

---



---

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**


---



---

УДК 519.633

## ЗАДАЧА О ПАДЕНИИ ЛЕНТЫ ЛАЙНЕРА НА НАКЛОННУЮ ОПОРУ

© М. П. Галанин<sup>1</sup>, А. С. Родин<sup>2</sup>

*Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва*

*e-mail: <sup>1</sup>galan@keldysh.ru, <sup>2</sup>ral@bk.ru*

*Поступила в редакцию 20.02.2024 г., после доработки 06.03.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.*

Рассмотрена задача численного моделирования контактного взаимодействия металлической пластины, движущейся со скоростью около 0.5 км/с, с закреплённой наклонной опорой за время порядка 100 мкс. Для описания пластины и опоры применена модель упругопластического тела для больших деформаций. Для учёта граничных условий на контактирующих поверхностях в расчётах использован итерационный алгоритм, относящийся к методам типа Неймана–Дирихле. Для пространственной дискретизации применён метод конечных элементов. Приведены результаты расчётов. Рассмотрены модельные одномерные задачи, позволяющие качественно оценить результаты расчётов, полученные в двумерном случае.

*Ключевые слова:* упругопластическое тело, контактная задача, метод конечных элементов.

DOI: 10.31857/S0374064124070041, EDN: KNQBKE

### 1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о контактном взаимодействии металлической пластины (лайнера), имеющей скорость около 0.5 км/с, с закреплённой наклонной поверхностью. Подобные задачи возникают, например, в магнитном компрессоре, в котором алюминиевый лайнер, ускоренный электромагнитными силами, сжимает магнитное поле в пространстве между пластинами лайнера [1]. В торцах компрессора расположены опоры с наклонными призмами, на которые налетает лайнер при движении, необходимые для предотвращения преждевременного обрыва лайнера и сохранения параллельности движущихся участков ленты.

Приведём математическую модель данной механической задачи с использованием приближения упругопластического тела для произвольных деформаций [2, с. 62] — задачу для уравнения движения тела в момент времени  $t$ , записанного в текущих лагранжевых координатах  $a_j$  (в дальнейшем будем использовать обозначение UL-координаты) [2]:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla_a \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \nabla_a \mathbf{u}) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} (\mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \nabla_a \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_S} &= \mathbf{f}, \\ \mathbf{u}|_{\Gamma_u} &= \mathbf{u}^*. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и далее  $\mathbf{u} = (u_x \ u_y)^T$  — вектор перемещения,  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{u} / \partial t$  — вектор скорости,  $\ddot{\mathbf{u}} = \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$  — вектор ускорения,  $\rho$  — текущая плотность вещества,  $\nabla_a = \partial \mathbf{k}_j / \partial a_j$  — оператор дифференцирования по UL-координатам,  $\mathbf{k}_j$  — орты декартовой системы координат,

$\mathbf{S}$  — второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа [2, с. 51],  $\Gamma_S$  — часть границы, на которой задан вектор поверхностных сил  $\mathbf{f}$  (в задаче с магнитным компрессором это давление магнитного поля),  $\Gamma_u$  — часть границы, на которой заданы кинематические условия. В работе применяется правило суммирования по повторяющимся индексам.

Если использовать непрерывное изменение отсчётной конфигурации для UL-подхода, то в каждый фиксированный момент времени  $t$  текущие лагранжевы координаты  $a_j$  совпадают с эйлеровыми координатами  $x_j$ . Разница между UL- и эйлеровым подходами проявляется в использовании разных определений скоростей величин. На практике отсчётная конфигурация пересчитывается для дискретных значений времени, поэтому обычно при переходе к новому моменту времени  $t$  уравнение движения (1) записывается относительно известных материальных координат, которые относятся к моменту  $t - \Delta t$ . Другими словами, материальная частица, положение которой в момент времени  $t - \Delta t$  характеризуется радиус-вектором  $\mathbf{a} = a_j \mathbf{k}_j$ , в момент  $t$  примет пространственное положение, характеризуемое радиус-вектором  $\mathbf{x} = x_j \mathbf{k}_j$ . При описании данной материальной частицы в момент времени  $t$  будем использовать UL-координаты  $a_j$  или эйлеровы координаты  $x_j$ .

Насколько известно авторам, не существует одной общепризнанной модели больших пластических деформаций, позволяющей описывать поведение различных материалов при различных сценариях термомеханического нагружения. Различные модели строят на основе определяющих соотношений для гиперупругого или гипопругого материала [2, с. 72]. В работе выбрана модель, относящаяся ко второй группе. Основные соотношения теории пластического течения для данной модели сформулированы следующим образом [2, с. 102]:

— тензор скорости деформации  $\mathbf{d}$  можно представить в виде суммы упругой  $\mathbf{d}^e$  и пластической  $\mathbf{d}^p$  составляющих:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p; \quad (3)$$

— определяющее соотношение задано формулой

$$\boldsymbol{\sigma}^{Tr} = \mathbf{C}^E : \mathbf{d}^e = \mathbf{C}^E : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p); \quad (4)$$

— пластическая составляющая тензора скорости деформации определяется по ассоциативному закону пластического течения:

$$\mathbf{d}^p = \mu \frac{\partial f_y}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} = \mu \boldsymbol{\sigma}'. \quad (5)$$

Здесь  $\mathbf{C}^E$  — стандартный тензор коэффициентов упругости,  $\mu$  — параметр модели, аналогичный множителю Лагранжа,  $f_y(\boldsymbol{\sigma}', \bar{\varepsilon}^p) = 3J_2(\boldsymbol{\sigma}') - \sigma_y^2(\bar{\varepsilon}^p)$  — функция текучести Мизеса для материала с изотропным упрочнением,  $\boldsymbol{\sigma}'$  — девиатор тензора напряжений Коши,  $J_2(\boldsymbol{\sigma}') = 0.5\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}$  — второй инвариант девиатора тензора напряжений,  $\sigma_y$  — предел текучести материала,  $\bar{\varepsilon}^p$  — эффективная пластическая деформация.

