

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.925.51

МНОГОМЕРНАЯ АВТОНОМНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА, ОБЛАДАЮЩАЯ ЕДИНИЧНОЙ МЕРОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ, НО МАССИВНОЙ ЧАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТЬЮ

© А. А. Бондарев

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: albondarev1998@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.01.2024 г., после доработки 10.05.2024 г.; принята к публикации 04.06.2024 г.

Построен пример неоднотонной автономной дифференциальной системы, у которой, с одной стороны, все решения, начинающиеся во внешности единичного шара, стремятся к нулю при неограниченном росте времени, а с другой — относительная мера начальных условий тех решений, которые начинаются в шаре с центром в нуле и удаляются от него на достаточное расстояние с ростом времени, приближается сколь угодно близко к единице при стремлении радиуса шара к нулю. Построенная в работе нелинейная система обладает также нулевым линейным приближением вдоль нулевого решения.

Ключевые слова: дифференциальная система, нелинейная система, автономная система, устойчивость по Ляпунову, устойчивость по Перрону, верхнепредельная устойчивость, мера устойчивости, асимптотическое поведение решений.

DOI: 10.31857/S0374064124080019, EDN: KDOVPR

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В классическом примере Р.Э. Винограда [1, гл. III, § 6.3] (и его упрощённой модификации А.Ф. Филиппова [2, гл. 4, § 18]) все решения конкретной двумерной автономной дифференциальной системы стремятся к нулю (здесь и всюду ниже — при неограниченном росте времени), но тем не менее нулевое решение этой системы является неустойчивым по Ляпунову.

Некоторые примеры столь контрастных сочетаний свойств (ляпуновских и недавно введённых перроновских [3] и верхнепредельных [4]) решений также приведены в исследованиях автора [5–10]. Наиболее логически сильные результаты, представленные в этих работах, состоят в построении многомерных систем, обладающих:

- одновременно как перроновской, так и верхнепредельной, с одной стороны, полной неустойчивостью (а следовательно, и ляпуновской глобальной неустойчивостью), а с другой — массивной частной устойчивостью;
- одновременно ляпуновской крайней неустойчивостью и как перроновской, так и верхнепредельной глобальной устойчивостью.

Цель настоящей статьи — построить дифференциальную систему с контрастными сочетаниями свойств (подобными тем, что были предложены в [5–10]), но при этом ещё и автономную (в отличие от примеров из работ [5–10], нереализуемых в автономном случае [11]), т.е. систему, у которой:

- 1) имеется как перроновская, так и верхнепредельная массивная частная устойчивость (которая есть и у системы, построенной в работе [10, теорема 1]);

2) меры устойчивости и неустойчивости (см. описание свойств в определении 3) всех трёх типов (ляпуновского, перроновского и верхнепредельного) равны соответственно нулю и единице, что является логическим ослаблением наличия у системы свойства ляпуновской почти полной (а значит, и имевшейся у системы из работы [10, теорема 1] ляпуновской полной) неустойчивости.

Сочетание в автономном случае ляпуновской почти полной неустойчивости с перроновской и верхнепредельной частной устойчивостью также реализуется на дифференциальных системах (например, на двумерной линейной системе с седловой особой точкой), однако частная устойчивость оказывается лишь *точечной*.

Для произвольного числа $n \in \mathbb{N}$ в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с нормой $|\cdot|$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

с правой частью $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условиям

$$f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n), \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

обеспечивающим существование и единственность решений задач Коши и наличие нулевого решения. Положим

$$B_\rho \equiv \{x_0 \in \mathbb{R}^n: 0 < |x_0| < \rho\}, \quad \rho > 0,$$

а также для каждого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ через $x(\cdot, x_0)$ обозначим непродолжаемое решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(0, x_0) = x_0$.

