

УДК 519.642.2

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПО ПОРЯДКУ ПРЯМОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОСОБЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© Н. С. Габбасов

*Набережночелнинский институт Казанского (Приволжского) федерального университета**e-mail: gabbasovnazim@rambler.ru**Поступила в редакцию 28.12.2023 г., после доработки 28.12.2023 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.*

Найдено приближённое решение линейного интегро-дифференциального уравнения с особым дифференциальным оператором в главной части в пространстве обобщённых функций. Предложен обобщённый сплайн-метод и установлена его оптимальность по порядку точности.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, приближённое решение, прямой метод.

DOI: 10.31857/S0374064124070036, EDN: KOELLS

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Работа посвящена поиску приближённого решения линейного интегро-дифференциального уравнения (ИДУ)

$$(Ax)(t) \equiv x^{(p)}(t) \prod_{j=1}^q (t-t_j)^{m_j} + \int_{-1}^1 K(t,s)x(s) ds = y(t), \quad (1)$$

в котором $t \in I \equiv [-1, 1]$, числа $t_j \in (-1, 1)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, q}$, и $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ фиксированные; K и y — известные непрерывные функции, обладающие определёнными свойствами гладкости точечного характера, а x — искомая функция.

Очевидно, что задача об отыскании решения ИДУ (1) в классе обычных гладких функций является некорректно поставленной, поэтому важно построить основные пространства, которые обеспечат корректность данной задачи. При этом следует учитывать, что в случае $p = 0$ ИДУ (1) преобразуется в линейное интегральное уравнение третьего рода (ИУТР) (так что в этом смысле эти уравнения являются “родственными”). Хорошо известно, что ИУТР находят все более широкое применение в приложениях, в частности, встречаются в ряде задач теорий упругости, переноса нейтронов, рассеяния частиц (см., например, [1; 2, с. 121–129] и приведённую в них библиографию), в теории уравнений смешанного типа [3], а также в теории сингулярных интегральных уравнений с вырождающимся символом [4]. Как правило, естественными классами решений ИУТР являются специальные пространства обобщённых функций типа D или V . Под D (соответственно V) понимается пространство обобщённых функций, построенных с помощью дельта-функции Дирака (соответственно с помощью конечной части интеграла по Адамару). Подробный обзор полученных результатов и обширную библиографию по ИУТР можно найти в монографии [5, с. 3–11, 168–173] и в диссертации [6, с. 3–6, 106–114]. На основе упомянутой выше связи между ИДУ (1) и

ИУТР соответствующие идеи и результаты для ИУТР можно успешно использовать для корректной постановки задачи (1), разработки и теоретического обоснования приближённых методов решения ИДУ (1) в пространствах обобщённых функций типа D и V .

ИДУ (1) при $q = 1$, $t_1 = 0$ исследовано в работе [7, с. 25–43], где с использованием известных результатов по ИУТР построена теория Нётера для такого уравнения в классах гладких и обобщённых функций типа D . В статье [8] построена полная теория разрешимости общего ИДУ (1) в некотором пространстве типа D (фредгольмовость уравнения, условия разрешимости, алгоритм отыскания точного решения, достаточные условия непрерывной обратимости оператора A). Следует отметить, что исследуемые ИДУ точно решаются лишь в очень редких частных случаях, поэтому особенно актуальна разработка эффективных методов их приближённого решения в пространствах обобщённых функций с соответствующим теоретическим обоснованием. В работах [8–11] предложены и обоснованы прямые проекционные методы приближённого решения ИДУ вида (1), основанные на применении стандартных и некоторых специальных полиномов.

В настоящей статье для приближённого решения ИДУ (1) в пространстве типа D предложен новый вариант обобщённого метода коллокации, основанный на использовании кубических сплайнов минимального дефекта. Проведено теоретическое обоснование разработанного метода в смысле [12, гл. 1, §§ 1–5] и установлено, что он оптимален по порядку точности на некотором классе F гладких функций среди всех прямых проекционных методов решения исследуемых уравнений в пространстве обобщённых функций.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. ПРОСТРАНСТВА ОСНОВНЫХ И ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $C \equiv C(I)$ — банахово пространство всех непрерывных на отрезке I функций с обычной тах-нормой и $m \in \mathbb{N}$. Обозначим через $C\{m; 0\} \equiv C_0^{\{m\}}(I)$ семейство всех функций $f \in C$, имеющих в точке $t = 0$ тейлоровскую производную $f^{\{m\}}(0)$ порядка m (см., например, [13]). Назовём его *классом точечно-гладких функций* (естественно считаем, что $C\{0; 0\} \equiv C$). Построим теперь *основное* пространство

$$Y \equiv C\{m, p; 0\} \equiv \{y \in C\{m; 0\} : y^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{0, p-1}\}$$