Компоненты тензора скорости деформации заданы равенствами

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2. \quad (6)$$

В качестве производной тензора напряжений в определяющем соотношении (4) в разных моделях фигурируют различные конвективные производные (Яуманна, Олдройда, Коттер–Ривлина и т.д.). В данной работе использована производная Трусделла [2]

$$\boldsymbol{\sigma}^{Tr} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{l}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l} + \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr}(\mathbf{d}), \quad (7)$$

где  $\mathbf{l}$  — тензор градиента скоростей ( $l_{ij} = \partial v_i / \partial x_j$ ),  $\mathbf{l}^T$  — транспонированный тензор,  $\operatorname{tr}(\mathbf{d}) = d_{kk}$ .

Отметим, что в применённой модели функция текучести не зависит от первого инварианта тензора напряжений, поэтому первый инвариант тензора скорости деформации  $d_{kk}$ , определяющий изменение объёмной деформации, состоит только из упругой составляющей ( $d_{kk}^p = 0$ ).

На потенциально контактных поверхностях опоры ( $\Gamma_{c,1}$ ) и лайнера ( $\Gamma_{c,2}$ ) в случае контактных условий скольжения без трения должны быть выполнены следующие условия [3]:

$$\begin{aligned}\sigma_\tau(\mathbf{x}, t) &= 0, \\ \sigma_n(\mathbf{x}, t) &= \sigma_n(\bar{\mathbf{x}}, t) \leq 0, \\ u_n(\mathbf{x}, t) + u_n(\bar{\mathbf{x}}, t) &\leq \delta_{0n}(\mathbf{x}, t), \\ \sigma_n(\mathbf{x}, t)[u_n(\mathbf{x}, t) + u_n(\bar{\mathbf{x}}, t) - \delta_{0n}(\mathbf{x}, t)] &= 0,\end{aligned}\tag{8}$$

где  $\bar{\mathbf{x}} \in \Gamma_{c,2}$  — сходственная (ближайшая) точка для  $\mathbf{x} \in \Gamma_{c,1}$ ,  $\delta_{0n}(\mathbf{x}, t) \geq 0$  — функция, задающая начальный зазор (участки поверхностей в начальный момент могут не соприкасаться друг с другом),  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали в рассматриваемой точке,  $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ ,  $\sigma_n = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$ .

В приведённой модели уравнение движения (1) и часть граничных условий (2), заданных на поверхностях  $\Gamma_u$  и  $\Gamma_S$ , записаны в UL-координатах. В то же время определяющее соотношение (4), (7), закон пластического течения (5) и условия на контактных поверхностях (8) записаны с использованием эйлеровых координат, потому что данные соотношения принципиально относятся к актуальной конфигурации тела в текущий момент времени  $t$ . Для UL-подхода справедливы формулы ( $\mathbf{E}$  — тензор деформаций Грина–Лагранжа) [2, с. 53]

$$\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{a}) = \mathbf{d}(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{S}}(\mathbf{a}) = \boldsymbol{\sigma}^{Tr}(\mathbf{x}),$$

позволяющие связать производные различных величин в разных системах координат и построить эффективную численную модель.

## 2. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Задача (1)–(8) является нелинейной, так как нелинейным является определяющее уравнение (4), (7), а также имеется геометрическая нелинейность, связанная с учётом больших деформаций и неопределённости конфигурации контактирующих поверхностей на каждом шаге по времени.

Для решения нелинейной контактной задачи обычно применяются различные итерационные численные методы, наиболее популярными из которых являются метод множителей Лагранжа, метод штрафных функций или их комбинация [3, с. 117].

Постановка контактной задачи во многом аналогична постановке задачи для одного тела, разбитого на подобласти, при использовании варианта метода декомпозиции области (МДО) без перекрытия. Благодаря подобному сходству для решения контактных задач (с различными условиями на контактах) применяются модифицированные варианты МДО без перекрытия [4, с. 5]. Суть методов заключается в том, что в рамках одной итерации для каждого тела на контактных поверхностях ставится условие либо кинематическое (условие Дирихле), либо силовое (условие Неймана). Затем полученные на границах значения перемещений или напряжений корректируются с помощью специальных процедур (при необходимости корректируется и конфигурация находящихся в контакте поверхностей). Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока оба условия (Дирихле и Неймана) не будут выполнены с достаточной точностью [5]. В частности, в методе Неймана–Дирихле на поверхности  $\Gamma_{c,1}$  всегда ставится условие Неймана, а на противолежащей поверхности  $\Gamma_{c,2}$  всегда ставится условие Дирихле (таким образом, чтобы поле перемещений обеспечивало выполнение кинематической части условий (8)).

Опишем применение метода Неймана–Дирихле для решения контактной задачи (1)–(8). Будем считать, что опора занимает область  $G_1$ , а лайнер — область  $G_2$ . Для решения задачи на каждом шаге времени  $t$  нужно проводить итерационный цикл, перед первой итерацией которого задаётся начальное приближение для нормальных распределённых контактных сил  $p_{1n}(\mathbf{x}, t)$  на поверхности  $\Gamma_{c,1}$ . На каждой итерации  $m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) последовательно решается отдельная задача для первого тела (опоры):

$$\begin{aligned} Lu_1^m(\mathbf{a}, t) &= 0, \quad \mathbf{a} \in G_1, \\ \mathbf{u}_1^m(\mathbf{a}, t) \cdot \mathbf{n}_1 &= 0, \quad \mathbf{a} \in \Gamma_{1u}, \\ (\mathbf{S}^m + \mathbf{S}^m \cdot \nabla_a \mathbf{u}_1^m(\mathbf{a}, t)) \cdot \mathbf{n}_1 &= 0, \quad \mathbf{a} \in \Gamma_{1S}, \\ \boldsymbol{\sigma}^m \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{p}_1^m(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{c,1}, \end{aligned} \quad (9)$$

