)$; $\alpha_{ki}(a)$, $\alpha_{ji}(a)$ — заданные действительные числа. В условиях (4)–(6) все производные вычисляются в направлении удаления от вершины $a \in J(\Gamma)$.

Если внутренняя вершина a инцидентна всего двум ребрам γ_i и γ_k , то в системе условий (4)–(6) нужно удалить все термины с индексом j . В этом случае условия (4)–(6) принимают вид

$$u_i(a) = u_k(a) = u(a), \quad u_i'(a) = \alpha_{ki}(a)u_k'(a),$$

$$(p_k u_k'')(a) + \alpha_{ki}(a)(p_i u_i'')(a) = 0,$$

$$(p_i u_i'')'(a) + (p_k u_k'')'(a) + r(a)u(a) = \lambda\rho(a)u(a).$$

Соотношения (3)–(6) имеют естественную физическую интерпретацию (см. [10, 18]): они возникают при моделировании малых деформаций плоской сетчатой структуры из прямых тонких стержней с условиями жёсткой спайки.

Решением дифференциального уравнения (1) будем называть всякую функцию $u(x) \in C^4[\Gamma]$, удовлетворяющую на каждом ребре графа соответствующему обыкновенному дифференциальному уравнению (3), а в каждой внутренней вершине — условиям (4), (6).

Таким образом, дифференциальный оператор $L: D_L \rightarrow C[\Gamma]$ определяется соотношениями

$$D_L = \{u \in C^4[\Gamma]: u \text{ удовлетворяет (4), (5) на } J(\Gamma)\},$$

$$Lu(x) \equiv \begin{cases} (p(x)u'')'' + r(x)u, & x \in E(\Gamma), \\ \sum_{i \in I(a)} (p_i u_i'')'(a) + r(a)u(a), & a \in J(\Gamma). \end{cases} \quad (7)$$

Всюду далее полагаем:

– $p(x) \in C^2[E(\Gamma)]$, $\inf_{x \in E(\Gamma)} p(x) > 0$; $\rho(x) \in C[\Gamma]$, $\rho(x) > 0$ на $E(\Gamma)$ и $\rho(x) \geq 0$ на $J(\Gamma)$; $r(x) \in C[\Gamma]$;

– для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ и любого индекса $i \in I(a)$ хотя бы одна из констант $\alpha_{ji}(a)$, $\alpha_{ki}(a)$ отлична от нуля;

- для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ степени $|I(a)| \geq 3$ можно определить индексы $k, j \in I(a)$ так, что $\alpha_{ki_1}(a) < 0$, $\alpha_{ji_1}(a) \leq 0$ для некоторого индекса $i_1 \in I(a) \setminus \{j, k\}$ и $\alpha_{ki_2}(a) \leq 0$, $\alpha_{ji_2}(a) < 0$ для некоторого индекса $i_2 \in I(a) \setminus \{j, k\}$;
- для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ степени $|I(a)| = 2$ полагаем $\alpha_{ki_1}(a) < 0$;
- в граничных условиях и условиях трансмиссии все производные вычисляются в направлении “от вершины”.

3. ТОЖДЕСТВО ПИКОНЕ

Помимо оператора $L: D_L \rightarrow C[\Gamma]$, порождённого соотношениями (7) с коэффициентами $p(x) \in C^2[E(\Gamma)]$, $r(x) \in C[\Gamma]$, рассмотрим оператор $\mathcal{L}: D_{\mathcal{L}} \rightarrow C[\Gamma]$, порождаемый теми же соотношениями с заменой коэффициентов на $\mathcal{P}(x) \in C^2[E(\Gamma)]$, $\inf_{x \in E(\Gamma)} \mathcal{P}(x) > 0$, и $\mathcal{R}(x) \in C[\Gamma]$ соответственно.

Теорема 1. Пусть функции $u, v \in C^4[\Gamma]$. Если $u/v \in C[\Gamma]$, то справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \frac{u}{v} (vLu - u\mathcal{L}v) dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a) (v(a)Lu(a) - u(a)\mathcal{L}v(a)) = \\ &= \int_{\Gamma} [(p - \mathcal{P})u''^2 + (r - \mathcal{R})u^2] dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} (r(a) - \mathcal{R}(a))u^2(a) + \int_{\Gamma} \mathcal{P} \left(u'' - \frac{u}{v}v'' \right)^2 dx - \\ & - 2 \int_{\Gamma} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left(u' - \frac{u}{v}v' \right)^2 dx + \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u}{v}(a) [u(a)(\mathcal{P}v'')'(a) - v(a)(pu'')'(a)] + \sum_{a \in \partial\Gamma} (pu'')(a)u'(a) + \\ & + \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u^2}{v^2}(a)(\mathcal{P}v'')(a)v'(a) - 2 \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u}{v}(a)u'(a)(\mathcal{P}v'')(a) + \sum_{a \in J(\Gamma)} \sum_{i \in I(a)} (p_i u_i'')(a)u_i'(a) + \\ & + \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u^2}{v^2}(a) \sum_{i \in I(a)} (\mathcal{P}_i v_i'')(a)v_i'(a) - 2 \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a) \sum_{i \in I(a)} u_i'(a)(\mathcal{P}_i v_i'')(a). \end{aligned} \quad (8)$$

Доказательство. Проинтегрируем дважды по частям вдоль графа Γ произведение uLu :

$$\int_{\Gamma} u Lu dx = \int_{\Gamma} [pu''^2 + ru^2] dx + \sum_{a \in \partial\Gamma} [u' pu'' - u(pu'')']_{x=a} + \sum_{a \in J(\Gamma)} \sum_{i \in I(a)} [u'_i p_i u''_i - u_i (p_i u''_i)']_{x=a}.$$

Поскольку функция u непрерывна в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$, то

