

---

---

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

---

---

УДК 519.63

## ПРИМЕНЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ С ХОРОШО КОНТРОЛИРУЕМОЙ ДИССИПАЦИЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ КАПИЛЫ

© Р. Р. Полехина<sup>1</sup>, Е. Б. Савенков<sup>2</sup>

*Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва*

*e-mail: <sup>1</sup>tukhvatullinar@gmail.com, <sup>2</sup>savenkov@keldysh.ru*

*Поступила в редакцию 25.02.2024 г., после доработки 25.02.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.*

Для решения уравнений модели Капилы, описывающей двухфазные течения, являющейся неконсервативной гиперболической системой уравнений первого порядка и, таким образом, требующей указания конкретного вида регуляризующего диссипативного оператора, выделяющего единственное решение задачи, применяется разностная схема с хорошо контролируемой диссипацией. Суть таких схем заключается в том, что диссипативный оператор, который определяется видом их первого дифференциального приближения, совпадает с точностью до малых высшего порядка с заданным оператором, использованным при определении обобщённого решения в континуальной постановке. В результате ожидается сходимость численного решения схемы к заданному решению. Численные эксперименты, представленные в работе, демонстрируют эффективность такого подхода. В качестве точных решений используются численные решения типа бегущей волны, полученные другим методом.

**Ключевые слова:** модель Капилы, схема с хорошо контролируемой диссипацией, многофазная среда, неконсервативная гиперболическая система уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064124070072, EDN: KNICMU

### ВВЕДЕНИЕ

В работе исследован один класс разностных схем для решения уравнений двухфазной модели Капилы [1, 2], которая может быть рассмотрена как предельный равновесный случай более общей неравновесной модели Баера–Нунциато и предназначена для описания течения двухфазных сред в приближении равновесия по скоростям и давлениям фаз.

Модель Капилы является гиперболической системой уравнений первого порядка. Её характеристическая особенность (типичная для многих других моделей, описывающих течения двух- и многофазных сред в рамках модели взаимопроникающих континуумов) — она не может быть записана в консервативной форме. Это связано с тем, что в число параметров состояния, описывающих состояние среды, входят объёмные доли фаз, которые не являются консервативными переменными.

Существующая математическая теория неконсервативных гиперболических систем уравнений первого порядка гораздо более “тонкая” по сравнению с более распространённым консервативным случаем прежде всего ввиду того, что определение обобщённого решения неконсервативной системы и формулировка условий Ренкина–Гюгонио для неё не могут быть даны таким же способом, как для консервативной.

Одним из способов определения корректных разрывных решений гиперболических систем является использование регуляризованной задачи, которая имеет вид диссипативного (“вязкого”) возмущения исходной системы уравнений. В этом случае разрывные решения определяются как пределы решений возмущённой задачи при исчезающе малой вязкости. В случае консервативных гиперболических систем вид возмущённой системы (т.е. вид соответствующего диссипативного оператора) до известной степени не имеет значения — все “разумные” регуляризации определяют одно и то же обобщённое решение. В неконсервативных системах это не так — различные вязкие возмущения определяют различные обобщённые решения исходной задачи. Таким образом, если для построения обобщённого решения консервативной системы, вообще говоря, не требуется никакой информации, кроме непосредственно самой системы, то для неконсервативных систем нужно указывать конкретный вид диссипативного оператора или так называемого “пути” в рамках теории авторов [3–5]. Эта информация не “содержится” в исходной неконсервативной системе и должна быть задана исходя из дополнительных соображений. Отметим, что указанный способ не является единственным. В частности, для определения решения задачи может быть использована непосредственно формулировка условий Ренкина–Гюгонио в виде так называемых “кинетических соотношений” (см. [5]). В этом случае соотношения Ренкина–Гюгонио не являются следствием системы уравнений, а вводятся как первичные соотношения на скачке с учётом дополнительной информации о рассматриваемом физическом процессе. Примеры алгоритмов, основанных на этом подходе, приведены в [6–8].

Любая устойчивая разностная схема неявно определяет особый вид диссипативного возмущения исходной системы — её первое дифференциальное приближение (см. ниже). В качестве малого диссипативного параметра в этом случае выступает “численная вязкость”, снижающаяся при уменьшении параметра дискретизации. Численные решения сходятся к тем разрывным решениям задачи, которые выделяются диссипативным оператором разностной схемы (точнее, её первого дифференциального приближения). В случае если этот оператор отличается от использованного при определении разрывного решения в исходной неконсервативной задаче, будет отсутствовать сеточная сходимость к нему. Впервые этот факт был отмечен в основополагающей работе [5], где объясняется отсутствие сходимости так называемых “консервативных по пути” разностных схем к ожидаемым решениям. Понятно, что это наблюдение является общим и касается схемы любого типа.

Отметим, что для консервативных систем уравнений такой проблемы не возникает — как уже отмечалось выше, в этом случае предел регуляризованных вязких решений не зависит от вида диссипирующего оператора (по крайней мере пока он остаётся дивергентным). По этой причине все консервативные разностные схемы, аппроксимирующие консервативную систему гиперболических уравнений, если и будут сходить, то к одному и тому же решению. По этой причине построение корректных разностных схем неконсервативных гиперболических систем уравнений является сложной задачей, не до конца решённой в настоящее время.

Метод (первого) дифференциального приближения является мощным средством исследования свойств разностных схем. Он наиболее эффективен применительно к исследованию методов решения гиперболических уравнений. Его суть заключается в том, что имея дифференциальное уравнение и аппроксимирующую его разностную схему, можно построить другое уравнение, которое разностная схема аппроксимирует с более высоким порядком, чем исходное. Это уравнение (дифференциальное приближение) “наследует” часть свойств разностной схемы; исследуя его мы до какой-то степени исследуем схему. Дифференциальное приближение может быть разных порядков (и даже формально “бесконечного”, в этом случае оно полностью эквивалентно разностной схеме и называется *дифференциальным представлением* разностной схемы).

В иностранной литературе метод дифференциального приближения известен как “метод модифицированного уравнения” [9]. Дифференциальное приближение для исследования свойств разностных схем применяется в работах Н.Н. Яненко и Ю.И. Шокина, начиная с 1960-х годов. В монографиях [10–12] изложена полная и системная теория, которая продемонстрировала свою эффективность.