Определение 1 [3, 4, 12]. Для системы (1) имеет место *ляпуновская*, *перроновская* или *верхнепредельная* (отмечены ниже индексом $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ соответственно):

1) *устойчивость*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое начальное значение $x_0 \in B_\delta$ удовлетворяет соответственно условию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t, x_0)| < \varepsilon, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| < \varepsilon; \quad (2)$$

2) *полная неустойчивость*, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что любое начальное значение $x_0 \in B_\delta$ не удовлетворяет соответствующему условию (2) (в частности, если решение $x(\cdot, x_0)$ определено не на всём луче $\mathbb{R}_+$);

3) *почти полная неустойчивость*, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что все значения $x_0 \in B_\delta$, не удовлетворяющие соответствующему условию (2), образуют в шаре B_δ подмножество полной меры;

4) μ -*устойчивость* при данном значении $\mu \in [0, 1]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при каждом $\rho \in (0, \delta)$ все начальные значения $x_0 \in B_\rho$, удовлетворяющие соответствующему условию (2), образуют в шаре B_ρ подмножество относительной меры $M_\varkappa(f, \varepsilon, \rho)$ (т.е. доли от меры всего шара B_ρ , причём мера здесь и всюду ниже лебегова) не меньшей μ ;

5) ν -*неустойчивость* при данном значении $\nu \in [0, 1]$, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что при каждом $\rho \in (0, \delta)$ все начальные значения $x_0 \in B_\rho$, не удовлетворяющие соответствующему условию (2), образуют в шаре B_ρ подмножество относительной меры $N_\varkappa(f, \varepsilon, \rho)$ не меньшей ν .

Определение 2 [3, 4, 13]. Будем говорить, что для системы (1) имеет место *перроновская* или *верхнепредельная*:

6) *массивная частная устойчивость*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое начальное значение $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus B_\delta$ удовлетворяет соответственно второму или третьему условию в (2);

7) *асимптотическая устойчивость*, если для некоторого $\delta > 0$ любое начальное значение $x_0 \in B_\delta$ удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| = 0 \quad \text{или} \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| = 0.$$

Определение 3 [12]. Для системы (1) при $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ назовем *ляпуновской*, *перроновской* или *верхнепредельной* соответственно:

а) *мерой устойчивости* такое число $\mu_\varkappa(f) \in [0, 1]$, что для каждого $\mu \in [0, \mu_\varkappa(f))$ система (1) обладает μ -устойчивостью, а для каждого $\mu \in (\mu_\varkappa(f), 1]$ — нет;

б) *мерой неустойчивости* такое число $\nu_\varkappa(f) \in [0, 1]$, что для каждого $\nu \in [0, \nu_\varkappa(f))$ система (1) обладает ν -неустойчивостью, а для каждого $\nu \in (\nu_\varkappa(f), 1]$ — нет.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Ниже в теореме представлена автономная дифференциальная система, у которой:

– имеется как перроновская, так и верхнепредельная массивная частная устойчивость (первое свойство);

– меры устойчивости и неустойчивости всех трёх типов (ляпуновского, перроновского и верхнепредельного) равны соответственно нулю и единице (второе свойство).

Теорема. Для каждого числа $n > 1$ существует автономная система (1), которая имеет правую часть $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую условию $f'(0) = 0$, а также обладает следующими свойствами:

1) каждое начальное значение $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus B_1$ удовлетворяет равенству

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| = 0; \quad (3)$$

2) для мер устойчивости и неустойчивости системы выполнены равенства

$$\mu_\varkappa(f) = 0, \quad \nu_\varkappa(f) = 1, \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma.$$

Замечание. Отметим, что система, существование которой утверждается в теореме, неодномерна. Более того, при $n = 1$ существование двух начальных значений разных знаков, удовлетворяющих равенству (3), эквивалентно [14, теорема 29] наличию у системы асимптотической устойчивости (как перроновской, так и верхнепредельной), а значит, одномерного примера с таким набором свойств не существует.

Доказательство теоремы. Построение описанной в теореме системы проведём в два этапа.