а затем отдельная задача для второго тела (лайнера):

$$\begin{aligned} Lu_2^m(\mathbf{a}, t) &= 0, \quad \mathbf{a} \in G_2, \\ \mathbf{u}_2^m(\mathbf{a}, t) \cdot \mathbf{n}_2 &= 0, \quad \mathbf{a} \in \Gamma_{2u}, \\ (\mathbf{S}^m + \mathbf{S}^m \cdot \nabla_a \mathbf{u}_2^m(\mathbf{a}, t)) \cdot \mathbf{n}_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{a}, t), \quad \mathbf{a} \in \Gamma_{2S}, \\ u_{2n}^m(\mathbf{x}, t) &= \delta_{0n}(\mathbf{x}, t) - u_{1n}^m(\bar{\mathbf{x}}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{c,2}^m. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} Lu_i^m &= \rho_i \ddot{\mathbf{u}}_i^m - \nabla_a \cdot (\mathbf{S}^m + \mathbf{S}^m \cdot \nabla_a \mathbf{u}_i^m), \\ \mathbf{p}_1^m &= (p_{1x}^m, p_{1y}^m)^T = (p_{1\tau}^m, p_{1n}^m)^T \end{aligned}$$

— вектор распределённых контактных сил ( $p_{1\tau}^m = 0$ ),  $\Gamma_{c,2}^m$  — участок потенциально контактной поверхности  $\Gamma_{c,2}$ , который на данной итерации непосредственно находится в контакте (при решении задачи для второго тела величина  $u_{1n}^m(\bar{\mathbf{x}}, t)$  уже является известной). После этого вычисляются новые приближения для значений нормальных распределённых контактных сил на границе  $\Gamma_{c,1}$  [4]:

$$p_{1n}^{m+1}(\mathbf{x}, t) = \theta(t) \sigma_n^m(\bar{\mathbf{x}}, t) + (1 - \theta(t)) p_{1n}^m(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{c,1}, \quad \bar{\mathbf{x}} \in \Gamma_{c,2}, \quad (11)$$

где  $\theta(t)$  — некоторый итерационный параметр, влияющий на сходимость итерационного процесса.

Используя соответствующие функциональные пространства, можно сформулировать слабую постановку для локальных задач (9), (10). В работе [6] представлена подобная постановка для статической задачи контакта двух тел и доказана сходимость предложенного алгоритма при наличии трения (по закону Кулона) для подходящего диапазона значений итерационного параметра  $\theta$ .

Построим в расчётной области сетку из конечных элементов. Выполнив пространственную дискретизацию задачи в слабой постановке с помощью стандартных процедур метода конечных элементов (МКЭ) [2], можно свести решение задач (9), (10) в каждом теле к решению системы линейных уравнений вида

$$[M_i^{m-1}] \{\ddot{U}_i^m\} + [K_i^{m-1}] \{\Delta U_i^m\} = \{R_i^m\} + \{R_i^{c,m}\}.$$

Здесь  $\{\Delta U_i^m\}$  — вектор приращений узловых перемещений в теле  $G_i$  на  $m$ -й итерации. Для узлов сетки, не относящихся к поверхностям  $\Gamma_u$  и  $\Gamma_{c,2}^m$ , строки матриц  $[M_i^{m-1}]$  и

$[K_i^{m-1}]$  соответствуют строкам стандартных матрицы масс и матрицы жесткости (с учётом геометрической нелинейности) для МКЭ [2]. Компоненты вектора узловых контактных сил  $\{R_i^{c,m}\}$  отличны от нуля только для узлов, относящихся к поверхности  $\Gamma_{c,1}$ , и задаются равенством

$$\{R_1^{c,m}\} = \int_{\Gamma_{c,1}} [N_S]^T p_1^m(x) dS. \quad (12)$$

Для дискретизации по времени используется неявная схема, для величины  $\ddot{U}_i^m$  применяется стандартная конечно-разностная аппроксимация.

Для учёта нелинейности, связанной с пластической деформацией, применяется метод простой итерации. Вектор приращений пластической деформации с предыдущей итерации  $\{\Delta d_i^{p,m}\}$  даёт вклад в вектор узловых сил  $\{R_i^m\}$  наряду с вектором объёмных сил.

В конце  $m$ -й итерации нужно вычислить новое приближение вектора узловых контактных сил  $\{R_i^{c,m+1}\}$ . При использовании согласованных сеток на контактирующих поверхностях можно использовать формулу, аналогичную (11):

$$\{R_1^{c,m+1}\} = \theta \{\bar{R}^{c,m}\} + (1 - \theta) \{R_1^{c,m}\}, \quad (13)$$

где  $\{\bar{R}^{c,m}\}$  — вектор узловых контактных сил на противоположающей поверхности  $\Gamma_{c,2}$  (для согласованных сеток  $\{\bar{R}^{c,m}\} = \{R_2^{c,m}\}$ ).

На поверхности  $\Gamma_{c,2}^m$  ставится условие Дирихле, поэтому используется предположение, что для любого кинематического ограничения, накладываемого на участок поверхности, существует такая силовая нагрузка, которая оказывает на тело эквивалентное воздействие. Тогда получим следующую формулу для вектора  $\{R_2^{c,m}\}$  (отличны от нуля только компоненты, соответствующие узлам на поверхности  $\Gamma_{c,2}^m$ ):

$$\{R_2^{c,m}\} = [M_2] \{\ddot{U}_2^m\} + [K_2] \{\Delta U_2^m\} - \{R_2^m\}. \quad (14)$$

Отметим, что для согласованных сеток достаточно вычислять узловые контактные силы по формулам (13), (14), а значения нормальных распределённых контактных сил определять необязательно. Но для случая несогласованных сеток применение (13) может привести к существенным погрешностям, поскольку участки поверхности, по которым происходит интегрирование в (12), для узлов, расположенных на разных контактных поверхностях, больше не совпадают.

В этом случае для вычисления узловых контактных сил используем следующий алгоритм.