(число $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ удовлетворяет неравенству $p < m$), снабдив его нормой

$$\|y\|_Y \equiv \|Ty\|_C + \sum_{i=p}^{m-1} |y^{\{i\}}(0)|, \quad (2)$$

где $T: Y \rightarrow C$ — *характеристический оператор* пространства Y , определённый следующим образом:

$$(Ty)(t) \equiv \left[y(t) - \sum_{i=p}^{m-1} y^{\{i\}}(0) \frac{t^i}{i!} \right] t^{-m} \equiv H(t) \in C, \quad H(0) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} H(t).$$

Лемма 1 [8]. Включение $y \in Y$ означает, что

$$y(t) = t^m H(t) + \sum_{i=p}^{m-1} \alpha_i t^i, \quad (3)$$

причём $Ty = H \in C$ с точностью до устранимого разрыва в точке $t = 0$, а $y^{\{i\}}(0) = \alpha_i i!$, $i = \overline{p, m-1}$.

Пространство Y по норме (2) полно и нормально вложено в пространство C .

Обозначим через $C^{(p)} \equiv C^{(p)}(I)$ векторное пространство p раз непрерывно дифференцируемых на отрезке I функций и введём в нём специальную норму

$$\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C + \sum_{i=0}^{p-1} |z^{(i)}(-1)|, \quad z \in C^{(p)}, \quad Dz \equiv z^{(p)}(t) \in C. \quad (4)$$

Лемма 2 [8]. Пространство $C^{(p)}$ с нормой (4) полно и нормально вложено в пространство C .

Следствие. Традиционная норма $\|\cdot\|_{C^{(p)}}$ в пространстве $C^{(p)}$ и норма (4) эквивалентны, т.е. существует постоянная $d \geq 1$ такая, что $\|z\|_{(p)} \leq \|z\|_{C^{(p)}} \leq d\|z\|_{(p)}$ для любой функции $z \in C^{(p)}$, где $\|z\|_{C^{(p)}} \equiv \sum_{i=0}^p \|z^{(i)}\|_C$.

Пусть $C_{-1}^{(p)} \equiv C_{-1}^{(p)}(I) \equiv \{z \in C^{(p)} : z^{(i)}(-1) = 0, i = \overline{0, p-1}\}$ — банахово пространство гладких функций с нормой $\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C$.

Теперь над пространством Y основных функций построим семейство $X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ обобщённых функций $x(t)$ вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \gamma_i \delta^{\{i\}}(t), \quad (5)$$

где $t \in I$, $z \in C_{-1}^{(p)}$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные, а δ и $\delta^{\{i\}}$ — соответственно, дельта-функция Дирака и её “тейлоровские” производные, действующие на пространстве Y основных функций согласно следующему правилу:

$$(\delta^{\{i\}}, y) \equiv \int_{-1}^1 \delta^{\{i\}}(t) y(t) dt \equiv (-1)^i y^{\{i\}}(0), \quad y \in Y, \quad i = \overline{0, m-p-1}. \quad (6)$$

Очевидно, что векторное пространство X является банаховым относительно нормы

$$\|x\|_X \equiv \|z\|_{(p)} + \sum_{i=0}^{m-p-1} |\gamma_i|. \quad (7)$$

2.2. СПЛАЙНОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ТОЧЕЧНО-ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим вопрос о приближении элементов основного пространства $Y \equiv C\{m, p; 0\}$ с использованием кубических сплайнов.

Зададим на отрезке I равномерную сетку

$$\Delta_n: -1 \equiv s_0 < s_1 < \dots < s_n \equiv 1, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (8)$$

где $s_k \equiv -1 + 2k/n$, $k = \overline{0, n}$, и на ней рассмотрим кубический сплайн

$$z_n(t) \equiv \sum_{i=-1}^{n+1} c_i B_i(t), \quad c_i \in \mathbb{R},$$

удовлетворяющий краевым условиям

$$z_n^{(3)}(s_j - 0) = z_n^{(3)}(s_j + 0), \quad j = 1, n-1. \quad (9)$$

Здесь базисные функции $B_i(t)$ — В-сплайны с носителем (s_{i-2}, s_{i+2}) (см., например, [14, гл. 3, § 8]). Для определения всех функций $B_i(t)$ сетку (8) дополним равномерно расположенными узлами: $s_{-3} < s_{-2} < s_{-1} < s_0 \equiv -1$, $1 \equiv s_n < s_{n+1} < s_{n+2} < s_{n+3}$. Обозначим через S_n^3 пространство всех кубических сплайнов $z_n(t)$ на сетке Δ_n , обладающих свойством (9), с нормой $\|z_n\|_C$. Далее, пусть $P_n: C \rightarrow S_n^3$ — оператор, который всякой функции $f \in C$ ставит в соответствие её интерполяционный кубический сплайн $P_nf \in S_n^3$ с условием (9) такой, что $(P_nf)(s_i) = f(s_i)$, $i = \overline{0, n}$. В книге [14, гл. 3, теорема 3.1] доказаны существование и единственность интерполяционного кубического сплайна при различных краевых условиях и приведён алгоритм построения таких сплайнов, а также особо отмечено [14, гл. 3, § 5], что при приближении кубическими сплайнами выбор краевых условий (9) является наиболее удачным.