Этап I. Введём на декартовой плоскости Ox_1x_2 полярные координаты ρ, φ по формулам

$$x_1 = \rho \cos \varphi, \quad x_2 = \rho \sin \varphi, \quad \rho \geq 0, \quad \rho^2 \equiv x_1^2 + x_2^2, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

и рассмотрим автономную двумерную систему

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = -\rho^2(\rho^2 - \sin^2(2\varphi))^2 \begin{pmatrix} P(\rho, \varphi) \\ \Phi(\rho, \varphi) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где

$$P(\rho, \varphi) = \begin{cases} \rho - \sin(2\varphi) - 2\cos^2(2\varphi), & \rho \leq \sin(2\varphi), \\ \rho + \sin(2\varphi) - 2\cos^2(2\varphi), & \rho \leq -\sin(2\varphi), \\ \chi(\rho, \varphi), & \rho > |\sin(2\varphi)|; \end{cases} \quad \Phi(\rho, \varphi) = \begin{cases} -\cos(2\varphi), & \rho \leq \sin(2\varphi), \\ \cos(2\varphi), & \rho \leq -\sin(2\varphi), \\ \rho^3 \sin(2\varphi), & \rho > |\sin(2\varphi)|; \end{cases} \quad (6)$$

$$\chi(\rho, \varphi) = \begin{cases} 2\rho^4 \cos(2\varphi), & |\cos \varphi| \geq 1/2 \text{ или } |\cos \varphi| < 1/2 \text{ и } \psi(\rho, \varphi) \leq 0, \\ 2\rho^4 \cos(2\varphi) + 768\psi^2(\rho, \varphi), & |\cos \varphi| < 1/2 \text{ и } \psi(\rho, \varphi) > 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\psi(\rho, \varphi) = (\rho \sin^2(\varphi - \pi/3) - \sin(2\varphi))(\rho \sin^2(2\pi/3 - \varphi) + \sin(2\varphi)). \quad (8)$$

Равенства (5)–(8) определяют векторное поле в области $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ переменных (ρ, φ) , которое при помощи локального диффеоморфизма, заданного формулами (4), переносится на проколотую плоскость $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ переменных (x_1, x_2) и непрерывно продолжается в начало координат нулем. Более того, продолженное поле, во-первых, непрерывно дифференцируемо и имеет нулевое линейное приближение в нуле, а во-вторых, является непрерывно дифференцируемым на всей плоскости за счёт наличия в правой части системы множителей ρ^2 и $(\rho^2 - \sin^2(2\varphi))^2$. Из сказанного выше следует, что система (5) допускает нулевое решение, а значит, является системой вида (1).

Заметим также, что полученное таким образом на плоскости переменных (x_1, x_2) поле является симметричным относительно обеих осей координат x_1 и x_2 в силу чётности функций $\varphi \mapsto P(\rho, \varphi)$, $\varphi \mapsto P(\rho, \pi/2 + \varphi)$ (вытекающей из чётности $\varphi \mapsto \chi(\rho, \varphi)$, $\varphi \mapsto \chi(\rho, \pi/2 + \varphi)$, $\varphi \mapsto \psi(\rho, \varphi)$, $\varphi \mapsto \psi(\rho, \pi/2 + \varphi)$ и равенств (6)), а также нечётности функций $\varphi \mapsto \Phi(\rho, \varphi)$, $\varphi \mapsto \Phi(\rho, \pi/2 + \varphi)$ при каждом фиксированном значении $\rho > 0$.

1. Сначала рассмотрим все ненулевые решения данной системы, начинающиеся на кривой (четырёхлепестковая роза Гранди единичного радиуса [15])

$$\Gamma \equiv \{(\rho, \varphi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} : \rho = |\sin(2\varphi)|\}. \quad (9)$$

Каждое такое решение является стационарным в силу наличия в правой части системы (5) множителя $(\rho^2 - \sin^2(2\varphi))^2$, следовательно, кривая Γ целиком заполнена особыми точками.