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} u Lu dx = \int_{\Gamma} [pu''^2 + ru^2] dx + \sum_{a \in \partial\Gamma} u'(a)(pu'')(a) - \sum_{a \in \partial\Gamma} u(a)(pu'')'(a) + \\ & + \sum_{a \in J(\Gamma)} \sum_{i \in I(a)} u'_i(a)(p_i u''_i)(a) - \sum_{a \in J(\Gamma)} u(a) \left[\sum_{i \in I(a)} (p_i u''_i)'(a) + r(a)u(a) \right] + \sum_{a \in J(\Gamma)} r(a)u^2(a). \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогично, проинтегрировав дважды по частям произведение $(u^2/v)\mathcal{L}v$, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \frac{u^2}{v} \mathcal{L}v dx = \int_{\Gamma} \left[\mathcal{P}v'' \left(\frac{u^2}{v} \right)'' + \mathcal{R}u^2 \right] dx + \\ & + \sum_{a \in \partial\Gamma} \left[\left(\frac{u^2}{v} \right)' \mathcal{P}v'' - \frac{u^2}{v} (\mathcal{P}v'')' \right]_{x=a} + \sum_{a \in J(\Gamma)} \sum_{i \in I(a)} \left[\left(\frac{u_i^2}{v_i} \right)' \mathcal{P}_i v_i'' - \frac{u_i^2}{v_i} (\mathcal{P}_i v_i'')' \right]_{x=a} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Gamma} [\mathcal{P}u''^2 + \mathcal{R}u^2] dx + \int_{\Gamma} \left[\mathcal{P}v'' \left(\frac{u^2}{v} \right)'' - \mathcal{P}u''^2 \right] dx + \\
&+ \sum_{a \in \partial\Gamma} \left[\left(\frac{u^2}{v} \right)' \mathcal{P}v'' - \frac{u^2}{v} (\mathcal{P}v'')' \right]_{x=a} + \sum_{a \in J(\Gamma)} \sum_{i \in I(a)} \left[\left(\frac{u_i^2}{v_i} \right)' \mathcal{P}_i v_i'' - \frac{u_i^2}{v_i} (\mathcal{P}_i v_i'')' \right]_{x=a}.
\end{aligned}$$

Вычислим производные дроби u^2/v . Тогда правая часть последнего равенства примет вид

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma} [\mathcal{P}u''^2 + \mathcal{R}u^2] dx - \int_{\Gamma} \mathcal{P} \left(u'' - \frac{u}{v} v'' \right)^2 dx + 2 \int_{\Gamma} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left(u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 dx - \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u^2}{v^2}(a) (\mathcal{P}v'')(a) v'(a) + \\
&+ 2 \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u}{v}(a) u'(a) (\mathcal{P}v'')(a) - \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u^2}{v}(a) (\mathcal{P}v'')'(a) - \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u^2}{v^2}(a) \sum_{i \in I(a)} (\mathcal{P}_i v_i'')(a) v_i'(a) + \\
&+ 2 \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a) \sum_{i \in I(a)} u_i'(a) (\mathcal{P}_i v_i'')(a) - \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u^2}{v}(a) \left[\sum_{i \in I(a)} (\mathcal{P}_i v_i'')'(a) + \mathcal{R}(a) v(a) \right] + \sum_{a \in J(\Gamma)} \mathcal{R}(a) u^2(a). \quad (10)
\end{aligned}$$

Теперь, составив разность

$$\int_{\Gamma} \frac{u}{v} (vLu - u\mathcal{L}v) dx$$

с учётом (9), (10) и (7), получим равенство (8). Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $u \in D_L$ и $v \in D_{\mathcal{L}}$. Если $\inf_{x \in \Gamma} v(x) > 0$, то имеет место равенство

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma} \frac{u}{v} (vLu - u\mathcal{L}v) dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a) (v(a)Lu(a) - u(a)\mathcal{L}v(a)) = \\
&= \int_{\Gamma} [(p - \mathcal{P})u''^2 + (r - \mathcal{R})u^2] dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} (r(a) - \mathcal{R}(a))u^2(a) + \int_{\Gamma} \mathcal{P} \left(u'' - \frac{u}{v} v'' \right)^2 dx - \\
&- 2 \int_{\Gamma} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left(u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 dx + \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u}{v}(a) [u(a)(\mathcal{P}v'')'(a) - v(a)(pu'')'(a)] + \\
&+ \sum_{a \in \partial\Gamma} (pu'')(a)u'(a) + \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u^2}{v^2}(a) (\mathcal{P}v'')(a)v'(a) - 2 \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u}{v}(a) u'(a) (\mathcal{P}v'')(a).
\end{aligned}$$

Доказательство. Действительно, из условий (4), (5) в произвольной вершине $a \in J(\Gamma)$ получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_{i \in I(a)} (p_i u_i'')(a) u_i'(a) = u_k'(a) \left((p_k u_k'')(a) + \sum_{i \in I(a) \setminus \{k, j\}} \alpha_{ki}(a) (p_i u_i'')(a) \right) + \\
&+ u_j'(a) \left((p_j u_j'')(a) + \sum_{i \in I(a) \setminus \{k, j\}} \alpha_{ji}(a) (p_i u_i'')(a) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Аналогично для любой вершины $a \in J(\Gamma)$ получаем равенства

$$\sum_{i \in I(a)} (\mathcal{P}_i v_i'')(a) v_i'(a) = 0, \quad \sum_{i \in I(a)} u_i'(a) (\mathcal{P}_i v_i'')(a) = 0.$$

Следствие доказано.

Следствие 2. Если в условиях следствия 1 дополнительно предположить, что $u|_{\partial\Gamma}=0$, то выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \frac{u}{v} t(vLu - u\mathcal{L}v) dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a)(v(a)Lu(a) - u(a)\mathcal{L}v(a)) = \\ & = \int_{\Gamma} [(p - \mathcal{P})u''^2 + (r - \mathcal{R})u^2] dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} (r(a) - \mathcal{R}(a))u^2(a) + \\ & + \int_{\Gamma} \mathcal{P} \left(u'' - \frac{u}{v} v'' \right)^2 dx - 2 \int_{\Gamma} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left(u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 dx + \sum_{a \in \partial\Gamma} (pu'')(a)u'(a). \end{aligned} \quad (11)$$

4. ТЕОРЕМА СРАВНЕНИЯ

Теоремы Штурма о перемежаемости и сравнении для уравнения второго порядка на графе впервые были установлены в работе [18]. В [12, 19] были доказаны аналоги теоремы Штурма о перемежаемости нулей решений для уравнения четвёртого порядка. В данном пункте, как первое следствие тождества Пиконе, приведём некоторые свойства дифференциальных неравенств и, в частности, теорему сравнения штурмовского типа для уравнения четвёртого порядка, заданного соотношениями (3)–(6).