Из теорем 9, 10, 13 в [15, гл. 2, § 4] и леммы 2 в [16] как следствие вытекает

Лемма 3. Пусть $r = \overline{1, 4}$ и $f \in C^{(r)} \equiv C^{(r)}(I)$. Тогда

$$\|P_nf - f\|_C = O(n^{-r}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Обозначим через $Y_n \equiv U(S_n^3) \oplus \text{span}\{t^i\}_p^{m-1}$ $(n+m-p+3)$ -мерное подпространство пространства Y , где $(Ug)(t) \equiv t^m g(t)$. Введём в рассмотрение оператор $\Gamma_n \equiv \Gamma_{n+m-p+3}: Y \rightarrow Y_n$, относящий к любой функции $y \in Y$ обобщённый сплайн $\Gamma_n y \in Y_n$, определяемый условиями

$$\begin{aligned} (T\Gamma_n y - Ty)(s_k) &= 0, \quad (\Gamma_n y - y)^{\{i\}}(0) = 0, \quad k = \overline{0, n}, \quad i = \overline{p, m-1}, \\ (T\Gamma_n y)^{(3)}(s_j - 0) &= (T\Gamma_n y)^{(3)}(s_j + 0), \quad j = 1, n-1. \end{aligned}$$

Рассуждая так же, как и в [5, гл. 1, с. 29–30], несложно получить представление

$$\Gamma_n y \equiv \Gamma_{n+m-p+3}(y; t) = (UP_n Ty)(t) + \sum_{i=p}^{m-1} y^{\{i\}}(0) \frac{t^i}{i!}. \quad (11)$$

Лемма 4. Γ_n — проектор в пространстве Y .

Данное свойство сразу следует из (11), равенства $P_n^2 = P_n$ и леммы 1.5.1 [5, с. 28].

Далее будем использовать обозначение $YC^{(r)} \equiv \{y \in Y: Ty \in C^{(r)}\}$, где $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, причём $YC^{(0)} \equiv Y \equiv C\{m, p; 0\}$.

Следующее утверждение характеризует скорость сходимости обобщённых интерполяционных сплайнов к интерполируемой функции.

Лемма 5. Если $y \in YC^{(r)}$, $r = \overline{1, 4}$, то

$$\|\Gamma_n y - y\|_Y = O(n^{-r}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Доказательство. В силу (2), (3), (11) и леммы 3 последовательно находим

$$\|\Gamma_n y - y\|_Y = \|U(P_n Ty - Ty)\|_Y \equiv \|P_n Ty - Ty\|_C = O(n^{-r}).$$

Замечание 1. Очевидно, что из оценки (12) и хорошо известной теоремы Банаха–Штейнгауза следует равномерная ограниченность норм операторов Γ_n : $\|\Gamma_n\| = O(1)$, $n \rightarrow \infty$.

2.3. ОБОБЩЁННЫЙ МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ С КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

Для сокращения громоздких выкладок и упрощения формулировок, не ограничивая при этом общности идей, методов и результатов, всюду в дальнейшем будем считать, что в ИДУ (1) $q=1$, $t_1=0$, т.е. рассмотрим ИДУ вида

$$(Ax)(t) \equiv (Vx)(t) + (Kx)(t) = y(t), \quad t \in I, \quad (13)$$

$$V \equiv UD, \quad Df \equiv f^{(p)}(t), \quad Ug \equiv t^m g(t), \quad Kx \equiv \int_{-1}^1 K(t, s)x(s) ds,$$

где $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$, $p < m$, $y \in Y$, ядро K обладает следующими свойствами:

$$K(\cdot, s) \in C, \quad K(t, \cdot) \in Y, \quad \psi_i(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t, 0) \in Y, \quad i = \overline{0, m-p-1}, \quad (14)$$

$x \in X$ — искомый элемент. Фредгольмовость и достаточные условия непрерывной обратимости оператора $A: X \rightarrow Y$ установлены в работе [8], там же указан метод отыскания точного решения ИДУ (1) в классе X .