2. Рассмотрим ненулевые решения, начинающиеся в области (внутренность лепестков розы Гранди)

$$D^\bullet \equiv \{(\rho, \varphi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} : \rho < |\sin(2\varphi)|\}.$$

В этой области система (5) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = -\rho^2(\rho^2 - \sin^2(2\varphi))^2 \begin{pmatrix} \rho - |\sin(2\varphi)| - 2\cos^2(2\varphi) \\ -\operatorname{sgn}(\sin(2\varphi)) \cos(2\varphi) \end{pmatrix},$$

следовательно, качественное поведение таких решений точно такое же, как соответствующих (т.е. начинающихся в тех же точках) решений системы

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \rho - |\sin 2\varphi| - 2\cos^2 2\varphi \\ -\operatorname{sgn}(\sin 2\varphi) \cos 2\varphi \end{pmatrix},$$

у которой

– на кривой Γ имеется ровно четыре особые точки — те, что образуют на плоскости переменных (x_1, x_2) квадрат с вершинами в точках $(\pm 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ и $(\pm 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$;

– каждое из остальных решений, начинающихся на кривой Γ , притягивается асимптотически при $t \rightarrow +\infty$ к какой-либо из этих четырёх особых точек, поскольку его фазовая кривая целиком лежит на этой кривой и на ней же справедливо неравенство

$$\dot{\rho} = 2 \cos^2(2\varphi) > 0, \quad (\rho, \varphi) \in \Gamma, \quad |\cos \varphi| \neq 1/\sqrt{2};$$

– любое решение, начинающееся внутри области $D^\bullet$, в силу ограниченности $D^\bullet$, справедливости неравенства

$$0 < -(\rho - |\sin(2\varphi)|) \leq -(\rho - |\sin(2\varphi)|) + 2 \cos^2(2\varphi) = \dot{\rho}, \quad (\rho, \varphi) \in D^\bullet,$$

и теоремы существования и единственности решения задачи Коши (см., например, [16, гл. 2]) тоже асимптотически притягивается к одной из четырёх перечисленных выше особых точек при $t \rightarrow +\infty$.

3. Обозначим

$$\gamma \equiv \{(\rho, \varphi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} : |\cos \varphi| < 1/2, \psi(\rho, \varphi) = 0\}$$

и рассмотрим решения, начинающиеся в области (часть внешней области лепестков розы Гранди, содержащая ось координат x_1)

$$D_1^\circ \equiv D_{1,1}^\circ \sqcup D_{1,2}^\circ, \quad D_{1,1}^\circ \equiv \{(\rho, \varphi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} : \rho > |\sin(2\varphi)|, |\cos \varphi| < 1/2, \psi(\rho, \varphi) < 0\}, \\ D_{1,2}^\circ \equiv \{(\rho, \varphi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} : \rho > |\sin(2\varphi)|, |\cos \varphi| \geq 1/2\}.$$

В этой области система (5) имеет решения двух типов.

Тун 1. Решения, удовлетворяющие начальному условию $\sin \varphi(0) = 0$, стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$, поскольку их фазовые кривые лежат на оси координат x_1 и на ней справедливо неравенство $\dot{\rho} = -2\rho^{10} < 0$.

Тун 2. В области D_1° система (5) записывается как

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = -\rho^2(\rho^2 - \sin^2(2\varphi))^2 \begin{pmatrix} 2\rho^4 \cos(2\varphi) \\ \rho^3 \sin(2\varphi) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Из (10) при помощи деления одного уравнения на другое и интегрирования находим, что в этой области все фазовые кривые системы (5) имеют вид

$$r = C \sin(2\varphi), \quad C > 0,$$

т.е. являются дугами концентрических лепестков роз Гранди разных радиусов. Отсюда и из справедливости при $(\rho, \varphi) \in D_1^\circ$ оценок

$$\operatorname{sgn} \dot{\varphi} = \operatorname{sgn}(-\rho^5(\rho^2 - \sin^2(2\varphi))^2 \sin(2\varphi)) = -\operatorname{sgn}(\sin(2\varphi)) = \begin{cases} -1, & \sin(2\varphi) > 0, \\ 1, & \sin(2\varphi) < 0 \end{cases}$$

следует, что все решения системы (5), начинающиеся в области D_1° , стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

4. Наконец, рассмотрим решения, начинающиеся в области (часть внешней области лепестков розы Гранди, содержащая ось координат x_2)

$$D_2^\circ \equiv \{(\rho, \varphi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} : \rho > |\sin(2\varphi)|, |\cos \varphi| < 1/2, \psi(\rho, \varphi) > 0\}.$$