Лемма. Пусть функция $u \in D_L$, $u|_{\partial\Gamma}=0$ и

$$\mathcal{Q}[u] := \int_{\Gamma} [\mathcal{P}u''^2 + \mathcal{R}u^2] dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \mathcal{R}(a)u^2(a) \leq 0.$$

Тогда система дифференциальных неравенств

$$\mathcal{L}v(x) \geq 0 \quad (x \in \Gamma), \quad v''(x) < 0 \quad (x \in E(\Gamma)), \quad v|_{\partial\Gamma} > 0 \quad (12)$$

не имеет решений в классе $D_{\mathcal{L}}$.

Доказательство. Предполагая противное, рассмотрим решение $v \in D_{\mathcal{L}}$ системы (12). Покажем, что $v > 0$ на Γ . Для этого, учитывая неравенства $v'' < 0$ на $E(\Gamma)$ и $v > 0$ на $\partial\Gamma$, достаточно показать, что v не имеет локальных минимумов в Γ . Пусть a — произвольная внутренняя вершина графа Γ . Если a — точка локального минимума функции v , то из неравенства $v''(x) < 0$, выполненного всюду на $E(\Gamma)$, следует, что для всех $i \in I(a)$ должны выполняться неравенства $v'_i(a) > 0$. Но из свойств коэффициентов условий (4) (см. п. 2) следует, что существуют индексы $i, j, k \in I(a)$ такие, что $\alpha_{ki}(a) < 0$, $\alpha_{ji}(a) \leq 0$. Это приводит к противоречивому неравенству

$$0 < v'_i(a) = \alpha_{ki}(a)v'_k(a) + \alpha_{ji}(a)v'_j(a) < 0.$$

Следовательно, v не имеет локальных минимумов в $J(\Gamma)$. А поскольку $v'' < 0$ на $E(\Gamma)$, то v не имеет локальных минимумов в Γ . Учитывая всё сказанное и положительность v на $\partial\Gamma$, получаем, что $v > 0$ на Γ .

Подставим функции u и v в формулу (11). Полагая здесь $p \equiv 0$ на $E(\Gamma)$ и $r \equiv 0$ на Γ , будем иметь

$$0 \geq \mathcal{Q}[u] - \int_{\Gamma} \frac{u^2}{v} \mathcal{L}v dx - \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u^2}{v}(a)\mathcal{L}v(a) = \int_{\Gamma} \mathcal{P} \left(u'' - \frac{u}{v} v'' \right)^2 dx - 2 \int_{\Gamma} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left(u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 dx \geq 0.$$

Но тогда $u'' - (u/v)v'' \equiv 0$ и $u' - (u/v)v' \equiv 0$ на $E(\Gamma)$. Отсюда сразу получаем, что $u/v \equiv \text{const}$ на Γ , что невозможно ввиду условий леммы $u|_{\partial\Gamma}=0$ и $v|_{\partial\Gamma} > 0$. Следовательно, система (12) не разрешима в $D_{\mathcal{L}}$. Лемма доказана.

Теорема 2. Если существует нетривиальная функция $u \in D_L$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} uLu &\leq 0, \quad x \in \Gamma, \\ u|_{\partial\Gamma} &= (\beta u'' - \vartheta u')|_{\partial\Gamma} = 0, \\ \mathcal{W}[u] &:= \int_{\Gamma} [(p - \mathcal{P})u''^2 + (r - \mathcal{R})u^2] dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} (r(a) - \mathcal{R}(a))u^2(a) \geq 0, \end{aligned}$$

то любое решение $v \in D_{\mathcal{L}}$ системы неравенств

$$\mathcal{L}v(x) \geq 0, \quad x \in \Gamma; \quad v''(x) < 0, \quad x \in E(\Gamma), \quad (13)$$

положительное хотя бы в одной точке графа Γ , имеет нуль в $\Gamma \cup \partial\Gamma$.

Доказательство. Действительно, если $v \neq 0$ в $\Gamma \cup \partial\Gamma$, то $v > 0$ на $\Gamma \cup \partial\Gamma$. С учётом формулы (11) получим

$$\begin{aligned} 0 &\geq -\mathcal{W}[u] + \int_{\Gamma} \frac{u}{v} (vLu - u\mathcal{L}v) dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a) (v(a)Lu(a) - u(a)\mathcal{L}v(a)) = \\ &= \int_{\Gamma} \mathcal{P} \left(u'' - \frac{u}{v}v'' \right)^2 dx - 2 \int_{\Gamma} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left(u' - \frac{u}{v}v' \right)^2 dx + \sum_{a \in \partial\Gamma} (pu'')(a)u'(a) \geq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Поскольку $(\beta u'' - \vartheta u')|_{\partial\Gamma} = 0$ и $\beta \geq 0$, $\vartheta \geq 0$, то $(pu'')(a)u'(a) \geq 0$ для любой граничной вершины $a \in \partial\Gamma$. Поэтому $u'' - (u/v)v'' \equiv 0$ и $u' - (u/v)v' \equiv 0$ на $E(\Gamma)$. Отсюда сразу получаем, что $u/v \equiv \text{const}$ на Γ . Но это противоречит равенствам $u|_{\partial\Gamma} = 0$ и $v|_{\partial\Gamma} > 0$. Теорема доказана.

Следствие 3 (теорема сравнения). Если существует нетривиальное решение краевой задачи

$$Lu = 0, \quad x \in \Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma} = (\beta u'' - \vartheta u')|_{\partial\Gamma} = 0,$$

удовлетворяющее условию $\mathcal{W}[u] \geq 0$, то любое решение $v \in D_{\mathcal{L}}$ системы неравенств (13), положительное хотя бы в одной точке графа Γ , либо пропорционально функции u на Γ , либо имеет нуль в Γ .