Приближённое решение ИДУ (13) строим в виде агрегата

$$x_n \equiv x_n(t; \{c_j\}) \equiv g_n(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} c_{i+n+2} \delta^{\{i\}}(t), \quad (15)$$

$$g_n \equiv (Jz_n)(t), \quad z_n(t) \equiv \sum_{i=-1}^{n+1} c_i B_i(t), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (16)$$

где

$$Jz \equiv (J_{p-1}z)(t) \equiv ((p-1)!)^{-1} \int_{-1}^t (t-s)^{p-1} z(s) ds;$$

при этом $J: C \rightarrow C^{(p)}$, $(Jz)^{(i)} = J_{p-i-1}z$, $i = \overline{0, p-1}$, $DJz = z$. Неизвестные параметры $c_j = c_j^{(n)}$, $j = \overline{-1, n+m-p+1}$, найдём из квадратной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $(n+m-p+3)$ -го порядка

$$(T\rho_n)(s_k) = 0, \quad k = \overline{0, n}; \quad \rho_n^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{p, m-1};$$

$$(DTUx_n)^{(3)}(s_j - 0) = (DTUx_n)^{(3)}(s_j + 0), \quad j = 1, n-1, \quad (17)$$

где $\rho_n(t) \equiv \rho_n^A(t) \equiv (Ax_n - y)(t)$ — невязка приближённого решения, а $\{s_k\}_0^n$ — использованная выше система узлов коллокации, порождающая сетку (8).

Следуя работе [17], примем соглашения, полезные при оформлении результатов по обоснованию приближённых методов. Во-первых, стандартное утверждение “при всех $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, СЛАУ (17) имеет единственное решение $\{c_j^*\}$ и последовательность приближённых решений $x_n^* \equiv x_n(t; \{c_j^*\})$ сходится к точному решению $x^* = A^{-1}y$ уравнения (13) по норме пространства X ” заменим простой фразой “метод (15)–(17) обоснованно применим к уравнению (13)”. Во-вторых, для погрешности приближённого решения введём специальное обозначение $\Delta x_n^* \equiv \|x_n^* - x^*\|_X$, оценка этой величины определяет скорость сходимости приближённых решений x_n^* к точному решению x^* уравнения (13).

Относительно обоснования вычислительного алгоритма (13)–(17) справедлива

Теорема 1. Пусть однородное ИДУ $Ax = 0$ имеет в пространстве X лишь нулевое решение (например, в условиях теоремы 2 из [8]), а исходные данные таковы, что $K \in YC^{(r)}$ (по t), $\psi_i \in YC^{(r)}$, $i = \overline{0, m-p-1}$, $y \in YC^{(r)}$, $r = \overline{1, 4}$. Тогда прямой метод (15)–(17) обоснованно применим к уравнению (13), причём

$$\Delta x_n^* = O(n^{-r}), \quad r = \overline{1, 4}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Доказательство. Очевидно, что в условиях данной теоремы ИДУ (13) представимо в виде линейного операторного уравнения

$$Ax \equiv Vx + Kx = y, \quad x \in X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}, \quad y \in Y, \quad (19)$$

в котором оператор $A: X \rightarrow Y$ непрерывно обратим.

Систему (15)–(17) требуется записать также в операторной форме. Для этого построим конечномерные подпространства основных пространств

$$X \supset X_n \equiv J(S_n^3) \oplus \text{span}\{\delta^{\{i\}}(t)\}_{0}^{m-p-1}, \quad Y \supset Y_n \equiv U(S_n^3) \oplus \text{span}\{t^i\}_p^{m-1}.$$

Тогда, используя соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 4.3.1 в [5, с. 123–124], несложно показать, что вычислительная схема (15)–(17) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv \Gamma_n A x_n = \Gamma_n y, \quad x_n \in X_n, \quad \Gamma_n y \in Y_n, \quad (20)$$

где $\Gamma_n: Y \rightarrow Y_n$ — сплайновый оператор, введённый в п. 2.2.

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно установить существование, единственность и сходимость решений уравнений (20).

Уточним структуру аппроксимирующего уравнения (20). Поскольку в силу леммы 4 $\Gamma_n^2 = \Gamma_n$, имеем $\Gamma_n V x_n = V x_n \in Y_n$ при любом элементе $x_n \in X_n$. Следовательно, вычислительный алгоритм (15)–(17) равносильен линейному уравнению вида

$$A_n x_n \equiv V x_n + \Gamma_n K x_n = \Gamma_n y, \quad x_n \in X_n, \quad \Gamma_n y \in Y_n. \quad (21)$$

Покажем теперь “близость” операторов A и A_n на подпространстве X_n в условиях (14). Используя уравнения (19) и (21), представления (3) и (11), норму (2), для произвольного элемента $x_n \in X_n$ находим

$$\|A x_n - A_n x_n\|_Y = \|K x_n - \Gamma_n K x_n\|_Y = \|T K x_n - P_n T K x_n\|_C. \quad (22)$$

На основании (5), (6), (13) и (14) имеем

$$(Kx)(t) = (Kz)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i \gamma_i \psi_i(t).$$

Следовательно, в силу (15) справедливо равенство

$$(Kx_n)(t) = (Kg_n)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i c_{i+n+2} \psi_i(t),$$

откуда вытекает, что

$$(TKx_n)(t) = \int_{-1}^1 h(t, s) g_n(s) ds + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i c_{i+n+2} f_i(t), \quad (23)$$

где $h \equiv T_t K$, $f_i \equiv T \psi_i$, $i = \overline{0, m-p-1}$.