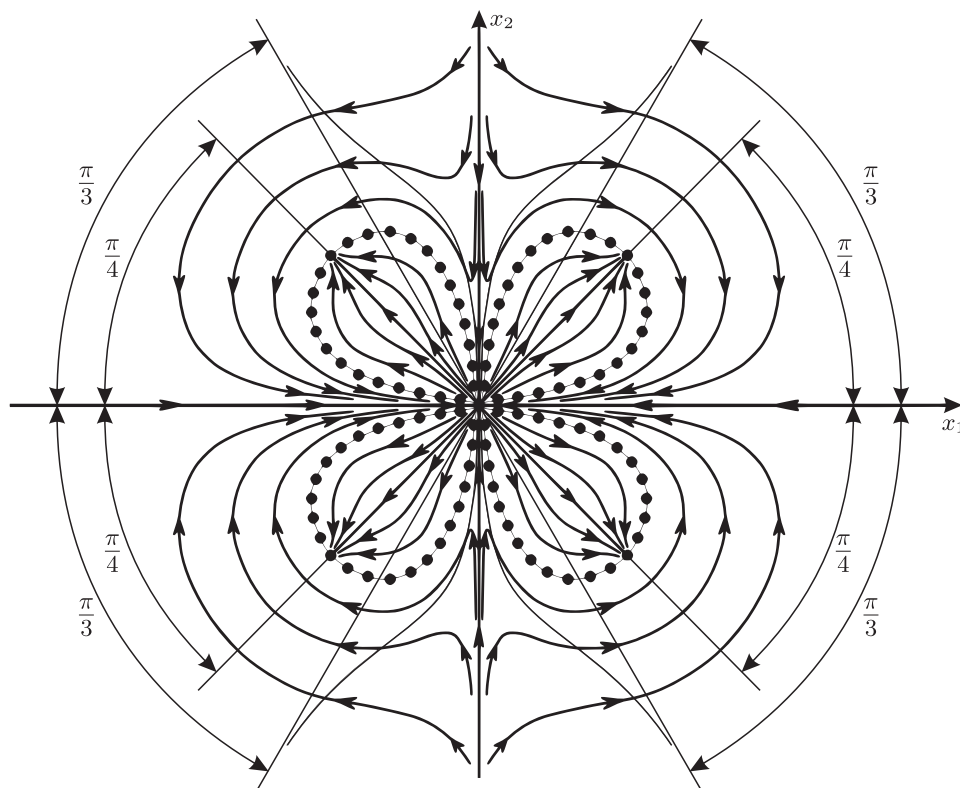


Рисунок. Фазовый портрет системы (5).

В области D_2° система (5) записывается в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = -\rho^2(\rho^2 - \sin^2(2\varphi))^2 \begin{pmatrix} 2\rho^4 \cos(2\varphi) + 768\psi^2(\rho, \varphi) \\ \rho^3 \sin(2\varphi) \end{pmatrix}$$

и, следовательно, имеет решения двух типов.

Тип 3. Решения, удовлетворяющие начальному условию $\cos \varphi(0) = 0$, стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$, поскольку их фазовые кривые лежат на оси координат x_2 и на ней справедливо неравенство $\dot{\rho} = -\rho^{10} < 0$.

Тип 4. Рассмотрим решения, удовлетворяющие начальному условию $\cos \varphi(0) \neq 0$. Из справедливости при $(\rho, \varphi) \in D_2^\circ$ оценок

$$\dot{\rho} < -2\rho^6(\rho^2 - \sin^2(2\varphi))^2 \cos(2\varphi), \quad \operatorname{sgn} \dot{\varphi} = \operatorname{sgn}(-\rho^5(\rho^2 - \sin^2(2\varphi))^2 \sin(2\varphi)) = \begin{cases} -1, & \sin(2\varphi) > 0, \\ 1, & \sin(2\varphi) < 0 \end{cases}$$