1. Выбираем для нормальных распределённых контактных сил  $\mathbf{p}_1^m(\mathbf{x})$  на поверхности  $\Gamma_{c,1}$  (аналогично для  $\mathbf{p}_2^m(\mathbf{x})$  на поверхности  $\Gamma_{c,2}$ ) аппроксимацию, основанную на использовании базисных функций  $\chi_S$ , относящихся к поверхностной сетке, но не обязательно совпадающих с базисными функциями  $N_S$ :

$$\mathbf{p}_1^m(\mathbf{x}) \approx \sum_{l=1}^{L_1} \mathbf{p}_{1,l}^m \chi_{S,l} = [\chi_S] \{p_1^m\},$$

где  $L_1$  — количество введенных базисных функций ( $L_2$  — для  $\Gamma_{c,2}$ ). Считаем, что дискретизированная контактная поверхность  $\Gamma_{c,1}$  состоит из  $L_1$  непересекающихся участков:  $\Gamma_{c,1} = \bigcup_{l=1}^{L_1} \Gamma_l$ .

2. Для поверхности  $\Gamma_{c,2}$  находим значения компонент вектора узловых сил  $\{R_2^{c,m}\}$  по формуле (14).

3. Вычисляем вектор нормальных распределённых контактных сил  $\{p_2^m\}$ , решая систему уравнений

$$\int_{\Gamma_{c,2}} [N_S]^T [\chi_S] dS \{p_2^m\} = \{R_2^{c,m}\}.$$

4. Вычисляем вектор контактных сил  $\{P_1^m\}$ , компоненты которого соответствуют интегралам по участкам  $\Gamma_l$ :

$$\{P_1^m\}_l = \int_{\Gamma_l} [\chi_S] dS \{p_1^m\}.$$

5. Вычисляем векторы контактных сил  $\{P_1^{m+1}\}$  по формуле, аналогичной (11):

$$\{P_1^{m+1}\} = \theta \{\bar{P}_2^m\} + (1 - \theta) \{P_1^m\},$$

где  $\{\bar{P}_2^m\}$  — контактная сила на участке поверхности  $\Gamma_{c,2}$ , расположенном напротив участка  $\Gamma_l$ .

6. Вычисляем вектор контактных давлений  $\{p_1^{m+1}\}$ , решая систему уравнений

$$\int_{\Gamma_l} [\chi_S] dS \{p_1^{m+1}\} = \{P_1^{m+1}\}_l, \quad l = \overline{1, L_1}.$$

7. Вычисляем вектор узловых контактных сил

$$\{R_1^{c,m+1}\} = \int_{\Gamma_{c,1}} [N_S]^T [\chi_S] dS \{p_1^{m+1}\}.$$

Далее в работе рассмотрен случай, когда в качестве участков  $\Gamma_l$  выбраны ячейки Дирихле для соответствующих поверхностных узлов, а в качестве базисных функций  $\chi_S$  — кусочно-постоянные на данных ячейках функции.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

С использованием описанной модели смоделировано контактное взаимодействие плоского алюминиевого лайнера толщиной 1 мм со стальной опорой, расположенной под углом 25 градусов к плоскости лайнера. Моделирование выполнено в двумерном приближении для половины продольного сечения устройства, поэтому на правой стороне лайнера поставлено условие симметрии. На нижней поверхности опоры поставлено условие закрепления (равенство нулю обеих компонент вектора перемещения). Толщина опоры — 2 мм, у опоры с левой стороны имеется горизонтальный участок длиной 5 мм, после которого расположен наклонный участок. Длина лайнера (половины) — 100 мм, в начальный момент времени вся нижняя поверхность лайнера имеет координату  $y = 50$  мм. Принималось, что на верхнюю поверхность лайнера действует равномерное давление. Считалось, что материал лайнера (алюминий) имеет параметры: модуль Юнга  $E = 70$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.33$ , плотность  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>; опора выполнена из железа с параметрами:  $E = 200$  ГПа,  $\nu = 0.308$ ,  $\rho = 7874$  кг/м<sup>3</sup>. Применялось плоскодеформированное приближение.

Расчёты проводились для конечных элементов 1-го порядка на четырёхугольной сетке. Шаг пространственной сетки для обоих тел равен 0.2 мм. Шаг по времени брался равным

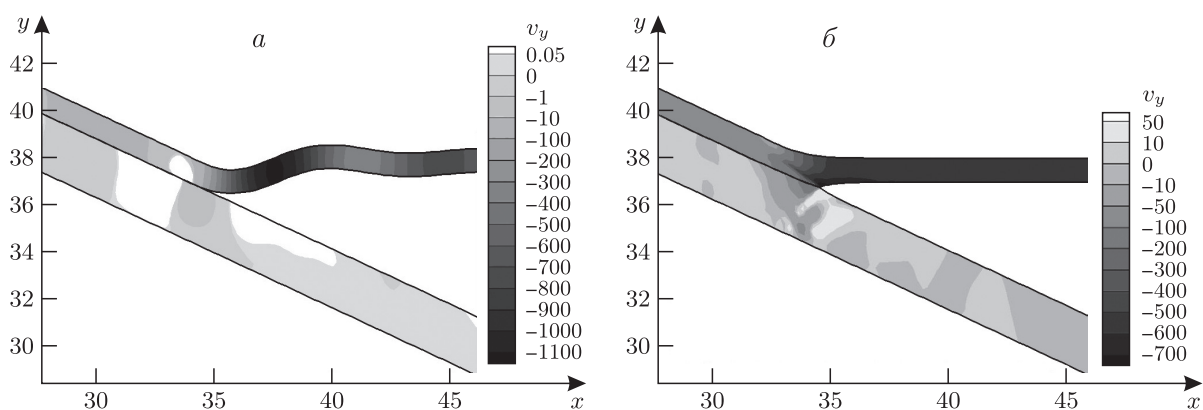
$0.9\tau_{curant}$  (относительно скорости распространения волны возмущения по материалу). Считалось, что давление задано формулой  $f(t) = f_0(1 - (1 - t/t_1)^2)$ , где  $t_1 = 2.5 \cdot 10^{-5}$  с (25 мкс),  $f_0 = 489 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>. После момента времени  $t = 2t_1 = 5 \cdot 10^{-5}$  с (50 мкс) давление равно нулю.