В современной литературе первое дифференциальное приближение используется сравнительно редко, потому что, во-первых, современные схемы сложны и построение первого дифференциального приближения для них само по себе может являться технически сложной задачей, а, во-вторых, даже если оно получено, теоретический анализ первого дифференциального приближения может быть не менее сложной задачей, чем исследование исходного уравнения или разностной схемы. Тем не менее, как это было указано выше, при построении и анализе разностных схем для неконсервативных систем гиперболических уравнений оно играет особую роль с точки зрения их анализа.

Таким образом, один из способов построения корректных разностных схем для неконсервативных систем гиперболических уравнений — построение схемы такой, что оператор диссипации в её первом дифференциальном приближении имеет в точности требуемый вид, а члены более высокого порядка малы на разрывных решениях (и, таким образом, существенно не влияют на структуру разрыва). Верно и обратное: какую бы схему мы не написали, вопрос её корректности может быть решён путём анализа её первого дифференциального приближения; если оператор диссипации в нём имеет тот же вид, что и “заложенный” в постановку задачи, то можно ожидать, что численные решения будут сходиться к требуемому обобщённому решению. Конструктивно такой способ построения разностной схемы для неконсервативной гиперболической системы уравнений первого порядка был предложен в работе [13], в которой рассмотрен и ряд модельных задач, а также простейшие системы уравнений теории мелкой воды.

В настоящей работе метод применён для решения уравнений многофазной равновесной модели Капилы. В п. 1 кратко приведены модель Капилы и основные сведения о ней. В п. 2 представлены основные результаты по теории неконсервативных гиперболических систем уравнений первого порядка, важные для понимания работы, приведены технические сведения, в частности, вид матрицы системы в терминах консервативных переменных. Выводу разностной схемы по аналогии с работой [13] посвящён п. 3; основным новшеством здесь является более слабая оценка диапазона изменения параметров метода, гарантирующая требуемые свойства численного решения. В п. 4 представлены расчёты ряда одномерных тестов, демонстрирующие применимость метода для решения уравнений модели Капилы.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим модель Капилы [1], описывающую динамику двухфазной среды в предположении мгновенной механической релаксации по скорости и давлению. Таким образом, модель является односкоростной и с одним давлением, однако температуры фаз могут отличаться. Модель включает в себя уравнения закона сохранения массы для каждой из фаз, закон сохранения импульса и полной энергии для смеси и эволюционное уравнение для объёмной доли фаз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_k \rho_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}) &= 0, & \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P) &= 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + P) \mathbf{u}) &= 0, & \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha_1 &= K \nabla \cdot \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\alpha_k$  и  $\rho_k$  — объёмная доля и плотность фазы,  $k=1, 2$ ;  $\mathbf{u}$  и  $P$  — равновесные скорость и давление;  $\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$  и  $E = e + \mathbf{u}^2/2$  — плотность и полная энергия смеси;  $e$  — внутренняя энергия смеси; коэффициент

$$K = (\rho_2 c_2^2 - \rho_1 c_1^2) \left[ \frac{\rho_1 c_1^2}{\alpha_1} + \frac{\rho_2 c_2^2}{\alpha_2} \right]^{-1}$$

определяет сжимаемость двухфазной смеси; скорость звука  $c_k$ ,  $k=1, 2$ , фазы находится как

$$c_k^2 = \frac{\gamma_k (P + \pi_k)}{\rho_k},$$

где  $\pi_k$  и  $\gamma_k$  — референсное давление и показатель адиабаты. Система уравнений (1) замыкается уравнением состояния для смеси

$$P = \left[ \rho e - \left( \frac{\alpha_1 \gamma_1 \pi_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2 \gamma_2 \pi_2}{\gamma_2 - 1} \right) \right] \left[ \frac{\alpha_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2}{\gamma_2 - 1} \right]^{-1}. \quad (2)$$

Для объёмных долей выполнено условие нормировки

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

## 2. НЕКОНСЕРВАТИВНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Система (1) является (см. [1]) гиперболической неконсервативной системой уравнений (не может быть записана в консервативном виде). Её квазилинейная форма имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{Q} = (\alpha_1 \rho_1, \rho \mathbf{u}, \rho E, \alpha_1, \alpha_2 \rho_2)^\top$  — вектор состояния,  $\mathbf{A}(\mathbf{Q}) = (A_{ij})_{5 \times 5}$  — матрица системы.

Введём следующие обозначения:

$$Q_1 := \alpha_1 \rho_1, \quad Q_2 := \rho \mathbf{u}, \quad Q_3 := \rho E, \quad Q_4 := \alpha_1, \quad Q_5 := \alpha_2 \rho_2;$$

$$\tilde{\gamma}_k = \gamma_k - 1, \quad \tilde{\pi}_k = \frac{\gamma_k \pi_k}{\tilde{\gamma}_k}, \quad k=1, 2; \quad \gamma_{\text{mix}} = \frac{1}{\tilde{\gamma}_1} - \frac{1}{\tilde{\gamma}_2}, \quad \gamma_{\text{mix}}^\phi = \frac{Q_4}{\tilde{\gamma}_1} + \frac{1 - Q_4}{\tilde{\gamma}_2},$$