(первая из которых означает, что радиальная скорость $\dot{\rho}$ решений в области D_2° строго меньше одноимённой величины для решений системы (10), рассматриваемой также и в области D_2°), а также ограниченности всех решений системы (10) в области D_2° (которая, в свою очередь, доказывается рассуждениями, аналогичными проделанным в области D_1°) следует, что каждое решение системы (5) такого типа (а точнее, его фазовая кривая) в некоторый момент $t > 0$ обязательно пересечёт кривую γ и войдет в область D_1° . Отсюда и из исследованного выше качественного поведения решений в области D_1° следует, что решения данного типа тоже стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

Этап II. Обозначим через $f \equiv (f_1, f_2): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ правую часть системы (5), записанной при помощи формул (4) в декартовых координатах (x_1, x_2) , и рассмотрим для произвольного натурального числа $n > 1$ дифференциальную систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(y_1, \sqrt{y_2^2 + \dots + y_n^2}), \\ \dot{y}_i = f_2(y_1, \sqrt{y_2^2 + \dots + y_n^2}) \frac{y_i}{\sqrt{y_2^2 + \dots + y_n^2}}, \end{cases} \quad i = \overline{2, n}, \quad y \equiv (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad (11)$$

которая является системой вида (1) (и к тому же ещё и автономной), а также обладает нулевым линейным приближением вдоль нулевого решения, поскольку, во-первых, этими же свойствами обладает система (5), а во-вторых, существуют непрерывно дифференцируемые функции $h_i: \tilde{D}_1^\circ \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие условиям

$$f_i(u_1, u_2) = u_i h_i(u_1, u_2^2), \quad i = 1, 2, \quad (u_1, u_2) \in \tilde{D}_1^\circ \equiv \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: (\rho, \varphi) \in D_1^\circ\}.$$

Существование функций h_i , $i = 1, 2$, с указанными свойствами устанавливается непосредственными вычислениями.

5. Рассмотрим сначала решения y системы (11), удовлетворяющие начальному условию $y_3^2(0) + \dots + y_n^2(0) = 0$.

Точки $(0, \dots, 0)^T$, $(\pm 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, \dots, 0)^T$ и $(\pm 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, \dots, 0)^T$ обращают в нуль векторное поле, заданное равенствами (11), поэтому они являются особыми для рассматриваемой системы.

В двумерной плоскости

$$\Pi_{3, \dots, n} \equiv \{y \in \mathbb{R}^n: y_3 = \dots = y_n = 0\}$$

система (11) имеет такой же вид, как и система (5), записанная при помощи формул (4) в декартовых координатах (x_1, x_2) . Отсюда следует, что фазовые кривые таких решений целиком лежат в плоскости $\Pi_{3, \dots, n}$ и, следовательно, их качественное поведение в точности такое же, как и поведение решений системы (5).

6. Далее рассмотрим решения y , удовлетворяющие условию $y_3^2(0) + \dots + y_n^2(0) \neq 0$, которое эквивалентно существованию такого индекса i_0 , что

$$y_{i_0}(0) \neq 0 \quad \text{и} \quad 3 \leq i_0 \leq n.$$

С помощью интегрирования находим, что функции

$$\Psi_j(y) \equiv y_j / y_{i_0}, \quad j = \overline{2, n}, \quad j \neq i_0,$$

постоянны вдоль решений y системы (11) (являются её первыми интегралами), откуда

$$y_j = C_j y_{i_0}, \quad C_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{2, n}, \quad j \neq i_0.$$

Подставив эти равенства в систему (11) и сделав замену переменных

$$z_j = y_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad j \neq i_0, \quad z_{i_0} = C_0 y_{i_0}, \quad C_0 \equiv \left(1 + \sum_{j=2, j \neq i_0}^n C_j^2\right)^{1/2},$$

получим в двумерной плоскости

$$\Pi_{i_0; C_1, \dots, C_n} \equiv \left\{z \in \mathbb{R}^n: z_j = \frac{C_j}{C_0} z_{i_0}, \quad j = \overline{2, n}, \quad j \neq i_0\right\}$$

дифференциальную систему такого же вида, как и система (5), записанная в декартовых координатах (x_1, x_2) .