Далее представлены результаты двух расчётов до момента времени  $t = 78$  мкс: в расчёте 1 использовалась модель упругого тела и учитывался выход из контакта участков тел, на которых возникали растягивающие контактные силы; в расчёте 2 использовалась модель упругопластического тела с линейным упрочнением, при этом не учитывался выход из контакта по силовому критерию.

В расчёте 1 под действием приложенного давления лента лайнера начинает двигаться вниз, при этом на первом этапе ускорения в контакте остаётся только левая часть ленты, лежащая на горизонтальном участке опоры. В момент времени  $t = 29$  мкс участок ленты, соответствующий координате  $x = 12$  мм, ударяется о наклонную часть опоры, после этого до момента времени  $t = 50$  мкс передний край зоны контакта опоры и лайнера сдвигается вправо по мере движения ленты вниз. Средняя скорость движения участка ленты лайнера, расположенного правее зоны контакта, достигает 600 м/с, по данному участку распространяются заметные волны возмущения (рис. 1, а). Когда внешнее давление становится равным нулю, то на всей поверхности лайнера, расположенной на наклонной поверхности опоры, достаточно быстро возникают растягивающие силы и она выходит из контакта. В дальнейшем под действием упругих сил лайнер начинает замедляться, к моменту времени  $t = 78$  мкс его средняя скорость уменьшается до 150 м/с.

В расчёте 2 в процессе движения левая часть ленты последовательно ложилась на наклонную поверхность опоры, а центральная часть лайнера двигалась параллельно своему начальному положению. Средняя скорость участка лайнера, не вступившего в контакт, в момент времени  $t = 50$  мкс достигает почти 600 м/с и в дальнейшем остаётся практически неизменной (внешние силы равны нулю и лайнер летит по инерции). Экспериментальные данные, приведённые в статье [1], качественно соответствуют результатам, полученным для упругопластической модели.

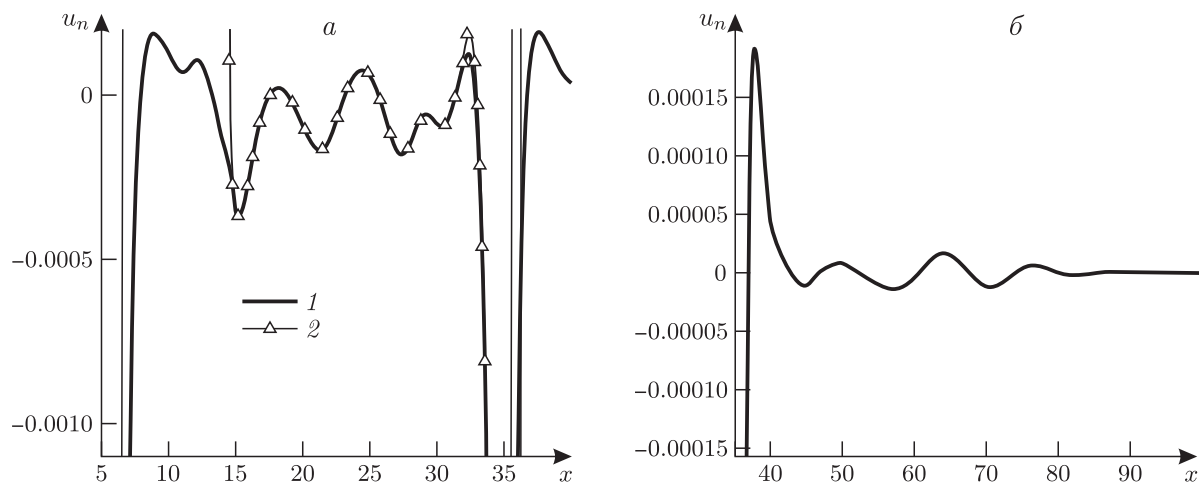
На рис. 1 показаны распределения вертикальной компоненты скорости (нормирована на 1 м/с) на участке расчётной области вблизи движущейся границы контакта в момент времени  $t = 47$  мкс для обоих расчётов.



**Рис. 1.** Распределение скорости  $v_y$  на участке расчётной области ( $t = 47$  мкс): а — расчёт 1; б — расчёт 2.

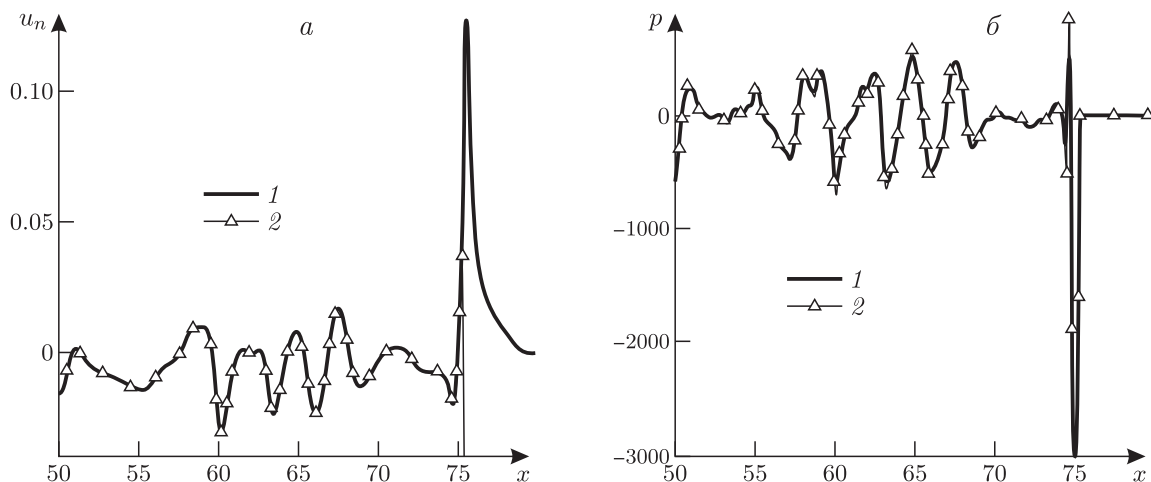
На рис. 2, а приведены графики распределения нормальной компоненты вектора перемещений  $u_n$  (в мм) в узлах на поверхности опоры (кривая 1) и распределения величины  $u_n - \delta_{0n}$  (с учётом начального зазора) в узлах на поверхности лайнера (кривая 2) в момент

времени  $t = 47$  мкс для расчёта 1. На рис. 2, б показан график распределения нормальных перемещений на поверхности опоры с правой стороны от границы зоны контакта. В рассматриваемый момент времени зона контакта соответствует участку опоры от  $x = 13$  мм до  $x = 35$  мм, исключая небольшую область вблизи точки  $x = 33$ , которая вышла из контакта по силовому критерию (возникли растягивающие силы). На графиках перемещений заметны волны возмущений, которые распространяются по опоре в обе стороны от движущейся границы контакта опоры с лайнером. График распределённых контактных сил также носит волнообразный характер.