с учётом которых коэффициенты  $A_{ij}$  ( $i$  — номер строки,  $j$  — номер столбца) матрицы  $\mathbf{A}(\mathbf{Q})$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\frac{Q_1 Q_2}{(Q_1 + Q_5)^2} + \frac{Q_2}{Q_1 + Q_5}, \quad A_{12} = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_5}, \quad A_{13} = A_{14} = A_{43} = A_{53} = A_{54} = 0, \\ A_{15} &= -\frac{Q_1 Q_2}{(Q_1 + Q_5)^2}, \quad A_{21} = A_{25} = \frac{Q_2^2}{(Q_1 + Q_5)^2} \left( \frac{1}{\gamma_{\text{mix}}^\phi} - 1 \right), \quad A_{22} = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_5} \left( 2 - \frac{1}{\gamma_{\text{mix}}^\phi} \right), \\ A_{23} &= \frac{1}{\gamma_{\text{mix}}^\phi}, \quad A_{24} = \frac{\pi_2 - \pi_1 - P(\mathbf{Q}) \gamma_{\text{mix}}}{\gamma_{\text{mix}}^\phi}, \quad A_{31} = \frac{Q_2}{(Q_1 + Q_5)^2} \left( \frac{Q_2^2}{2 \gamma_{\text{mix}}^\phi (Q_1 + Q_5)} - Q_3 - P(\mathbf{Q}) \right), \\ A_{32} &= \frac{Q_3 + P(\mathbf{Q})}{Q_1 + Q_5} - \frac{Q_2^2}{\gamma_{\text{mix}}^\phi (Q_1 + Q_5)^2}, \quad A_{33} = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_5} \left( 1 + \frac{1}{\gamma_{\text{mix}}^\phi} \right), \\ A_{34} &= \frac{Q_2}{Q_1 + Q_5} \frac{\pi_2 - \pi_1 - P(\mathbf{Q}) \gamma_{\text{mix}}}{\gamma_{\text{mix}}^\phi}, \quad A_{35} = \frac{Q_2}{(Q_1 + Q_5)^2} \left( \frac{Q_2^2}{2 \gamma_{\text{mix}}^\phi (Q_1 + Q_5)} - Q_3 - P(\mathbf{Q}) \right), \end{aligned}$$

$$A_{41} = A_{45} = \frac{KQ_2}{(Q_1 + Q_5)^2}, \quad A_{42} = -\frac{K}{Q_1 + Q_5}, \quad A_{44} = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_5},$$

$$A_{51} = -\frac{Q_2Q_5}{(Q_1 + Q_5)^2}, \quad A_{52} = \frac{Q_5}{Q_1 + Q_5}, \quad A_{55} = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_5} \left(1 - \frac{Q_5}{Q_1 + Q_5}\right),$$

где

$$P(\mathbf{Q}) = \left[ Q_3 - \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{(Q_1 + Q_5)} - Q_4 \hat{\pi}_1 + (Q_4 - 1) \hat{\pi}_2 \right] \left[ \frac{Q_4}{\tilde{\gamma}_1} + \frac{1 - Q_4}{\tilde{\gamma}_2} \right]^{-1}.$$

Неконсервативность системы (3) означает, что  $\mathbf{A} \partial \mathbf{Q} / \partial x \neq \partial \mathbf{F}(\mathbf{Q}) / \partial x$  для какого-либо вектора потока  $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$ .

Основной проблемой при построении математической теории систем указанного вида является невозможность определить обобщённое (разрывное) решение традиционным способом, как это делается для консервативных систем уравнений: в случае разрывного решения  $\mathbf{Q}$  неконсервативное произведение  $\mathbf{A} \partial \mathbf{Q} / \partial x$  теряет смысл даже в смысле классической теории обобщённых функций. Корректное определение разрывного решения может быть дано различными способами (см. введение). В данной работе используется регуляризация уравнений (3) (см., например, [14]). В соответствии с этой идеей далее будем рассматривать только такие разрывные решения, которые являются пределом (в том или ином смысле) гладких решений расширенной системы вида

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_\mu}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{Q}_\mu) \frac{\partial \mathbf{Q}_\mu}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{Q}_\mu}{\partial x} \right] \quad (4)$$

при  $\mu \rightarrow 0$ . Конкретный вид регуляризующего диссипативного оператора в правой части возмущённой системы (4) часто встречается в физических и механических приложениях. Естественным считать, что  $\mu > 0$  и матрица  $\mathbf{B}$  такова, что задача Коши для уравнения (4) является корректной [15].

Рассмотрим решение уравнения (4) в виде бегущей волны  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\xi)$ , где  $\xi = x - \sigma t$ ,  $\sigma$  — скорость волны, удовлетворяющее краевым условиям

$$\mathbf{Q}_\mu(\xi) = \mathbf{Q}^\pm, \quad \frac{d\mathbf{Q}_\mu}{d\xi} \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow \pm\infty. \quad (5)$$

Подставив (5) в (4), получим

$$-\sigma \frac{d\mathbf{Q}}{d\xi} + \mathbf{A}(\mathbf{Q}) \frac{d\mathbf{Q}}{d\xi} = \mu \frac{d}{d\xi} \left[ \mathbf{B} \frac{d\mathbf{Q}}{d\xi} \right]. \quad (6)$$

Здесь и в дальнейшем индекс  $\mu$  в обозначении решения  $\mathbf{Q}_\mu$  будем опускать.

Предположим, что уравнение (6) имеет решение, удовлетворяющее граничным условиям (5). Отметим, что вопрос о существовании решения типа бегущей волны является нетривиальным (см. [16]). Предельное при  $\mu \rightarrow 0$  решение  $\mathbf{Q}(\xi)$  будет разрывным и удовлетворять условиям (5), т.е. (см. [14])

$$\mathbf{Q}(\xi) = \begin{cases} \mathbf{Q}^-, & \xi < 0, \\ \mathbf{Q}^+, & \xi > 0. \end{cases} \quad (7)$$

В работе [14] показано, что предельное решение (7) не зависит от вида матрицы  $\mathbf{B}$ , если  $\mathbf{A} \partial \mathbf{Q} / \partial x = \partial \mathbf{F} / \partial x$  для некоторого  $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$ , т.е. в случае, когда система уравнений (3) является

консервативной. В случае неконсервативных систем предельное решение для (4) зависит от вида матрицы  $\mathbf{B}$ , а состояния до и после разрыва связаны соотношением