Доказательство. Пусть функция $v \in D_{\mathcal{L}}$ удовлетворяет (13) и положительна хотя бы в одной точке графа Γ . Из теоремы 2 следует, что v имеет нуль в $\Gamma \cup \partial\Gamma$. Если v равна нулю в некоторой точке графа Γ , то теорема доказана.

Пусть v не имеет нулей в Γ . Тогда из условий теоремы следует, что $v > 0$ на Γ . Кроме того, ввиду $v''(x) < 0$ всюду на $E(\Gamma)$ все нули функции v из $\partial\Gamma$ простые. Поэтому, учитывая $u|_{\partial\Gamma} = 0$, имеем $u/v \in C[\Gamma]$. Используя следствие 2, приходим к формуле (14), а отсюда получаем $u'' - (u/v)v'' \equiv 0$ и $u' - (u/v)v' \equiv 0$ на $E(\Gamma)$. Следовательно, $u/v \equiv \text{const}$ на Γ , т.е. v пропорциональна u на Γ . Следствие доказано.

5. НИЖНЯЯ ОЦЕНКА ВЕДУЩЕГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ

Рассмотрим спектральную краевую задачу (1), (2). Установим оценку снизу для ведущего собственного значения оператора L .

Как и в п. 4, вместе с оператором $L: D_L \rightarrow C[\Gamma]$, порождённым соотношениями (7) с коэффициентами $p(x) \in C^2[E(\Gamma)]$, $r(x) \in C[\Gamma]$, введём оператор $\mathcal{L}: D_{\mathcal{L}} \rightarrow C[\Gamma]$, порождаемый теми же соотношениями (7) с коэффициентами $\mathcal{P}(x) \in C^2[E(\Gamma)]$, $\mathcal{R}(x) \in C[\Gamma]$.

Рассмотрим коэффициент ρ из уравнения (1) и пусть $J_{\rho}(\Gamma) = \{a \in J(\Gamma): \rho(a) > 0\}$, $\Gamma_{\rho} = E(\Gamma) \cup J_{\rho}(\Gamma)$.

Теорема 3. Пусть λ_0 — наименьшее собственное значение краевой задачи (1), (2), u — соответствующая собственная функция. Пусть далее v — произвольная функция из класса $D_{\mathcal{L}}$, удовлетворяющая условиям:

- (i) $\inf_{x \in \Gamma} v(x) > 0$;
- (ii) $v''(x) \leq 0$ на $E(\Gamma)$;
- (iii) $\mathcal{L}v(x) \geq 0$ на $J(\Gamma) \setminus J_\rho(\Gamma)$.

Если

$$B[u] := \int_{\Gamma} [(p - \mathcal{P}) u''^2 + (r - \mathcal{R}) u^2] dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} (r(a) - \mathcal{R}(a)) u^2(a) \geq 0,$$

то

$$\lambda_0 \geq \inf_{x \in \Gamma_\rho} \frac{\mathcal{L}v}{\rho v}. \quad (15)$$

Доказательство. Доказательство вытекает из следствия 2. Действительно, поскольку $Lu(x) = \lambda_0 \rho(x) u$ для всех $x \in \Gamma$, то из (11) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \frac{u}{v} (vLu - u\mathcal{L}v) dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a) (v(a)Lu(a) - u(a)\mathcal{L}v(a)) = \\ &= \int_{\Gamma} \lambda_0 \rho u^2 dx - \int_{\Gamma} \frac{u^2}{v} \mathcal{L}v dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \lambda_0 \rho(a) u^2(a) - \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u^2}{v}(a) \mathcal{L}v(a) = \\ &= \int_{\Gamma} [(p - \mathcal{P}) u''^2 + (r - \mathcal{R}) u^2] dx + \int_{\Gamma} \mathcal{P} \left(u'' - \frac{u}{v} v'' \right)^2 dx - \\ &- 2 \int_{\Gamma} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left(u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} (r(a) - \mathcal{R}(a)) u^2(a) + \sum_{a \in \partial\Gamma} (pu'')(a) u'(a). \end{aligned}$$

Из условий теоремы и неотрицательности коэффициентов краевых условий (2) следует неотрицательность правой части последнего равенства, поэтому

$$0 \leq \lambda_0 \int_{\Gamma} \rho u^2 dx - \int_{\Gamma} \rho u^2 \frac{\mathcal{L}v}{\rho v} dx + \lambda_0 \sum_{a \in J(\Gamma)} \rho(a) u^2(a) - \sum_{a \in J(\Gamma)} u^2(a) \frac{\mathcal{L}v}{v}(a).$$

Наконец, используя условие (iii), получаем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda_0 \int_{\Gamma} \rho u^2 dx + \lambda_0 \sum_{a \in J_\rho(\Gamma)} \rho(a) u^2(a) - \int_{\Gamma} \rho u^2 \frac{\mathcal{L}v}{\rho v} dx - \sum_{a \in J_\rho(\Gamma)} \rho(a) u^2(a) \frac{\mathcal{L}v}{\rho v}(a) \leq \\ &\leq \left(\lambda_0 - \inf_{x \in \Gamma_\rho} \frac{\mathcal{L}v}{\rho v} \right) \left(\int_{\Gamma} \rho u^2 dx + \sum_{a \in J_\rho(\Gamma)} \rho(a) u^2(a) \right). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_{\Gamma} \rho u^2 dx + \sum_{a \in J_\rho(\Gamma)} \rho(a) u^2(a) > 0,$$

то выполняется оценка (15). Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 3 является аналогом основного результата работы [16].

6. ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ О ДЕФОРМАЦИЯХ СЕТКИ СТЕРЖНЕЙ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ЯЧЕЙКАМИ

Применим утверждение теоремы 1 к задаче о малых колебаниях плоской прямоугольной сетки тонких однородных стержней с условиями жёсткой спайки.