**Рис. 2.** Распределение нормальных перемещений (расчёт 1,  $t = 47$  мкс) с левой (а) и с правой (б) сторон от границы контакта.

На рис. 3 приведены графики распределения нормальной компоненты вектора перемещений  $u_n$  (в мм) в узлах на поверхности опоры (кривая 1) и графики распределения величины  $u_n - \delta_{0n}$  (с учётом начального зазора) в узлах на поверхности лайнера (кривая 2); а также графики распределённых контактных сил  $p$  (в МПа) на поверхности опоры (кривая 1) и на поверхности лайнера (кривая 2) в момент времени  $t = 78$  мкс для расчёта 2.



**Рис. 3.** Распределение нормальных перемещений (а) и распределённых контактных сил (б) в опоре и в лайнере (расчёт 2,  $t = 78$  мкс).

В расчёте 2 в окрестности движущейся границы контакта лайнера с опорой в лайнере образуется зона перегиба, в которой происходит активное пластическое деформирование ленты. В результате взаимодействия с лентой лайнера в опоре возникает горб (складка), движущийся перед границей контактной зоны, при этом величина нормального перемещения в горбе достигает 0.12 мм (больше десятой части толщины лайнера). Пластическое деформирование в опоре происходит в основном в окрестности этого горба.

Графики контактных давлений показывают, что наибольшие контактные силы (как в расчёте 1, так и в расчёте 2) сосредоточены в движущейся зоне, примыкающей к границе контактной поверхности, протяженностью 1–2 мм. В данной зоне контактные давления (пиковые значения) достигают нескольких ГПа, за её пределами контактные давления на порядок меньше. В результате контактного взаимодействия с лентой перемещения на поверхности опоры приобретают близкий к волнообразному характер с чередованием впадин и выступов и амплитудой около 0.02 мм. Сравнение рис. 3, а с рис. 2, а показывает, что учёт пластических деформаций приводит к увеличению значений перемещений на два порядка. На графике контактного давления (рис. 3, б) также отчетливо видна волнообразная структура, при этом на некоторых участках контактные напряжения являются растягивающими.

#### 4. МОДЕЛЬНЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

Для интерпретации результатов расчётов рассмотрим упрощённые модельные задачи.

**Задача 1.** Одномерная задача о падении одной упругой среды на другую:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \frac{k_1}{\rho_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad -L < x < 0, \quad t > 0, \\ u_1(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = 0, \\ u_1(-L, t) &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= \frac{k_2}{\rho_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u_2(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = v_0, \\ k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(l, t) &= f, \\ u_1(0, t) &= u_2(0, t), \\ k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) &= k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t). \end{aligned} \quad (15)$$

Далее участок  $x \in (-L, 0)$  будем называть *областью 1* (опора), а участок  $x \in (0, l)$  — *областью 2* (лайнер). Все параметры сред ( $\rho_i$ ,  $k_i$ ,  $i = 1, 2$ ) будем считать постоянными. Для упрощения величины  $v_0$ ,  $f$  (начальную скорость и внешнюю ускоряющую силу) также будем считать постоянными. Введём (квадраты) скорости распространения сигналов  $a_i^2 = k_i/\rho_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Решение задачи (15) для произвольных начальных данных может быть получено методом Фурье [7, с. 82] в виде бесконечных рядов по системе собственных функций, который также называется методом собственных функций (методом Гринберга) [8, с. 118; 9, с. 169].

Записывается это решение в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \nu_n(x),$$

где  $\nu_n(x)$  — собственные функции соответствующего пространственного оператора (решения задачи Штурма–Лиувилля),  $w_n(t)$  — временные амплитуды. Функция  $u(x, t) = u_1(x, t)$  — решение задачи в области 1,  $u(x, t) = u_2(x, t)$  — в области 2.

Уравнение для определения амплитуд  $w_n(t)$  выписывается в результате скалярного умножения уравнений задачи (15) на собственную функцию  $\nu_n(x)$ . Соответствующее скалярное произведение, относительно которого пространственный оператор задачи является самосопряжённым, определяется по формуле

$$(p, q) = \int_{-L}^0 \rho_1 p q \, dx + \int_0^l \rho_2 p q \, dx.$$

В области 1 (области 2) собственные функции имеют вид

$$\nu_n(x) = A_n \frac{\sin(\lambda_n(L+x)/a_1)}{\sin(\lambda_n L/a_1)} \quad \left( \nu_n(x) = A_n \frac{\cos(\lambda_n(l-x)/a_2)}{\cos(\lambda_n l/a_2)} \right). \quad (16)$$

Знаменатели выражений считаем отличными от нуля. Функции (16) непрерывны в нуле в соответствии с условиями задачи. Постоянная  $A_n$  определяется из условия равенства нормы собственной функции единице. Собственные значения  $\lambda_n$  являются решениями трансцендентного уравнения, следующего из условия (15) равенства сил в точке контакта:

$$k_1 \frac{\lambda_n}{a_1} \operatorname{ctg} \left( \frac{\lambda_n}{a_1} L \right) = k_2 \frac{\lambda_n}{a_2} \operatorname{tg} \left( \frac{\lambda_n}{a_2} l \right). \quad (17)$$

Нетрудно видеть, что  $\lambda_n = 0$  не является собственным значением (так что (17) можно на  $\lambda_n$  сократить), а знаменатели выражений (16) в соответствии с (17) отличны от нуля. Исключение составляют специфические параметры задачи, которые здесь не рассматриваются.