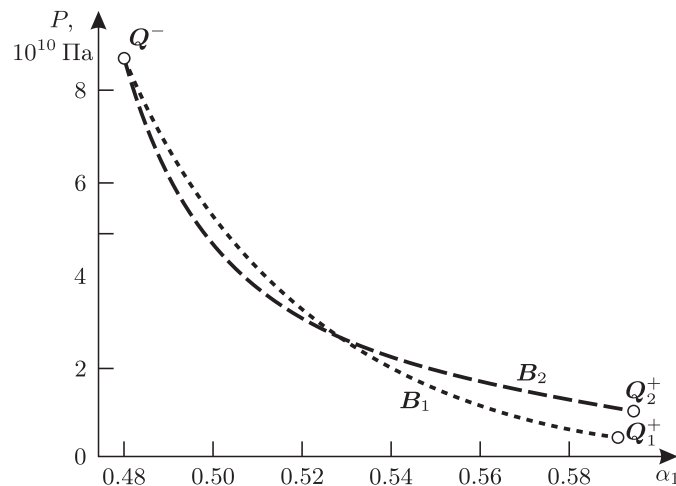
$$-\sigma(Q^+ - Q^-) = - \int_{\Gamma} A(Q) dQ, \quad (8)$$

где  $Q^-$  и  $Q^+$  — состояния до и после разрыва,  $\Gamma$  — зависящий от матрицы  $\mathbf{B}$  путь в фазовом пространстве решений, соединяющий точки  $Q^-$  и  $Q^+$  в смысле решения (4). Соотношение (8) является обобщением условий Ренкина–Гюгоньо для неконсервативных систем.

В общем случае решение уравнения (6) с граничными условиями (5) может быть получено непосредственно. Пример алгоритма, позволяющего получать решения задачи (6), (5), предложен в работе [17].

В дальнейшем участок решения, отвечающий области между  $Q^-$  и  $Q^+$ , будем называть *структурой разрыва* [18].

На рис. 1 приведены решения уравнений (1) типа бегущей волны в переменных  $(P, \alpha_1)$ , соответствующие двум различным матрицам  $\mathbf{B}_{1,2}$ . Показан участок фазовой плоскости, на котором отмечено состояние  $Q^-$  слева от разрыва и две выходящие из него структуры, соответствующие различным матрицам  $\mathbf{B}$ . На них отмечены два правых состояния  $Q_{1,2}^+$ , соответствующие одному и тому же значению  $\sigma$  скорости разрыва. Параметры модели приведены в п. 4. В дальнейшем будем считать, что матрица  $\mathbf{B}$  является заданной. Видно, что разные матрицы диссипации выделяют разные разрывные решения, что согласуется с теорией, так как соотношение Ренкина–Гюгоньо (8) зависит от матрицы диссипации. Это является центральной проблемой при построении разностных схем для неконсервативных систем — если разностная схема имеет дифференциальное приближение (ДП) с матрицей диссипации  $\mathbf{B}_h$ , отличной от физической ( $\mathbf{B}_h \neq \mathbf{B}$ ), то численное решение не будет сходиться к “физическому” решению.



**Рис. 1.** Стационарное решение системы (6) с одинаковой скоростью разрыва  $\sigma$  и двумя различными матрицами  $\mathbf{B}$ .

### 3. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Как уже отмечалось, при построении разностных схем для численного решения неконсервативных гиперболических систем уравнений сталкиваются со значительными сложностями (см. введение). Основной проблемой является то, что типичная схема первого порядка для

решения системы уравнений вида (3) имеет ДП вида (4) с  $\mu = \mathcal{O}(\Delta x)$ ,  $\Delta x$  — шаг сетки, и матрицей  $\mathbf{B}_h$ , которая определяется непосредственно схемой и в общем случае не совпадает с заданной физической матрицей  $\mathbf{B}$ , используемой для определения разрывного решения уравнения (4). В результате при  $\Delta x \rightarrow 0$  численное решение сходится не к решению (4), которое определяется физической матрицей  $\mathbf{B}$ , а к какому-то другому решению, определяемому матрицей  $\mathbf{B}_h$ .

Очевидный способ построения “правильной” разностной схемы для решения уравнения (3) — построить схему, у которой, во-первых, ДП включает регуляризующий оператор  $\mathbf{B}_h = \mathbf{B}$ , а во-вторых, члены более высокого порядка в ДП малы по сравнению с членами низкого порядка. Такие схемы в [13] названы схемами с “хорошо контролируемой диссипацией”.

Предложенный в работе [13] метод основан на явном построении ДП схемы и оценке членов высокого порядка, входящих в него. Ниже кратко описана общая схема построения метода в соответствии с [13]. Схема содержит параметр  $c$ , который выбирается таким образом, чтобы обеспечить малость членов высокого порядка. В [13] доказывается, что такой выбор всегда можно сделать, однако чем больше величина этого параметра, тем больше ограничений на шаг схемы (см. п. 3.3). В данной работе предложен более простой подход для оценки малых членов высокого порядка, а также получены более слабые условия для параметра  $c$ .

### 3.1. СХЕМА С ХОРОШО КОНТРОЛИРУЕМОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Введём в расчётной области  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  расчётную сетку как совокупность точек  $x = x_j$ , где  $x_{j+1} = x_j + \Delta x$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_N = b$ ,  $\Delta x = \text{const}$  — шаг по пространству.

Полудискретную разностную схему для решения системы (4) запишем в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{Q}_i}{dt} + \frac{1}{\Delta x} \mathbf{A}(\mathbf{Q}_i) \sum_{j=-p}^{j=p} \alpha_j \mathbf{Q}_{i+j} = \frac{c}{\Delta x} \mathbf{B} \sum_{j=-p}^{j=p} \beta_j \mathbf{Q}_{i+j}, \quad i = \overline{0, N-1}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}(x_i, t)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , параметр  $c\Delta x = \mu$ .