Рассмотрим в плоскости $\mathbb{R}^2$ конечный связный граф Γ , все рёбра которого параллельны координатным осям Ox_1 и Ox_2 , а степень каждой внутренней вершины графа Γ равна четырём (см. рисунок). Граф Γ можно представить в виде конечного объединения горизонтальных и вертикальных интервалов $\Gamma = (\bigcup_i (a_1^i, b_1^i)) \cup (\bigcup_j (a_2^j, b_2^j))$, множество концов которых образует границу графа $\partial\Gamma$. Отметим, что мы не требуем, чтобы длины интервалов были равны.

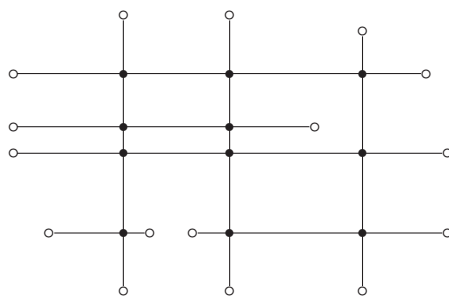


Рисунок. Конечный связный граф.

Рассмотрим плоскую сетку из тонких однородных стержней с условиями жёсткой спайки. В состоянии покоя стержневая система копирует описанный выше граф Γ . Тогда задача о собственных колебаниях стержневой системы сводится к краевой задаче на собственные значения на Γ (см., например, [9–11, 20]), порождённой обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$u_i^{IV} = \lambda u_i, \quad x \in \gamma_i \subset E(\Gamma), \quad (16)$$

и условиями трансмиссии в каждой внутренней вершине $c \in J(\Gamma)$, $I(c) = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\begin{aligned} u_i(c) &= u(c), \quad u'_1(a) = -u'_3(c), \quad u'_2(c) = -u'_4(c), \\ u''_1(c) &= u''_3(c), \quad u''_2(c) = u''_4(c), \\ \sum_{i \in I(c)} u_i'''(c) &= 0, \quad c \in J(\Gamma). \end{aligned} \quad (17)$$

На границе графа соотношения (16), (17) дополняются краевыми условиями

$$u|_{\partial\Gamma} = 0, \quad (\beta u'' - \vartheta u')|_{\partial\Gamma} = 0. \quad (18)$$

Обозначим через R минимальный радиус шара, содержащего граф Γ , в плоскости $\mathbb{R}^2$.

Теорема 4. Пусть λ_0 — наименьшее собственное значение краевой задачи (16)–(18). Тогда

$$\lambda_0 \geq \frac{360}{61R^4}. \quad (19)$$

Доказательство. Шаг 1. Сначала построим пробную функцию. Без ограничения общности можно считать, что граф Γ содержится в шаре $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ радиуса R с центром в начале координат, при этом каждое ребро графа параллельно одной из координатных осей. Для точки $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, как обычно, полагаем $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и определим функцию

$$V_\varepsilon(x) = \int_{\|x\|}^{R+\varepsilon} dt \int_0^t ds \int_s^{R+\varepsilon} d\tau \int_0^\tau ((R+\varepsilon)^2 - \sigma^2) d\sigma, \quad x \in B_R(0).$$

Пусть $v_\varepsilon(x)$ — сужение функции $V_\varepsilon(x)$ на граф $\Gamma \subset B_R(0)$. Покажем, что функция $v(x)$ удовлетворяет условиям (i)–(iii) теоремы 3. Положительность v_ε на $\Gamma \cup \partial\Gamma$ очевидна.

Рассмотрим произвольную точку $x \in E(\Gamma)$. Обозначим через (a, b) , где $a, b \in \partial\Gamma$, прямолинейный маршрут графа Γ , содержащий точку x . Пусть для определённости рёбра маршрута (a, b) параллельны оси Ox_1 и ориентированы от a к b . Тогда если $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ — координаты точек $a, b \in \partial\Gamma$ в $\mathbb{R}^2$, то

$$x = (x_1, a_2) \in [a, b] \implies x_1 \in [a_1, b_1] \subset [-r(\varepsilon), r(\varepsilon)],$$

где $r(\varepsilon) = \sqrt{(R+\varepsilon)^2 - a_2^2}$. Поэтому на (a, b) функция v_ε допускает представление

$$v_\varepsilon(x) = v_\varepsilon(x_1, a_2) = \int_{|x_1|}^{r(\varepsilon)} dt \int_0^t ds \int_s^{r(\varepsilon)} d\tau \int_0^\tau (r^2(\varepsilon) - \sigma^2) d\sigma, \quad x \in (a, b). \quad (20)$$

Отсюда при $x_1 \neq 0$ легко получаем

$$v'_\varepsilon(x) = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_1}(x_1, a_2) = -\frac{|x_1|}{x_1} \int_0^{|x_1|} ds \int_s^{r(\varepsilon)} d\tau \int_0^\tau (r^2(\varepsilon) - \sigma^2) d\sigma, \quad x \in (a, b).$$

Поскольку

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_1}(-0, a_2) = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_1}(+0, a_2) = 0,$$

то $v'_\varepsilon(x) = 0$ при $x_1 = 0$ и $v_\varepsilon \in C^1[a, b]$.

Аналогично

$$v''_\varepsilon(x) = \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x_1^2}(x_1, a_2) = - \int_{|x_1|}^{r(\varepsilon)} d\tau \int_0^\tau (r^2(\varepsilon) - \sigma^2) d\sigma, \quad x \in (a, b) \setminus 0,$$

$$\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x_1^2}(-0, a_2) = \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x_1^2}(+0, a_2) = - \int_0^{r(\varepsilon)} d\tau \int_0^\tau (r^2(\varepsilon) - \sigma^2) d\sigma$$

и $v_\varepsilon \in C^2[a, b]$. Кроме того, $v''_\varepsilon(x) < 0$ на (a, b) .

Далее несложно показать, что

$$v_\varepsilon^{IV}(x) = \frac{\partial^4 v_\varepsilon}{\partial x_1^4}(x_1, a_2) = (r^2(\varepsilon) - x_1^2) \geq \varepsilon_1 > 0, \quad x \in (a, b), \quad (21)$$

и $v_\varepsilon \in C^4[a, b]$.