Элементарные соображения о свойствах тригонометрических функций показывают, что уравнение (17) имеет бесконечное счётное множество решений.

**Предложение 1.** Для первого собственного значения справедлива оценка

$$\lambda_1 < \frac{\pi}{2} \min \left\{ \frac{a_1}{L}, \frac{a_2}{l} \right\}. \quad (18)$$

Данное значение соответствует временной частоте, порождённой отражениями сигнала, возникшего вследствие ненулевой начальной скорости в области 2, от границ областей 1 и 2. Как известно [7], от границы  $x = -L$  сигнал отражается нечётным образом, а от  $x = l$  — чётным. Результатом прохождения сигналов является возникновение сил, действующих на границе контакта  $x = 0$ .

**Задача 2.** Рассматриваемое в данной работе падение ленты лайнера происходит так, что лента постепенно приходит в контакт с подложкой. Длина участка контакта увеличивается со скоростью, определяемой внешними условиями ускорения лайнера (силой  $f$ ). Имеет место точка, движущаяся по опоре и лайнеру, в которой наблюдается динамический контакт тел. В ней решение уравнений механики твёрдого тела содержит сингулярность [10, с. 305]. Эта сингулярность хорошо видна и на рисунках, иллюстрирующих результаты моделирования.

Описанное явление позволяет рассмотреть задачу о генерации возмущений сосредоточенной силой, движущейся по поверхности упругого тела (в нашем случае — подложкой, опорой) с заданной скоростью.

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < v_0 t, \quad v_0 t < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u_1(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = 0, \\ u_2(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = 0, \\ u_1(v_0 t, t) &= u_2(v_0 t, t), \\ k \left( \frac{\partial u_2}{\partial x}(v_0 t, t) - \frac{\partial u_1}{\partial x}(v_0 t, t) \right) &= -F(t). \end{aligned} \quad (19)$$

Обозначения в (19) отличаются от обозначений из задачи (15): в (19) возмущения распространяются в одной среде (имитирует опору) источником сосредоточенной силы  $F(t)$ , движущейся с заданной скоростью  $v_0$ , и решение слева от точки  $x = v_0 t$  обозначается через  $u_1(x, t)$ , а справа — через  $u_2(x, t)$ . Считаем, что скорость распространения возмущений в упругой среде (19) больше скорости движения точки приложения силы  $v_0 < a$  (здесь  $a^2 = k/\rho$ ).

Решение задачи (19) [11, с. 208] определяется как

$$u(x, t) = \frac{a^2 - v_0^2}{2ak} \begin{cases} \int_0^{(at+x)/(a+v_0)} F(\xi) d\xi, & -at < x < v_0 t, \\ \int_0^{(at-x)/(a-v_0)} F(\xi) d\xi, & v_0 t < x < at. \end{cases} \quad (20)$$

Вне зоны  $-at < x < at$  решение нулевое.

Из (20) вытекают утверждения.

**Предложение 2.** Гармоническая вынуждающая сила генерирует гармонические колебания.

**Предложение 3.** Слева от точки приложения силы смещение  $u_1(x, t)$  выражается через интеграл с верхним пределом  $t - (v_0 t - x)/(a + v_0)$ , а справа смещение  $u_2(x, t)$  — через интеграл с верхним пределом  $t - (x - v_0 t)/(a - v_0)$ . Тем самым для, например, положительной вынуждающей силы возмущение от точки  $x_0 = v_0 t$  справа будет меньше, чем слева (при равных  $|x - x_0|$ ). Отличие тем больше, чем ближе скорость движения источника к скорости распространения возмущений.

## 5. ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ К АНАЛИЗУ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЁТОВ

Применим полученные выше решения к трактовке численных результатов.

Для железной опоры (область 1 в задаче (15)) имеем скорость распространения продольных колебаний [12]  $a_l = 5.916 \cdot 10^3$  м/с, а скорость распространения поперечных колебаний  $a_t = 3.116 \cdot 10^3$  м/с. Толщина  $L = 2 \cdot 10^{-3}$  м.

Для алюминиевой ленты (область 2 в задаче (15)) скорость распространения продольных колебаний равна  $a_l = 6.205 \cdot 10^3$  м/с, скорость распространения поперечных колебаний  $a_t = 3.122 \cdot 10^3$  м/с. Толщина  $l = 1 \cdot 10^{-3}$  м.

При соударении твёрдых тел — ленты лайнера и опоры — основной интерес представляют продольные колебания, поскольку именно они генерируют нормальную компоненту силы на контактной поверхности.

Оценка (18) для приведённых параметров даёт границу

$$\lambda_1 < \frac{\pi}{2} \min\{2.958 \cdot 10^6, 6.205 \cdot 10^6\} = 4.646 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}.$$

Численное решение (17) с помощью системы Wolfram-Matematica [13, с. 257] даёт значения  $\lambda_1 = 2.906 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ ,  $\lambda_2 = 5.974 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ ,  $\lambda_3 = 11.726 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ . Как видно, данные величины хорошо согласуются между собой. Значение  $\lambda_1$  задаёт частоту колебаний основной гармоники решения задачи (15), в свою очередь оно генерирует силовое воздействие на границе контакта. В результате на контакт действует сила, основная составляющая которой соответствует данной частоте. По подложке бежит волна поперечных колебаний, качественно описываемая решением (20). Расстояние между экстремумами смещения можно оценить величиной  $\Delta l = 6.737 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ . Данное значение соответствует наблюдаемому в расчётах (см. рис. 2, 3).