В силу равенства (23), соотношения (10), леммы 2 и определения (7) последовательно выводим промежуточную оценку

$$\begin{aligned} \|TKx_n - P_n TKx_n\|_C &\equiv \max_{t \in I} \left| \int_{-1}^1 (h - P_n^t h)(t, s) g_n(s) ds + \sum_i (-1)^i c_{i+n+2} (f_i - P_n f_i)(t) \right| \leq \\ &\leq 2 \|g_n\|_C d_1 n^{-r} + \sum_i |c_{i+n+2}| d_1 n^{-r} \leq 2 \|g_n\|_{(p)} d_1 n^{-r} + \|x_n\|_X d_1 n^{-r} \leq d_2 n^{-r} \|x_n\|_X, \end{aligned} \quad (24)$$

где $d_2 \equiv 2d_1$, а d_1 — постоянная, не зависящая от $n \in \mathbb{N}$. Из равенств (22) и (24) следует искомая оценка “близости” операторов A и A_n :

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} \leq d_2 n^{-r}, \quad r = \overline{1, 4}. \quad (25)$$

На основании оценок (12) и (25) из теоремы 7 работы [12, с. 19] вытекает утверждение теоремы 1 с оценкой погрешности (18).

В дальнейшем при оптимизации прямых проекционных методов решения ИДУ (13) существенную роль будет играть

Теорема 2. Пусть ИДУ (13) имеет решение вида

$$x^*(t) \equiv z^*(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \gamma_i^* \delta^{\{i\}}(t), \quad Dz^* = DTUx^* \in C^{(r)}, \quad r = \overline{1, 4}, \quad (26)$$

при данном $y \in Y$ и соответствующий аппроксимирующий оператор A_n в обобщённом методе коллокации с кубическими сплайнами (ОМККС) непрерывно обратим. Тогда погрешность приближённого решения $x_n^* \in X_n$ для правой части $\Gamma_n y \in Y_n$ представима в виде

$$\Delta x_n^* = O(\|Dz^* - P_n Dz^*\|_C) = O(n^{-r}), \quad r = \overline{1, 4}. \quad (27)$$

Доказательство. В силу теоремы 6 из работы [12, с. 17] и структуры приближённого уравнения (21) имеем

$$\Delta x_n^* = O(\|\Gamma_n\| \|x^* - x_n\|_X), \quad (28)$$

где $x_n \in X_n$ — пока произвольный элемент. Выберем его следующим образом:

$$x_n(t) \equiv (JP_n DTUx^*)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \gamma_i^* \delta^{\{i\}}(t), \quad (29)$$

где P_n — интерполяционный сплайновый оператор с аппроксимативным свойством (10). Тогда требуемая оценка (27) следует из (4), (7), (10), (26), (28), (29) с учётом замечания 1:

$$\Delta x_n^* \leq d_3 \|JDz^* - JP_n Dz^*\|_X \equiv d_3 \|JDz^* - JP_n Dz^*\|_{(p)} \equiv d_3 \|Dz^* - P_n Dz^*\|_C \leq d_4 n^{-r}, \quad r = \overline{1, 4}.$$

2.4. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЯМЫХ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ИДУ

Пусть X и Y — банаховы пространства, а X_n и Y_n — их соответствующие произвольные подпространства одинаковой размерности $N = N(n) < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, причём $N \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначим через $\Lambda_n \equiv \{\lambda_n\}$ некоторое множество линейных операторов λ_n , отображающих

Y на Y_n . Далее рассмотрим два класса однозначно разрешимых линейных операторных уравнений

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y; \quad (30)$$

$$\lambda_n Ax_n = \lambda_n y, \quad x_n \in X_n, \quad \lambda_n \in \Lambda_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (31)$$

Пусть $x^* \in X$ и $x_n^* \in X_n$ — решения уравнений (30) и (31) соответственно, а $F \equiv \{f\}$ — класс известных коэффициентов (т.е. исходных данных) уравнения (30), порождающий класс $X^* \equiv \{x^*\}$ искомых элементов.