Коэффициенты  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  выбираются таким образом, чтобы  $(2p+1)$ -точечная аппроксимация первой  $(D_{2p+1}^1)$  и второй  $(D_{2p+1}^2)$  производных была точной для полиномов степени  $j \leq 2p$ :

$$f'(0) \cong D_{2p+1}^1(f) = \sum_{j=-p}^p \alpha_j f(j), \quad f''(0) \cong D_{2p+1}^2(f) = \sum_{j=-p}^p \beta_j f(j). \quad (10)$$

Тогда коэффициенты разложения в (10) имеют следующий вид [13]:

$$\alpha_j = (-1)^{j+1} \frac{(p!)^2}{j(p+j)!(p-j)!}, \quad j = 1, \dots, p, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_j = -\alpha_{-j}, \quad j = -1, \dots, -p,$$

$$\beta_j = (-1)^{j+1} \frac{2(p!)^2}{j^2(p+j)!(p-j)!}, \quad j = 1, \dots, p, \quad \beta_j = \beta_{-j}, \quad j = -1, \dots, -p, \quad \beta_0 = -2 \sum_{j=1}^p \beta_j.$$

### 3.2. АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

В работе [13] было получено ДП разностной схемы (9) формальным применением разложения решения в ряд Тейлора в окрестности  $x_i$  до членов порядка  $\mathcal{O}(\Delta x^{2p+1})$ :

$$\mathbf{Q}_t + \mathbf{A}(\mathbf{Q})\mathbf{Q}_x = c\Delta x \mathbf{B}\mathbf{Q}_{xx} - \mathbf{A}(\mathbf{Q}) \left( \sum_{k=2p+1}^{\infty} \frac{\Delta x^{k-1}}{k!} R_k^p \mathbf{Q}_x^{(k)} \right) + c\mathbf{B} \left( \sum_{k=2p+1}^{\infty} \frac{\Delta x^{k-1}}{k!} P_k^p \mathbf{Q}_x^{(k)} \right), \quad (11)$$

где

$$R_k^p = \sum_{j=-p}^{j=p} \alpha_j j^k, \quad P_k^p = \sum_{j=-p}^{j=p} \beta_j j^k. \quad (12)$$

С учётом (10) для членов  $R_k^p$  и  $P_k^p$  в (12) имеем

$$R_k^p = D_{2p+1}^1(x^k), \quad P_k^p = D_{2p+1}^2(x^k).$$

Рассмотрим уединённый разрыв

$$Q(x, t) = \begin{cases} Q^-, & \text{если } x \leq \sigma t, \\ Q^+, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Оценим на разрыве величину входящих в ДП (11) членов

$$A(Q)Q_x \approx A(\bar{Q})\frac{[Q]}{\Delta x}, \quad c\Delta x B Q_{xx} \approx cB\frac{[Q]}{\Delta x}, \quad Q_x^{(k)} \approx \frac{[Q]}{\Delta x^k},$$

где  $\bar{Q} = (Q^- + Q^+)/2$ ,  $[Q] = Q^+ - Q^-$  — скачок решения на разрыве. Для того чтобы сравнить порядки входящих в ДП величин, перепишем (11) в виде

$$\frac{dQ}{dt} + A(\bar{Q})\frac{[Q]}{\Delta x} = cB\frac{[Q]}{\Delta x} - S_p^A A(\bar{Q})\frac{[Q]}{\Delta x} + S_p^B B\frac{[Q]}{\Delta x}, \quad (13)$$

где

$$S_p^A = \sum_{k=2p+1}^{\infty} \frac{R_k^p}{k!}, \quad S_p^B = \sum_{k=2p+1}^{\infty} \frac{P_k^p}{k!}.$$

Эти коэффициенты могут быть вычислены следующим образом:

$$S_p^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k^p}{k!} - 1 = \sum_{j=-p}^p \alpha_j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k}{k!} - 1 \approx \sum_{j=-p}^p \alpha_j e^j - 1, \quad (14)$$

$$S_p^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k^p}{k!} - 1 = \sum_{j=-p}^p \beta_j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k}{k!} - 1 \approx \sum_{j=-p}^p \beta_j e^j - 1. \quad (15)$$

Выделим в уравнении (13) слагаемые, отвечающие членам высокого и низкого порядков:

$$S^H = -S_p^A A(\bar{Q})\frac{[Q]}{\Delta x} + S_p^B B\frac{[Q]}{\Delta x}, \quad S^L = A(\bar{Q})\frac{[Q]}{\Delta x} - cB\frac{[Q]}{\Delta x}. \quad (16)$$

Для того чтобы численное решение задачи определялось дифференциальным оператором второго порядка, т.е.  $S^L$ , необходимо, чтобы для каждой компоненты  $j = \overline{1, 5}$  вектора неизвестных выполнялось неравенство

$$|S_j^H| \leq \tau |S_j^L|, \quad 0 < \tau \ll 1. \quad (17)$$

Именно это условие обеспечивает близость ДП схемы к регуляризованному уравнению (4).

Введём для удобства обозначения  $\mathbf{x} = A(\bar{Q})[Q]$ ,  $\mathbf{y} = B[Q]$  и определим множества  $\Lambda_j$ , состоящие из всех  $c_j$ , для которых выполнено неравенство (17):

$$\Lambda_j = \{c_j : c_j > 0 \text{ и } |S_p^A x_j - c_j S_p^B y_j| \leq \tau |x_j - c_j y_j|\},$$

а также их объединение  $\Lambda = \bigcap_j \Lambda_j$ .

**Утверждение.** Если  $|S_p^B| < \tau < |S_p^A|$ , то  $\Lambda \neq \emptyset$  и, таким образом, существует  $c \in \Lambda$ , при котором неравенство (17) будет выполнено.

**Доказательство.** Возведём неравенство (17) в квадрат и после раскрытия скобок запишем его в виде

$$P(c_j) \leq 0,$$

где

$$P(c_j) = c_j^2 y_j^2 [(S_p^B)^2 - \tau^2] + 2c_j x_j y_j [\tau^2 - S_p^A S_p^B] + x_j^2 [(S_p^A)^2 - \tau^2] \quad (18)$$

— полином второй степени относительно переменной  $c_j$  с корнями

$$c_j^{(1,2)} = \frac{-x_j y_j [\tau^2 - S_p^A S_p^B] \pm |x_j y_j \tau (S_p^A - S_p^B)|}{y_j^2 [(S_p^B)^2 - \tau^2]}.$$

Непосредственной проверкой формул (14) и (15) можно убедиться, что  $S_p^A S_p^B > 0$  и  $|S_p^A| > |S_p^B|$  для  $p \in \mathbb{N}$ . Для примера значения  $S_p^A$  и  $S_p^B$  для  $p = \overline{1, 5}$  представлены в табл. 1.