Амплитуды колебаний перед точкой контакта и позади неё отличаются на порядки в случае учёта пластичности из-за того, что в точке контакта большая часть энергии уходит на пластическое деформирование и генерацию складки (горба). Для случая упругого деформирования различие не столь велико (в 10 раз), тем не менее оно качественно соответствует решению (20) (см. рис. 2).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для двумерного моделирования контактного взаимодействия алюминиевого лайнера, разогнанного до скорости 0.5 км/с за интервал времени порядка 100 мкс, со стальной опорой, расположенной под углом 25 градусов к плоскости движения лайнера, использованы модели упругого и упругопластического тела с учётом больших деформаций. Численная модель основана на методах конечных элементов и Неймана–Дирихле для учёта контактных условий. Выполнена серия расчётов, результаты которых свидетельствуют о том, что максимальное пластическое деформирование тел и максимальные контактные силы сосредоточены в узкой области, примыкающей к движущейся границе контакта лайнера с опорой. Под действием контактных сил на поверхности опоры возникают волны смещения в направлении нормали, близкие к гармоническим. Проведён анализ аналитических решений ряда одномерных тестовых задач, позволяющих качественно оценить особенности полученных численных решений двумерной задачи.

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галанин, М.П. Математическое моделирование движения лайнера в различных сечениях магнитного компрессора / М.П. Галанин, А.П. Лотоцкий, А.С. Родин // Мат. моделирование. — 2010. — Т. 22, № 10. — С. 35–55.
2. Коробейников, С.Н. Нелинейное деформирование твёрдых тел / С.Н. Коробейников. — Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2000. — 262 с.
3. Wriggers, P. Computational Contact Mechanics / P. Wriggers. — Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 2006. — 518 p.
4. Toselli, A. Domain Decomposition Methods — Algorithms and Theory / A. Toselli, O. Widlund. — Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 2005. — 450 p.

5. Галанин, М.П. Исследование и применение метода декомпозиции области для моделирования тепловыделяющего элемента / М.П. Галанин, А.С. Родин // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2022. — Т. 62, № 4. — С. 659–676.
6. Bayada, G. Convergence of a Neumann–Dirichlet algorithm for two-body contact problems with non local Coulomb’s friction law / G. Bayada, J. Sabil, T. Sassi // *Math. Model. Numer. Anal.* — 2008. — V. 42. — P. 243–262.
7. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 736 с.
8. Агошков, В.И. Уравнения математической физики / В.И. Агошков, П.Б. Дубовский, В.П. Шутяев. — М. : Физматлит, 2002. — 320 с.
9. Галанин, М.П. Математическое моделирование: теория и применение / М.П. Галанин, Н.А. Тихонов, М.Г. Токмачев. — М. : Ленанд, 2022. — 598 с.
10. Партон, В.З. Методы математической теории упругости / В.З. Партон, П.И. Перлин. — М. : Наука, 1981. — 688 с.
11. Будак, Б.М. Сборник задач по математической физике / Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. — М. : Наука, 1988. — 686 с.
12. Седов, Л.И. Механика сплошной среды. В 2-х т. / Л.И. Седов. — М. : Наука, 1994. — Т. 2. — 568 с.
13. Дьяконов, В.П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство / В.П. Дьяконов. — М. : ДМК Пресс, 2010. — 624 с.

## THE PROBLEM OF A LINER TAPE FAILING ONTO AN INCLINED SUPPORT

M. P. Galanin<sup>1</sup>, A. S. Rodin<sup>2</sup>

*Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russia*  
e-mail: <sup>1</sup>galan@keldysh.ru, <sup>2</sup>ral@bk.ru

The problem of numerical simulation of the contact interaction of a metal tape moving at a speed of about 0.5 km/s with a fixed inclined support for a time of about 100  $\mu$ s is considered. A two-dimensional approximation was used; an elastoplastic body model for large deformations was used to describe the tape and support. To take into account the boundary conditions on contacting surfaces, an iterative algorithm related to Neumann–Dirichlet type methods was used in the calculations. The finite element method is used for spatial discretization. The calculation results are presented. A number of model one-dimensional problems are considered, which make it possible to qualitatively evaluate the results obtained in the two-dimensional case.

*Keywords:* elastoplastic body, contact problem, finite element method.

## REFERENCES

1. Galanin, M.P., Lotoskii, A.P., and Rodin, A.S., Motion of liner in various sections of magnetic compressor, *Math. Models and Comp. Simul.*, 2011, vol. 3, no. 3, pp. 273–289.
2. Korobeinikov, S.N., *Nelineynoye deformirovaniye tverdykh tel* (Nonlinear Deformation of Solids), Novosibirsk: Izdatelstvo SO RAN, 2000.
3. Wriggers, P., *Computational Contact Mechanics*, Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
4. Toselli, A. and Widlund, O., *Domain Decomposition Methods — Algorithms and Theory*, Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
5. Galanin, M.P. and Rodin, A.S., Investigation and application of the domain decomposition method for simulating fuel elements, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2022, vol. 62, no. 4, pp. 641–657.
6. Bayada, G., Sabil, J., and Sassi, T., Convergence of a Neumann–Dirichlet algorithm for two-body contact problems with non local Coulomb’s friction law, *Math. Model. Numer. Anal.*, 2008, vol. 42, pp. 243–262.
7. Tichonov, A.N. and Samarskii, A.A., *Uraveniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics), Moscow: Nauka, 1972.

8. Agoshkov, V.I., Dubovskii, P.B., and Shutiaev, V.P., *Metody resheniya zadach matematicheskoy fiziki* (Methods for Solving Problems of Mathematical Physics), Moscow: Fizmatlit, 2002.
9. Galanin, M.P., Tichonov, N.A., and Tokmachev, M.G., *Matematicheskoye modelirovaniye: teoriya i primeneniye* (Mathematical Modeling: Theory and Application), Moscow: Lenand, 2022.
10. Parton, V.Z. and Perlin, P.I., *Mathematical Methods of the Theory of Elasticity*, Moscow: MIR, 1984.
11. Budak, B.M., Samarskii, A.A., and Tichonov, A.N., *Sbornik zadach po matematicheskoy fizike* (Collection of Problems in Mathematical Physics), Moscow: Nauka, 1988.
12. Sedov, L.I., *Mekhanika sploshnoy sredy* (Continuum Mechanics), vol. 2, Moscow: Nauka, 1994.
13. Diakonov, V.P., *Mathematica 5/6/7. Polnoye rukovodstvo* (Mathematica 5/6/7. Complete Guide), Moscow: DMK Press, 2010.