Итак, из сказанного выше следует полное описание качественного поведения всех решений системы (11):

– фазовая кривая каждого решения является плоской и лежит либо в плоскости, задаваемой условием $y_3^2 = \dots = y_n^2 = 0$, либо в некоторой плоскости вида $\Pi_{i_0; C_1, \dots, C_n}$, либо во всех таких плоскостях сразу (для решений, удовлетворяющих начальному условию $y_2^2(0) + \dots + y_n^2(0) = 0$);

– в каждой такой плоскости имеются решения трёх типов: а) петли роз Гранди единичного радиуса целиком заполнены особыми точками; б) ненулевые решения, начинающиеся внутри петель единичных роз Гранди, стремятся при $t \rightarrow +\infty$ к наиболее удалённым от нуля особым точкам из п. а); в) решения, начинающиеся снаружи петель, стремятся при неограниченном росте времени к точке $(0, \dots, 0)^T$.

Отсюда и из касания в нуле петель роз Гранди, лежащих в двумерной плоскости переменных (y_1, y_2) , осей координат y_1 и y_2 (а значит, в силу построения системы (11) и касания соответствующих петель в соответствующих полуплоскостях вида $\Pi_{i_0; C_1, \dots, C_n}$, лежащих в ней оси координат y_1 и ортогональной ей прямой) следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность профессору И.Н. Сергееву за ценные замечания, способствовавшие значительному улучшению текста работы.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (проект 22-8-10-3-1).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости / Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий. — М. : Наука, 1966. — 576 с.
2. Филиппов, А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений / А.Ф. Филиппов. — 2-е изд., испр. — М. : КомКнига, 2007. — 240 с.
3. Сергеев, И.Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 6. — С. 855–856.
4. Сергеев, И.Н. Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 11. — С. 1556–1557.
5. Бондарев, А.А. Пример полной, но не глобальной неустойчивости по Перрону / А.А. Бондарев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2021. — № 2. — С. 43–47.
6. Бондарев, А.А. Пример дифференциальной системы с перроновской и верхнепредельной полной неустойчивостью, но массивной частной устойчивостью / А.А. Бондарев // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 2. — С. 147–152.
7. Бондарев, А.А. О существовании дифференциальной системы с ляпуновской глобальной неустойчивостью, все решения которой стремятся к нулю при неограниченном росте времени / А.А. Бондарев // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 8. — С. 1011–1019.
8. Bondarev A.A. An example of contrasting combination to stability and instability properties in even-dimensional spaces / A.A. Bondarev // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. — 2022. — V. 87. — P. 25–36.

9. Бондарев, А.А. Примеры дифференциальных систем с контрастными сочетаниями ляпуновских, перроновских и верхнепределных свойств / А.А. Бондарев, И.Н. Сергеев // Докл. РАН. Математика. Информатика. Процессы управления. — 2022. — Т. 506. — С. 25–29.
10. Бондарев, А.А. Два контрастных примера многомерных дифференциальных систем с ляпуновской крайней неустойчивостью / А.А. Бондарев // Мат. заметки. — 2024. — Т. 115, № 1. — С. 24–42.
11. Сергеев, И.Н. Ляпуновские, перроновские и верхнепределные свойства устойчивости автономных дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. — 2020. — Т. 56, № 2. — С. 63–78.
12. Сергеев, И.Н. Определение и свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения / И.Н. Сергеев // Мат. заметки. — 2023. — Т. 113, № 6. — С. 895–904.
13. Сергеев, И.Н. Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 11. — С. 1576–1578.
14. Сергеев, И.Н. О перроновских, ляпуновских и верхнепределных свойствах устойчивости дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. — 2023. — Т. 33. — С. 353–423.
15. Grandi, G. *Florum geometricorum manipulus* / G. Grandi // Philosophical Transactions. — 1723. — V. 32. — P. 355–371.
16. Сергеев, И.Н. Лекции по дифференциальным уравнениям / И.Н. Сергеев. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2019. — 304 с.