Следуя работе [12, с. 40], величину

$$V_N(F) \equiv \inf_{X_n, Y_n} \inf_{\lambda_n \in \Lambda_n} V(F; \lambda_n; X_n, Y_n), \quad (32)$$

где

$$V(F; \lambda_n; X_n, Y_n) \equiv \sup_{f \in F} V(f; \lambda_n; X_n, Y_n) = \sup_{x^* \in X^*} \|x^* - x_n^*\|_X,$$

назовём *оптимальной оценкой погрешности* всевозможных прямых проекционных методов $\lambda_n \in \Lambda_n$ решения уравнения (30) в классе F .

Определение [12, с. 40]. Пусть существуют подпространства $X_n^0 \subset X$, $Y_n^0 \subset Y$ размерности $N = N(n) < +\infty$ и операторы $\lambda_n^0: Y \rightarrow Y_n^0$, $\lambda_n^0 \in \Lambda_n$, такие, что выполняется условие

$$V_N(F) \asymp V(F; \lambda_n^0; X_n^0, Y_n^0), \quad N \rightarrow \infty, \quad (33)$$

где символ $\asymp$ означает, как обычно, слабую эквивалентность. Тогда метод (30), (31) при $X_n = X_n^0$, $Y_n = Y_n^0$ и $\lambda_n = \lambda_n^0$ называется *оптимальным по порядку точности* в классе F среди всех прямых проекционных методов $\lambda_n \in \Lambda_n$ решения уравнений (30).

Рассмотрим теперь оптимизацию по порядку точности в классе однозначно разрешимых (равномерно относительно $K \in F$) ИДУ (13) в случае, когда исходные данные принадлежат семейству $YC^{(r)}$, т.е. при $K \in YC^{(r)}$ (по t), $\psi_i(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t, 0) \in YC^{(r)}$, $i = \overline{0, m-p-1}$, $y \in YC^{(r)}$, $r = \overline{1, 4}$. Тогда в силу теоремы 2 [8] имеем

$$X^* \equiv \{x^* \in X: Ax^* = y; K, \psi_i, y \in YC^{(r)}\} = XC^{(r)},$$

где $XC^{(r)} \equiv \{x \in X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}: DTUx \in C^{(r)}\}$. Далее пусть

$$X_n^0 \equiv J(S_n^3) \oplus \text{span}\{\delta^{\{i\}}(t)\}_0^{m-p-1}, \quad Y_n^0 \equiv U(S_n^3) \oplus \text{span}\{t^i\}_p^{m-1},$$

а $\Lambda_n^0 \equiv \{\lambda_n^0\}$ — семейство всех линейных операторов $\lambda_n^0: Y \rightarrow Y_n^0$.

Теорема 3. Пусть $F = YC^{(r)}$, $\Lambda_n = \Lambda_n^0$. Тогда

$$V_N(F) \asymp N^{-r}, \quad N = n + m - p + 3, \quad r = \overline{1, 4}, \quad (34)$$

и этот оптимальный по точности порядок реализует ОМККС.

Доказательство. Пусть $\Pi_l \equiv \text{span}\{t^i\}_0^l$ — класс всех алгебраических полиномов степени не выше l и

$$L_n \equiv \Pi_{n+m-p-1}^\delta \equiv J(\Pi_{n-1}) \oplus \text{span}\{\delta^{\{i\}}(t)\}_0^{m-p-1}$$

— $(n+m-p)$ -мерное подпространство пространства X . Согласно формуле (7) введём величину

$$E_{n+m-p-1}^\delta(x) \equiv \inf_{x_n \in L_n} \|x - x_n\|_X, \quad x \in X, \quad (35)$$

называемую *наилучшим приближением* обобщённой функции $x \in X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ элементами из пространства L_n . На основании доказательства теоремы 1.5.14 из [5, с. 35] имеем, что (35) выражается через наилучшее равномерное приближение

$$E_{n+m-p-1}^\delta(x) = E_{n-1}(DTUx), \quad (36)$$

где $E_l(f)$ — наилучшее равномерное приближение функции $f \in C$ полиномами из Π_l , $l = 0, 1, 2, \dots$. Далее заметим, что из определения N -го колмогоровского поперечника $d_N(L, X)$ множества L в нормированном пространстве $X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ (см., например, [18, с. 11]) и соотношения (36) следует равенство

$$d_N(L, X) = d_{N-m+p}(DTU(L), C), \quad N > m - p,$$

откуда, с учётом $d_l(C^{(r)}, C) \asymp l^{-r}$, $l \in \mathbb{N}$ (см. [18, с. 90]), вытекает слабая эквивалентность

$$d_N(XC^{(r)}, C) \asymp N^{-r}. \quad (37)$$

Известно [12, с. 163], что $V_N(F) \geq d_N(X^*, X)$, следовательно, из (37) имеем

$$V_N(F) \geq d_N(XC^{(r)}, X) \asymp N^{-r}. \quad (38)$$

С другой стороны, в силу определения $V_N(F)$ (32) и теорем 1 и 2 находим верхнюю оценку

$$V_N(F) \leq \sup_{x^* \in XC^{(r)}} \|x^* - x_n^*\|_X = O(N^{-r}), \quad x_n^* = A_n^{-1} \Gamma_n y.$$

Отсюда и из соотношений (33), (38) получаем утверждение теоремы с оценкой (34).