Таким образом, $v_\varepsilon \in C^4[\Gamma] \cap C^4[a, b]$ для любого прямолинейного маршрута $(a, b) \subset \Gamma$. Отсюда следует, что v_ε удовлетворяет условиям трансмиссии (17) всюду на $J(\Gamma)$.

Шаг 2. Согласно теореме 3

$$\lambda_0 \geq \inf_{x \in E(\Gamma)} \frac{v_\varepsilon^{IV}}{v_\varepsilon} > 0,$$

поэтому существуют прямолинейный маршрут $(a, b) \subset \Gamma$, соединяющий вершины $a, b \in \partial\Gamma$, и точка $x^* \in [a, b]$ такие, что выполнены соотношения

$$\lambda_0 \geq \inf_{x \in E(\Gamma)} \frac{v_\varepsilon^{IV}}{v_\varepsilon} = \lim_{(a,b) \ni x \rightarrow x^*} \frac{v_\varepsilon^{IV}}{v_\varepsilon} = \inf_{x \in (a,b)} \frac{v_\varepsilon^{IV}}{v_\varepsilon}. \quad (22)$$

Ввиду формул (20), (21) получим, что в (22) значение справа равно

$$\inf_{x \in (a,b)} \frac{v_\varepsilon^{IV}}{v_\varepsilon} = \inf_{x_1 \in (a_1, b_1)} \frac{360(r^2(\varepsilon) - |x_1|^2)}{61r^6(\varepsilon) - 75r^4(\varepsilon)|x_1|^2 + 15r^2(\varepsilon)|x_1|^4 - |x_1|^6}.$$

Положим $r = \max\{|a_1|, |b_1|\}$. Тогда

$$\lambda_0 \geq \inf_{x_1 \in [-r, r]} \frac{360(r^2 - |x_1|^2)}{61r^6 - 75r^4|x_1|^2 + 15r^2|x_1|^4 - |x_1|^6}.$$

Вычисления показывают, что инфимум достигается при $x_1 = 0$, поэтому

$$\lambda_0 \geq \frac{360}{61r^4} \geq \frac{360}{61(R+\varepsilon)^4}.$$

Поскольку число $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, то утверждение теоремы можно считать доказанным.

В случае когда граф является деревом, оценка (19) допускает уточнение, а сам граф допускает представление в виде прямолинейных маршрутов $\Gamma = \bigcup_i (a_i, b_i)$ с концевыми вершинами $a_i, b_i \in \partial\Gamma$. Пробную функцию v_ε можно последовательно строить на маршрутах (a_i, b_i) . Сначала можно определить функцию v_ε на маршруте (a_1, b_1) формулой (20). На втором шаге нужно достроить функцию v_ε на каждом маршруте, проходящем через внутренние вершины графа Γ , лежащие на интервале (a_1, b_1) . Так, если $c = (a_1, b_1) \cap (a_j, b_j)$, то

$$v_\varepsilon(x) = v_\varepsilon(x_1, a_j) = K(c) \int_{|x_1|}^{r(\varepsilon)} dt \int_0^t ds \int_s^{r(\varepsilon)} d\tau \int_0^\tau (r^2(\varepsilon) - \sigma^2) d\sigma, \quad x \in (a_j, b_j),$$

где положительная константа $K(c)$ обеспечивает непрерывность функции v_ε в узловой вершине c . Поскольку граф является деревом, такие константы $K(c)$ существуют.

На третьем шаге достраиваем функцию v_ε на каждом маршруте, проходящем через внутренние вершины графа Γ , лежащие на интервалах, задействованных на втором шаге. И так далее.

Рассуждая аналогично как при доказательстве теоремы 4, можно получить следующий результат.

Теорема 5. Пусть $\ell(\Gamma) := \max_{(a_i, b_i) \subset \Gamma} \mu(a_i, b_i)/2$, где $\mu(a_i, b_i)$ — длина интервала (a_i, b_i) . Если граф Γ является деревом, то наименьшее собственное значение краевой задачи (16)–(18) удовлетворяет неравенству

$$\lambda_0 \geq \frac{360}{61(\ell(\Gamma))^4}. \quad (23)$$

Пример. Рассмотрим граф-крест Γ , состоящий из четырёх ребер γ_i , $i = \overline{1, 4}$, с одной общей концевой точкой c (внутренняя вершина). На Γ рассмотрим задачу на собственные значения, порождённую соотношениями (16), (17), с граничными условиями $u|_{\partial\Gamma} = u''|_{\partial\Gamma} = 0$.

Предположив, что мера каждого из четырёх рёбер графа Γ равна $1/2$, вычислим характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ краевой задачи. Учитывая положительность собственных

значений, нас интересуют значения $\Delta(\lambda)$ при $\lambda > 0$. Прямые вычисления показывают, что при $\lambda > 0$ характеристический определитель равен

$$\Delta(\lambda) = 256 \sqrt[4]{\lambda^9} \sin \sqrt[4]{\lambda} \operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda} \left(\sin \sqrt[4]{\lambda} \operatorname{sh}^2 \frac{\sqrt[4]{\lambda}}{2} - \sin^2 \frac{\sqrt[4]{\lambda}}{2} \operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda} \right).$$

Положительные нули определителя $\Delta(\lambda)$ и есть искомые собственные значения, причём наименьший из них равен $\lambda_0 = \pi^4 \approx 97.4091$.

Поскольку меры всех рёбер графа равны, то в рассматриваемом случае $R = \ell(\Gamma)$. Если теперь использовать оценку (19) (или (23)), то вычисления покажут, что при $R = 1/2$ выполняется неравенство $\lambda_0 \geq 94.4262$.

7. ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОЦЕНКИ СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ λ_0

Теорема 3 даёт верхнюю границу для ведущего собственного значения λ_0 , но оставляет открытым вопрос о нахождении оптимальной пробной функции v в оценке (15). Для решения этой проблемы могут быть использованы методы оптимизации.