**Таблица 1.** Значения параметров  $S_p^A$ ,  $S_p^B$  для  $p = \overline{1, 5}$

| Параметры | $p$       |            |            |              |              |
|-----------|-----------|------------|------------|--------------|--------------|
|           | 1         | 2          | 3          | 4            | 5            |
| $S_p^A$   | 0.175201  | -0.0375418 | 0.00867283 | -0.00208357  | 0.000512692  |
| $S_p^B$   | 0.0861613 | -0.0121509 | 0.0020868  | -0.000398563 | 0.0000813488 |

Возможны два случая расположения корней:

1.  $c_j^{(1)} < 0 < c_j^{(2)}$ , если  $x_j y_j > 0$  и  $S_p^A < 0$  или  $x_j y_j < 0$  и  $S_p^A > 0$ ;
2.  $c_j^{(2)} < 0 < c_j^{(1)}$ , если  $x_j y_j > 0$  и  $S_p^A > 0$  или  $x_j y_j < 0$  и  $S_p^A < 0$ ,

где

$$c_j^{(1)} = \frac{x_j}{y_j} \frac{\tau + S_p^A}{\tau + S_p^B}, \quad c_j^{(2)} = \frac{x_j}{y_j} \frac{\tau - S_p^A}{\tau - S_p^B}.$$

Обозначим

$$c_j^{\min} = \min\{c_j^{(1)}, c_j^{(2)}\}, \quad c_j^{\max} = \max\{c_j^{(1)}, c_j^{(2)}\}.$$

Так как  $\tau > |S_p^B|$ , то график функции (18) — парабола с ветвями, направленными вниз, и

$$\Lambda = \left\{ c: c \geq c^* = \max_j c_j^{\max} \right\}.$$

Утверждение доказано.

Отметим, что полученное здесь множество  $\Lambda$  отличается от представленного в [13]: оно накладывает меньшие ограничения на параметр  $c$ , что может быть важно, так как чем больше  $c$ , тем больше ограничения на шаг (см. п. 4.3).

Параметр  $\tau$  можно выбрать сколь угодно малым, так как  $S_p^A, S_p^B \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$ . Параметр  $c$  не зависит от шага сетки, но зависит от порядка аппроксимации.

## 3.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ВРЕМЕНИ

Для интегрирования по времени системы (9) используется вариант метода Рунге–Кутты [19]. Запишем задачу Коши для полудискретной системы (9) в виде

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{L}(\mathbf{Q}), \quad t \in (t_0, T]; \quad \mathbf{Q}(t_0) = \mathbf{Q}_0, \quad (19)$$

где оператор  $\mathbf{L}$  определён “пространственной” частью полудискретной системы уравнений (9).

Разобьём временной промежуток  $[0, T]$  на отрезки точками  $t_0, t_1, \dots, t_N$ , где  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_N = T$ ,  $\Delta t = \text{const}$  — шаг по времени. Будем использовать обозначение  $\mathbf{Q}^n = \mathbf{Q}(t_n)$ . Вычислим  $\mathbf{Q}^{n+1}$  при заданном  $\mathbf{Q}^n$  на каждом временном шаге  $t \in (t_n, t_{n+1}]$  по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{(1)} &= \mathbf{Q}^n + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{Q}^n), \\ \mathbf{Q}^{(2)} &= \frac{3}{4} \mathbf{Q}^n + \frac{1}{4} \mathbf{Q}^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{Q}^{(1)}), \\ \mathbf{Q}^{(n+1)} &= \frac{1}{3} \mathbf{Q}^n + \frac{2}{3} \mathbf{Q}^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{Q}^{(2)}), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{Q}^{(1)}$ ,  $\mathbf{Q}^{(2)}$  — “промежуточные” решения метода Рунге–Кутты;  $\mathbf{Q}^{(n+1)} = \mathbf{Q}(t_{n+1})$  принимается за решение задачи (19) в момент времени  $t = t_{n+1}$ .

В работе [13] был проведён анализ устойчивости схемы по Нейману и получены условия на шаг интегрирования по времени в случае, если матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  коммутируют:

$$\Delta t < \frac{2\Delta x c \lambda_k^B}{(\lambda_k^A)^2 + c^2 \pi^2 (\lambda_k^B)^2}, \quad k = \overline{1, 5}, \quad (20)$$

где  $\lambda_k^A$ ,  $\lambda_k^B$  — собственные значения матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ .

В случае матрицы  $\mathbf{B}$ , которая не коммутирует с матрицей  $\mathbf{A}$ ,  $\lambda_k^A$  и  $\lambda_k^B$  в формуле (20) заменялись на максимальные по модулю собственные значения  $|\lambda_{\max}^A|$  и  $|\lambda_{\max}^B|$ .

## 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ

Рассматривалась система уравнений (1) с уравнением состояния (2) с параметрами  $\gamma_1 = 2.43$ ,  $\gamma_2 = 1.62$ ,  $\pi_1 = 5.3 \cdot 10^9$ ,  $\pi_2 = 141 \cdot 10^9$ .

Для выделения единственного класса разрывных решений в соответствии с п. 2 использовались две различные матрицы:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для удобства перейдём к примитивным переменным  $\mathbf{W} = (P, u, \alpha_1, \rho_1, \rho_2)$ , т.е.  $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{W}$ .

Все приведённые ниже расчёты соответствуют решению задачи Римана (задачи о распаде начального разрыва) с начальным условием

$$\mathbf{W}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{W}^-, & x < x_0, \\ \mathbf{W}^+, & x \geq x_0, \end{cases} \quad (21)$$