Замечание 2. В силу определения нормы (7) в $X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ нетрудно заметить, что из сходимости последовательности $\{x_n^*\}$ приближённых решений к точному решению $x^* = A^{-1}y$ в метрике X следует обычная сходимость в пространстве обобщённых функций, т.е. слабая сходимость.

Замечание 3. При приближении решений операторных уравнений $Ax = y$ возникает естественный вопрос о скорости сходимости невязки $\rho_n^*(t) \equiv (Ax_n^* - y)(t)$ исследуемого метода. Один из результатов в этом направлении легко получить из теоремы 1, а именно: из неё вытекает простое следствие — если исходные данные K (по t), ψ_i и y уравнения (13) принадлежат классу $YC^{(r)}$, $r = \overline{1, 4}$, то в условиях теоремы 1 справедлива оценка $\|\rho_n^*\|_Y = O(n^{-r})$, $r = \overline{1, 4}$.

Замечание 4. Если $p = m = 0$, то ИДУ (13) преобразуется в интегральное уравнение Фредгольма второго рода в пространстве C , а предложенный вычислительный алгоритм (15)–(17) — в соответствующий метод коллокации с кубическими сплайнами для уравнения второго рода, причём $Ty \equiv y$, $h \equiv K$. Поэтому теорема 1 содержит соответствующие результаты по обоснованию данного варианта метода коллокации для приближённого решения уравнений второго рода в классе C , при этом погрешность характеризуется оценкой $\|x_n^* - x^*\|_C = O(n^{-r})$, $r = \overline{1, 4}$.

Замечание 5. Так как в условиях теоремы 1 соответствующие аппроксимирующие операторы A_n обладают свойством

$$\|A_n^{-1}\| = O(1), \quad A_n^{-1}: Y_n \rightarrow X_n, \quad n \geq n_1,$$

то ясно (см. [12, с. 23–24]), что предложенный в настоящей работе прямой метод для ИДУ (13) устойчив относительно малых возмущений исходных данных, а это позволяет найти численное решение исследуемых уравнений на ЭВМ с любой наперёд заданной точностью. Более того, если ИДУ (13) хорошо обусловлено (см., например, [12, с. 24]), то хорошо обусловленной является также СЛАУ (17).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bart, G.R. Linear integral equations of the third-kind / G.R. Bart, R.L. Warnock // SIAM J. Math. Anal. — 1973. — V. 4, № 4. — P. 609–622.
2. Кейз, К.М. Линейная теория переноса / К.М. Кейз, П.Ф. Цвайфель. — М. : Мир, 1972. — 384 с.
3. Бжихатлов, Х.Г. Об одной краевой задаче со смещением / Х.Г. Бжихатлов // Дифференц. уравнения. — 1973. — Т. 9, № 1. — С. 162–165.
4. Расламбеков, С.Н. Сингулярное интегральное уравнение первого рода в исключительном случае в классах обобщённых функций / С.Н. Расламбеков // Изв. вузов. Математика. — 1983. — № 10. — С. 51–56.
5. Габбасов, Н.С. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщённых функций / Н.С. Габбасов. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2006. — 176 с.
6. Замалиев, Р.Р. О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода с особенностями ядра : дис. ... канд. физ.-мат. наук / Р.Р. Замалиев. — Казань, 2012. — 114 с.
7. Абдурахман. Интегральное уравнение третьего рода с особым дифференциальным оператором в главной части : дис. ... канд. физ.-мат. наук / Абдурахман. — Ростов-на-Дону, 2003. — 142 с.
8. Габбасов, Н.С. Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений в особом случае / Н.С. Габбасов // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 7. — С. 889–899.
9. Габбасов, Н.С. Коллокационные методы для одного класса особых интегро-дифференциальных уравнений / Н.С. Габбасов // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 9. — С. 1234–1241.
10. Габбасов, Н.С. К приближённому решению одного класса особых интегро-дифференциальных уравнений / Н.С. Габбасов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2023. — Т. 63, № 2. — С. 263–272.
11. Габбасов, Н.С. Специальный вариант метода коллокации для одного класса интегро-дифференциальных уравнений / Н.С. Габбасов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 4. — С. 512–519.
12. Габдулхаев, Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач / Б.Г. Габдулхаев. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. — 232 с.
13. Прессдорф, З. Сингулярное интегральное уравнение с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек / З. Прессдорф // Мат. исследования. — 1972. — Т. 7, № 1. — С. 116–132.
14. Завьялов, Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. — М. : Наука, 1980. — 352 с.
15. Стечкин, С.Б. Сплайны в вычислительной математике / С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин. — М. : Наука, 1976. — 248 с.
16. Педас, А. Метод кубической сплайн-коллокации для решения слабо сингулярных интегральных уравнений / А. Педас, Э. Тимак // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, № 10. — С. 1415–1424.
17. Габбасов Н.С. К численному решению одного класса интегро-дифференциальных уравнений в особом случае / Н.С. Габбасов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2020. — Т. 60, № 10. — С. 1721–1733.
18. Даугавет, И.К. Введение в теорию приближения функций / И.К. Даугавет. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1977. — 184 с.