Пусть $v^{[1]}, v^{[2]}, \dots, v^{[m]} \in D_{\mathcal{L}}$, $m \in \mathbb{N}$, — произвольный набор функций, удовлетворяющих условиям (i)–(iii) теоремы 3. Пробную функцию v для оценки (15) можно искать в виде

$$v(x) = \omega_1 v^{[1]}(x) + \omega_2 v^{[2]}(x) \dots + \omega_m v^{[m]}(x),$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, а Ω — множество значений параметров, обеспечивающее выполнение условий (i)–(iii).

Тогда определение оптимальной оценки собственного значения λ_0 для заданного набора $\{v^{[i]}\}_{i=1}^m$ сводится к задаче о нахождении величины $\sup_{\omega \in \Omega} \inf_{x \in \Gamma_\rho} F_m(x, \omega)$, где

$$F_m(x, \omega) = \frac{\sum_{i=1}^m \omega_i \mathcal{L} v^{[i]}(x)}{\rho(x) \sum_{i=1}^m \omega_i v^{[i]}(x)}.$$

Для решения задачи минимакса можно привлечь методы вычислительной математики.

Вернёмся к примеру из п. 6 на графе-кресте. Представим граф-крест в виде объединения двух интервалов единичной меры, пересекающихся в точке $s \in J(\Gamma)$. Поскольку мера каждого ребра графа равна $1/2$, мы можем отождествить каждый из этих интервалов со своим экземпляром интервала $(-1/2, 1/2)$, который, для определённости, будем обозначать $(-1/2, 1/2)_i$, $i = 1, 2$. Пробную функцию будем искать в виде

$$v(x) = \omega_1 v^{[1]}(x) + \omega_2 v^{[2]}(x) + \omega_3 v^{[3]}(x), \quad x \in (-1/2, 1/2)_i,$$

где

$$\begin{aligned} v^{[1]}(x) &= \int_{\|x\|}^{1/2+\varepsilon} dt \int_0^t ds \int_s^{1/2+\varepsilon} d\tau \int_0^\tau ((R+\varepsilon)^2 - \sigma^2) d\sigma, \quad x \in (-1/2, 1/2)_i; \\ v^{[2]}(x) &= \int_{\|x\|}^{1/2+\varepsilon} dt \int_0^t ds \int_s^{1/2+\varepsilon} d\tau \int_0^\tau \sigma^2 ((R+\varepsilon)^2 - \sigma^2) d\sigma, \quad x \in (-1/2, 1/2)_i; \\ v^{[3]}(x) &= \int_{\|x\|}^{1/2+\varepsilon} dt \int_0^t ds \int_s^{1/2+\varepsilon} d\tau \int_0^\tau \sigma^4 ((R+\varepsilon)^2 - \sigma^2) d\sigma, \quad x \in (-1/2, 1/2)_i. \end{aligned}$$

Рассуждая как и в п. 6, можно показать, что функция $v \in C^4[\Gamma]$ удовлетворяет условиям трансмиссии в узловой вершине графа. Условия (i)–(iii) теоремы 3 выполнены для любого $\varepsilon > 0$ и $\omega \in \Omega$, где $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3: \omega_2^2 - 4\omega_1\omega_3 \leq 0\}$.

Если $\varepsilon = 10^{-5}$, то вычисления показывают, что $\sup_{\omega \in \Omega} \inf_{x \in E(\Gamma)} F_3(x, \omega) = 97.3904$ достигается при $\omega = (1, 0.94, 0.366)$ и $x = 0.229733$. Напомним, что в данном случае $\lambda_0 = \pi^4 \approx 97.4091$.

Замечание 2. Отметим, что для вычисления нулей характеристического определителя краевой задачи (1), (2) необходима фундаментальная система решений уравнения (1) на графе, а для применения формулы (15) решения дифференциального уравнения не требуется.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по соглашению № 075-02-2024-1447.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. [и др.]. — М. : Физматлит, 2005. — 268 с.
2. Bondarenko, N.P. Partial inverse Sturm–Liouville problems / N.P. Bondarenko // Mathematics. — 2023. — V. 11. — Art. 2408.
3. Borovskikh, A.V. Fourth-order differential equations on geometric graphs / A.V. Borovskikh, K.P. Lazarev // J. Math. Sci. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 719–738.
4. Panasenko, G. Asymptotic analysis of the non-steady Navier–Stokes equations in a tube structure. I. The case without boundary layer-in-time / G. Panasenko, K. Pileckas // Nonlin. Anal. — 2015. — V. 122. — P. 125–168.
5. Yang, Ch.-F. Inverse spectral problems for the Sturm–Liouville operator on a d-star graph / Ch.-F. Yang // J. Math. Anal. Appl. — 2010. — V. 365, № 2. — P. 742–749.
6. Диаб, А.Т. О кратности собственных значений в задаче Штурма–Лиувилля на графах / А.Т. Диаб, Б.К. Калдыбекова, О.М. Пенкин // Мат. заметки. — 2016. — Т. 99, № 4. — С. 489–501.
7. Кулаев, Р.Ч. О кратности собственных значений дифференциального оператора четвёртого порядка на графе / Р.Ч. Кулаев, А.А. Уртаева // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 7. — С. 869–876.
8. Красносельский, М.А. Положительные решения операторных уравнений / М.А. Красносельский. — М. : Физматлит, 1962. — 392 с.
9. Кулаев, Р.Ч. О функции Грина краевой задачи на графе-пучке / Р.Ч. Кулаев // Изв. вузов. Математика. — 2013. — Т. 57, № 2. — С. 56–66.
10. Кулаев, Р.Ч. Неосцилляция уравнения четвертого порядка на графе / Р.Ч. Кулаев // Мат. сб. — 2015. — Т. 206, № 12. — С. 79–118.
11. Кулаев, Р.Ч. О свойстве неосцилляции уравнения на графе / Р.Ч. Кулаев // Сиб. мат. журн. — 2016. — Т. 57, № 1. — С. 85–97.
12. Kulaev, R.Ch. The qualitative theory of fourth-order differential equations on a graph / R.Ch. Kulaev // Mediterr. J. Math. — 2022. — V. 19, № 2. — Art. 73.
13. Kulaev, R.Ch. Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network / R.Ch. Kulaev, A.A. Urtaeva // Math. Meth. Appl. Sci. — 2023. — V. 46, № 14. — P. 15743–15763.
14. Диаб, А.Т. Оценка первого собственного значения лапласиана на графе / А.Т. Диаб, П.А. Кулешов, О.М. Пенкин // Мат. заметки. — 2014. — Т. 96, № 6. — С. 885–895.
15. Dunninger, D.R. A Picone integral identity for a class of fourth order elliptic differential inequalities / D.R. Dunninger // Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. — 1971. — V. 50. — P. 630–641.