где  $\mathbf{W}^\mp$  — состояния до и после разрыва:

$$\mathbf{W}^- = (8.7 \cdot 10^{10}, 4200, 0.48, 2415, 4886), \quad (22)$$

$$\mathbf{W}^+ = (5.087 \cdot 10^9, 382.9, 0.591, 1183, 3745) \quad (23)$$

или

$$\mathbf{W}^- = (8.7 \cdot 10^{10}, 4200, 0.48, 2415, 4886), \quad (24)$$

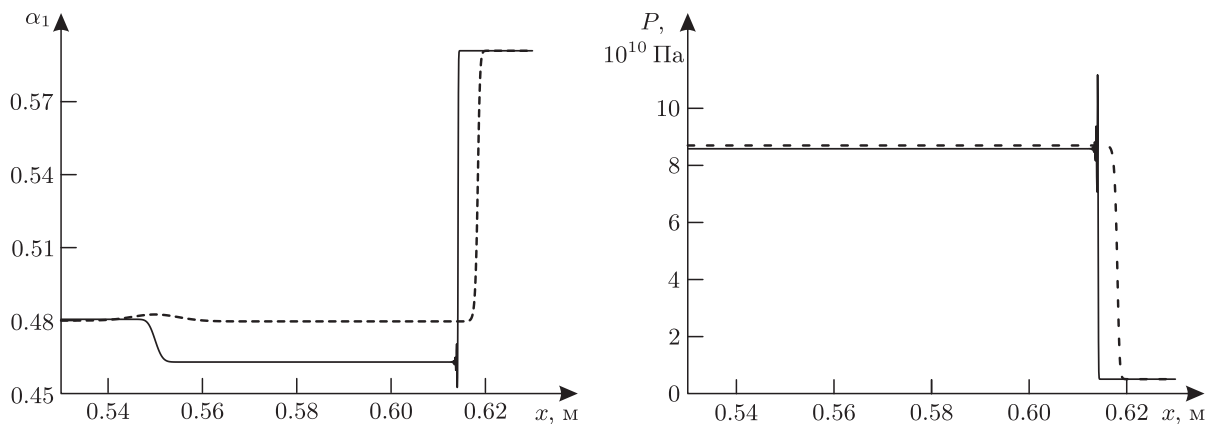
$$\mathbf{W}^+ = (1.08 \cdot 10^{10}, 649, 0.5945, 1209.5, 3886.2). \quad (25)$$

Пример решений уравнений (1) с матрицами  $\mathbf{B}_{1,2}$  при скорости разрыва  $\sigma = 10\,000$  для состояния  $\mathbf{W}^-$  в (22) и (24) представлен на рис. 1. Соответствующие правые состояния  $\mathbf{W}^+$  для данных  $\mathbf{B}_{1,2}$  отличаются и соответствуют (23) и (25).

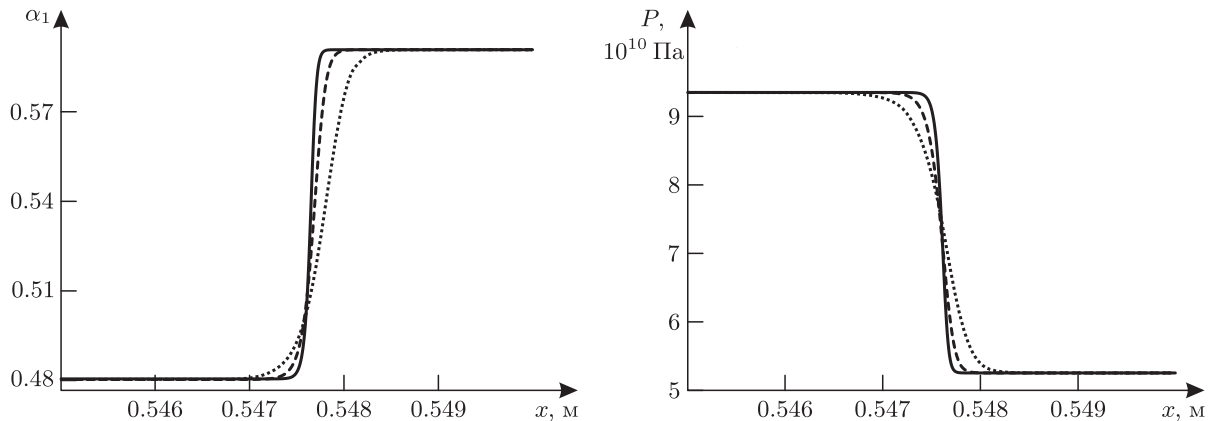
Для первой серии экспериментов (тесты 1–5), соответствующих решению уравнений (4) с матрицей  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$  и начальными данными (22), (23), критическое значение  $c_*$  и другие параметры приведены в табл. 2. После выхода численного решения на стационар должна сформироваться уединённая волна с конечной шириной, зависящей от коэффициента вязкости  $\mu$ , предельные состояния волны соответствуют начальным данным  $\mathbf{W}^-$  и  $\mathbf{W}^+$ . Результаты численных расчётов представлены на рис. 2, 3. Для теста 1 (см. рис. 2) зна-

**Таблица 2.** Параметры для численных экспериментов с матрицей  $\mathbf{B}_1$  (значения всех переменных приведены в СИ)

| Тест | $N$    | $c_*$  | $c$    | $\mu$  | $p$ | $\tau$ |
|------|--------|--------|--------|--------|-----|--------|
| 1    | 16 000 | 15 752 | 16 000 | 1      | 1   | 0.0862 |
| 2    | 16 000 | 15 752 | 1000   | 0.0625 | 1   | 0.0862 |
| 3    | 32 000 | 15 752 | 16 000 | 0.5    | 1   | 0.0862 |
| 4    | 64 000 | 15 752 | 16 000 | 0.25   | 1   | 0.0862 |
| 5    | 16 000 | 15 979 | 16 000 | 1      | 2   | 0.035  |



**Рис. 2.** Сравнение результатов расчёта для теста 1 (штриховая кривая) и теста 2 (сплошная кривая).



**Рис. 3.** Сравнение результатов расчёта для теста 1 (штриховая кривая,  $N = 16\,000$ ), теста 3 (пунктирная кривая,  $N = 32\,000$ ) и теста 4 (сплошная кривая,  $N = 64\,000$ ).

чение  $c$  выбирается таким образом, чтобы неравенство (17) выполнялось, а для теста 2 — нет. Видно, что в тесте 1 решение типа уединённой волны, соответствующее начальным данным, сформировалось, в отличие от теста 2, где начальный разрыв “распался”. Два этих численных эксперимента демонстрируют влияние членов высокого порядка на предельное решение для неконсервативных систем уравнений и указывают на важность выполнения условия (17).

На рис. 3 показана сходимость численного решения к правильному предельному решению. Ширина размазывания прямо пропорционально зависит от  $\mu = c\Delta x$  (см. (11)), поэтому уменьшается при измельчении сетки при постоянном  $c$ .