ORDER-OPTIMAL DIRECT METHOD FOR SOLVING OF SINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

N. S. Gabbasov

Naberezhnye Chelny Institute of Kazan (Volga region) Federal University, Russia
e-mail: gabbasovnazim@rambler.ru

A linear integro-differential equation with a singular differential operator in the principal part is studied. For its approximate solution in the space of generalized functions, special generalized version of spline method are proposed and justified. The optimality in the order of accuracy of the method constructed is established.

Keywords: integro-differential equation, approximate solution, direct method.

REFERENCES

1. Bart, G.R. and Warnock, R.L., Linear integral equations of the third kind, *SIAM J. Math. Anal.*, 1973, vol. 4, no. 4, pp. 609–622.
2. Case, K.M. and Zweifel, P.W., *Linear Transport Theory*, Addison-Wesley, 1967.
3. Bzhikhatlov, Kh.G., On one boundary value problem with a shift, *Differ. Uravn.*, 1973, vol. 9, no. 1, pp. 162–165.
4. Raslambekov, S.N., A singular integral equation of the first kind in the exceptional case in classes of generalized functions, *Izv.VUZov. Mat.*, 1983, no. 10, pp. 51–56.
5. Gabbasov, N.S., *Metody resheniya integral'nykh uravnenii Fredgol'ma v prostranstvakh obobshchennykh funktsii* (Methods for Solving Fredholm Integral Equations in Spaces of Generalized Functions), Kazan: Izd. Kazan. Univ., 2006.
6. Zamaliev, R.R., *O pryamykh metodakh resheniya integral'nykh uravneniy tret'yego roda s osobennostyami yadra* (On direct methods for solving integral equations of the third kind with singularities in the kernel), Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation, Kazan, 2012.
7. Abdurakhman, *Integral'noye uravneniye tret'yego roda s osobym differentsial'nym operatorom v glavnoy chasti* (An integral equation of the third kind with a singular differential operator in the principal part), Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation, Rostov-on-Don, 2003.
8. Gabbasov, N.S., On a class of integro-differential equations in the singular case, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 7, pp. 857–867.
9. Gabbasov, N.S., Collocation methods for a class of singular integro-differential equations, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 9, pp. 1225–1232.
10. Gabbasov, N.S., On numerical solution of one class of singular integro-differential equations, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2023, vol. 63, no. 2, pp. 231–240.
11. Gabbasov, N.S., A special version of the collocation method for one class of integro-differential equations, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 4, pp. 521–528.
12. Gabdul Khaev, B.G., *Optimal'nye approksimatsii reshenii lineinykh zadach* (Optimal Approximations of Solutions to Linear Problems), Kazan: Izd. Kazan. Univ., 1980.
13. Pressdorf, S., Singular integral equation with symbol vanishing at finitely many points, *Mat. Issled.*, 1972, vol. 7, no. 1, pp. 116–132.
14. Zav'yalov, Yu.S., Kvasov, B.I., and Miroshnichenko, V.L., *Metody splayn-funktsiy* (Methods of Spline Functions), Moscow: Nauka, 1980.
15. Stechkin, S.B. and Subbotin, Yu.N., *Splayny v vychislitel'noy matematike* (Splines in Computational Mathematics), Moscow: Nauka, 1976.
16. Pedas, A. and Timak, E., The cubic spline-collocation method for weakly singular integral equations, *Differ. Equat.*, 2001, vol. 37, no. 10, pp. 1491–1500.
17. Gabbasov, N.S., On numerical solution of one class of integro-differential equations in a special case, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2020, vol. 60, no. 10, pp. 1666–1678.
18. Daugavet, I.K., *Vvedeniye v teoriyu priblizheniya funktsiy* (Introduction to the Theory of Function Approximation), Leningrad: Leningr. Gos. Univ., 1977.