MULTIDIMENSIONAL AUTONOMOUS DIFFERENTIAL SYSTEM WITH UNIT MEASURE OF INSTABILITY AND MASSIVE PARTICULAR STABILITY

A. A. Bondarev

*Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: albondarev1998@yandex.ru*

An example of non-one-dimensional autonomous differential system is constructed, in which, on the one hand, all solutions starting in the exterior of the unit ball, tend to zero with unlimited growth of time, and on the other hand, a relative measure of the initial conditions of those solutions that begin in the ball with a center at the zero and move away from it at a sufficient distance with increasing time, approaches arbitrary close to unity as the radius of the ball tends to zero. The nonlinear system constructed in this work also has a zero linear approximation along the zero solution.

Keywords: differential system, nonlinear system, autonomous system, Lyapunov stability, Perron stability, upper-limit stability, measure of stability, asymptotic properties of solutions.

FUNDING

This work was carried out with support from the Foundation for the Development of Theoretical Physics and Mathematics “BASIS” (project no. 22-8-10-3-1).

REFERENCES

1. Bylov, B.F., Vinograd, R.E., Grobman, D.M., and Nemytskii, V.V., *Teoriya pokazatelej Lyapunova i ego pri-lozheniya k voprosam ustojchivosti* (The Theory of Lyapunov Exponents and its Applications to Problems of Stability), Moscow: Nauka, 1966.
2. Filippov, A.F., *Vvedenie v teoriyu differencial'nyx uravnenij* (Introduction to the Theory of Differential Equations), Moscow: KomKniga, 2007.
3. Sergeev, I.N., Definition of the Perron stability and its relationship with the Lyapunov stability, *Differ. Uravn.*, 2018, vol. 54, no. 6, pp. 855–856.
4. Sergeev, I.N., Definition of upper-limit stability and its relationship with Lyapunov stability and Perron stability, *Differ. Uravn.*, 2020, vol. 56, no. 11, pp. 1556–1557.

5. Bondarev, A.A., An example of complete but not global Perron instability, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, 2021, no. 2, pp. 78–82.
6. Bondarev, A.A., Example of a differential system with complete Perron and upper-limit instability but massive partial stability, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 2, pp. 147–153.
7. Bondarev, A.A., On the existence of a globally Lyapunov unstable differential system all of whose solutions tend to zero as time tends to infinity, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 8, pp. 999–1007.
8. Bondarev, A.A., An example of contrasting combination to stability and instability properties in even-dimensional spaces, *Mem. Differ. Equat. Math. Phys.*, 2022, vol. 87, pp. 25–36.
9. Bondarev, A.A., Sergeev, I.N., Examples of differential systems with contrasting combinations of Lyapunov, Perron, and upper-limit properties, *Dokl. Math.*, 2022, vol. 106, no. 2, pp. 322–325.
10. Bondarev, A.A., Two contrasting examples of multidimensional differential systems with Lyapunov extreme instability, *Math. Notes*, 2024, vol. 115, no. 1, pp. 21–36.
11. Sergeev, I.N., Lyapunov, Perron and upper-limit stability properties of autonomous differential system, *Izv. IMI UdGU*, 2020, vol. 56, pp. 63–78.
12. Sergeev, I.N., Definition and properties of measures of stability and instability of zero solution of a differential system, *Math. Notes*, 2023, vol. 113, no. 6, pp. 831–839.
13. Sergeev, I.N., Massive and almost massive properties of stability and instability of differential systems, *Differ. Uravn.*, 2021, vol. 57, no. 11, pp. 1576–1578.
14. Sergeev, I.N., On the Perron, Lyapunov and upper-limit stability properties of differential systems, *Trudy sem. im. I.G. Petrovskogo*, 2023, vol. 33, pp. 353–423.
15. Grandi, G., *Florum geometricorum manipulus*, *Philosophical Transactions*, 1723, vol. 32, pp. 355–371.
16. Sergeev, I.N., *Lekcii po differentsial'nykh uravneniyam* (Lectures on Differential Equations), Moscow: Izd. Mosk. Gos. Univ., 2019.