16. Jaroš, J. Picone's identity for the p -biharmonic operator with applications / J. Jaroš // Electron. J. Differ. Equat. — 2011. — V. 122. — P. 1–6.
17. Айнс, Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс ; под ред. А.М. Эфроса. — Харьков : ГНТИУ, 1939. — 720 с.
18. Покорный, Ю.В. Критерий положительности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвертого порядка / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 309, № 6. — С. 1306–1308.
19. Кулаев, Р.Ч. Теоремы сравнения Штурма для уравнения четвертого порядка на графе / Р.Ч. Кулаев, А.А. Уртаева // Мат. заметки. — 2022. — Т. 111, № 6. — С. 947–952.
20. Кулаев, Р.Ч. Критерий положительности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвертого порядка / Р.Ч. Кулаев // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 2. — С. 161–173.

BOTTOM ESTIMATES FOR THE MINIMAL EIGENVALUE OF THE BI-LAPLACIAN ON A GRAPH

R. Ch. Kulaev¹, S. A. Karkuzaev²

¹*Southern Mathematical Institute — Branch of Vladikavkaz Scientific Center of RAS, Vladikavkaz, Russia*

²*North Ossetian State University named after K.L. Khetagurov, Vladikavkaz, Russia*

e-mail: ¹kulaevrch@mail.ru, ²s.a.karkuzaev@mail.ru

Bottom estimates for the minimum eigenvalues of fourth-order differential operators on graphs are found. An analogue of the Picone identity for a fourth-order equation on a network is established. Comparison theorems of the Sturm type for such an equation are obtained.

Keywords: differential equation on a graph, eigenvalue, equation of rod, Sturm's theorem.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under agreement no. 075-02-2024-1447.

REFERENCES

1. Pokornyy, Yu.V., Penkin, O.M., Pryadiev, V.L., Borovskikh, A.V., Lazarev, K.P., and Shabrov, S.A., *Differentsialnye uravneniya na geometricheskikh grafakh* (Differential Equations on Geometric Graphs), Moscow: Fizmatlit, 2005.
2. Bondarenko, N.P., Partial inverse Sturm–Liouville problems, *Mathematics*, 2023, vol. 11, art. 2408.
3. Borovskikh, A.V. and Lazarev, K.P., Fourth-order differential equations on geometric graphs, *J. Math. Sci.*, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 719–738.
4. Panasenko, G. and Pileckas K., Asymptotic analysis of the non-steady Navier–Stokes equations in a tube structure. I. The case without boundary layer-in-time, *Nonlin. Anal.*, 2015, vol. 122. pp. 125–168.
5. Yang, Ch.-F., Inverse spectral problems for the Sturm–Liouville operator on a d -star graph, *J. Math. Anal. Appl.*, 2010, vol. 365, no. 2, pp. 742–749.
6. Diab, A.T., Kaldybekova, B.K., and Penkin, O.M., On the multiplicity of eigenvalues of the Sturm–Liouville problem on graphs, *Math. Notes.*, 2016, vol. 99, no. 4, pp. 492–502.
7. Kulaev, R.Ch. and Urtaeva, A.A., On the multiplicity of eigenvalues of a fourth-order differential operator on a graph, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 7, pp. 869–876.
8. Krasnoselskii, M.A., *Positive Solutions of Operator Equations*, Noordhoff–Groningen, 1964.
9. Kulaev, R.Ch., The Green function of the boundary value problem on a star-shaped graph, *Russ. Math.*, 2013, vol. 57, no. 2, pp. 48–57.
10. Kulaev, R.Ch., Disconjugacy of fourth-order equations on graphs, *Sb. Math.*, 2015, vol. 206, no. 12, pp. 1731–1770.
11. Kulaev, R.Ch., On the disconjugacy property of an equation on a graph, *Sib. Math. J.*, 2016. vol. 57, no. 1, pp. 64–73.

12. Kulaev, R.Ch., The qualitative theory of fourth-order differential equations on a graph, *Mediterr. J. Math.*, 2022. vol. 19, no. 2, art. 73.
13. Kulaev, R.Ch. and Urtaeva, A.A., Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2023. vol. 46, no. 14, pp. 15743–15763.
14. Diab, A.T., Kuleshov, P.A., and Penkin, O.M., Estimate of the first eigenvalue of the Laplacian on a graph, *Math. Notes*, 2014, vol. 96, no. 6, pp. 948–956.
15. Dunninger, D.R., A Picone integral identity for a class of fourth order elliptic differential inequalities, *Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, 1971, vol. 50, pp. 630–641.
16. Jaroš, J., Picone's identity for the p-biharmonic operator with applications, *Electron. J. Differ. Equat.*, 2011, vol. 122, pp. 1–6.
17. Ince, E.L., *Ordinary Differential Equations*, New York: Dover Publ., 2013.
18. Pokornyi, Yu.V. and Penkin, O.M., Sturm theorems for equations on graphs, *Dokl. AN SSSR*, 1990, vol. 40, no. 3, pp. 640–642.
19. Kulaev, R.Ch. and Urtaeva A.A., Sturm separation theorems for a fourth-order equation on a graph, *Math. Notes*, 2022. vol. 111, no. 5, pp. 977–981.
20. Kulaev, R.Ch., Criterion for the positiveness of the Green function of a many-point boundary value problem for a fourth-order equation, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 2, pp. 163–176.