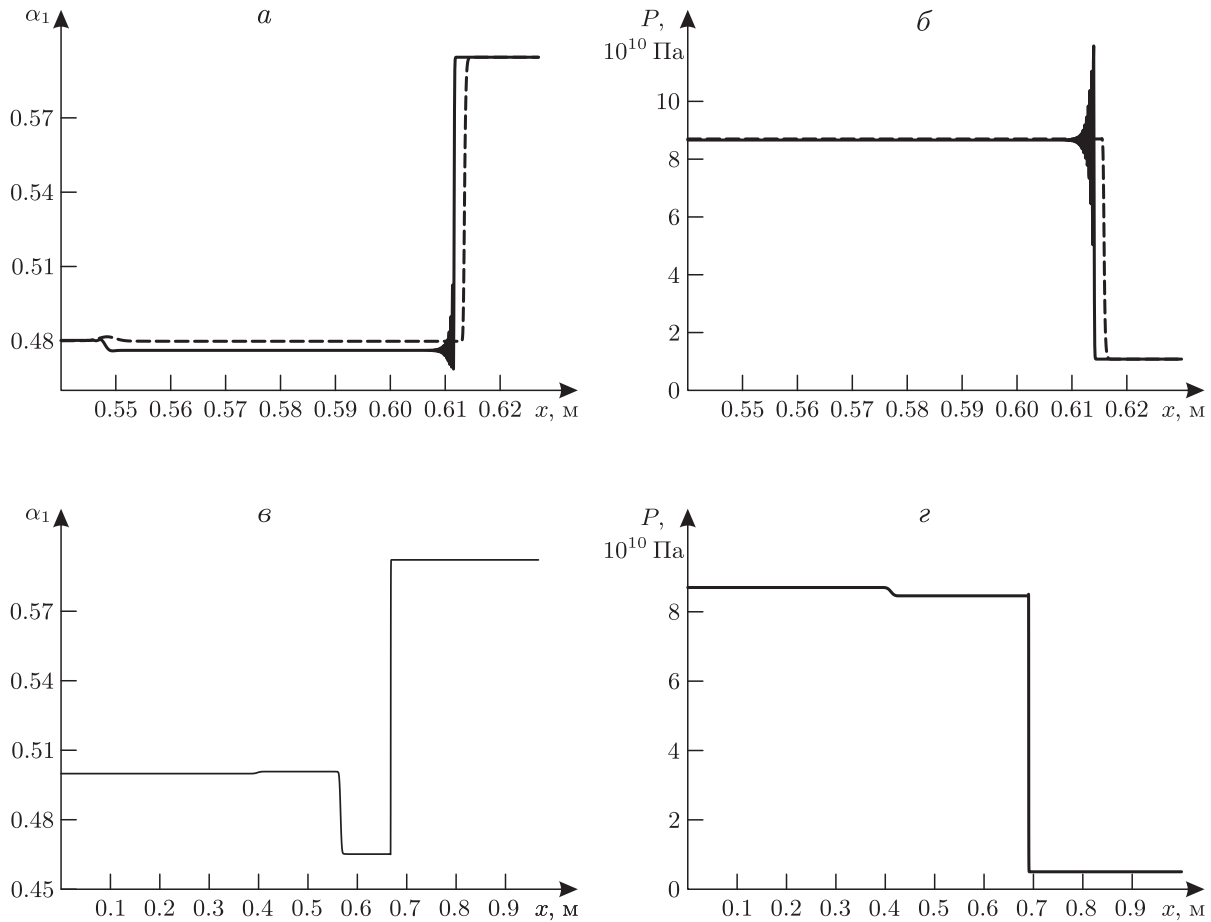
Численные решения тестов 1 и 5 совпали с хорошей точностью, поэтому решение для теста 5 не приводится.

Для второй серии экспериментов (тесты 6–8), соответствующих решению уравнений (4), с матрицей  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_2$  и начальными данными (24), (25) критическое значение  $c_*$  и другие параметры приведены в табл. 3. После выхода численного решения на стационар должна сформироваться уединённая волна с конечной шириной, зависящей от коэффициента вязкости  $\mu$ , а предельные состояния волны соответствуют начальным данным  $\mathbf{W}^-$  и  $\mathbf{W}^+$  в (24) и (25).

**Таблица 3.** Параметры для численных экспериментов с матрицей  $\mathbf{B}_2$  при  $N = 16\,000$ ,  $p = 1$ ,  $\tau = 0.0862$  (значения всех переменных приведены в СИ)

| Тест | $c_*$   | $c$     | $\mu$  |
|------|---------|---------|--------|
| 6    | 156 495 | 160 000 | 10     |
| 7    | 156 495 | 1000    | 0.0625 |
| 8    | 157 524 | 160 000 | 10     |

Результаты численных расчётов представлены на рис. 4. Для теста 6 (штриховая кривая на рис. 4, а, б)  $c$  выбирается таким образом, чтобы неравенство (17) выполнялось, а для теста 7 (сплошная кривая на рис. 4, а, б) — нет. Видно, как и для первой серии эксперимен-



**Рис. 4.** Сравнение результатов расчёта для теста 6 и теста 7 (а), (б); результаты численных расчётов для теста 8 (в), (г).

тов, что в тесте 6 решение типа уединенной волны, соответствующее начальным данным, сформировалось, в отличие от теста 7, где начальный разрыв “распался”.

На рис. 4, в, г представлены результаты расчётов теста 8. Видно, что начальный разрыв “распался”, что согласуется с теорией, так как эти начальные данные соответствуют разрыву, который является допустимым для матрицы диссипации  $\mathbf{B}_1$ , а решается система уравнений (8) с матрицей  $\mathbf{B}_2$ . Допустимым будем называть разрыв, который лежит на ударной адиабате и удовлетворяет условиям Лакса.

Тест 9 — это расчёт задачи (22), (23) с матрицей диссипации  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$ . Задача рассчитывалась методом расщепления второго порядка на гиперболическую и параболическую части. Гиперболическая часть рассчитывалась консервативным по пути методом, описанным в [20], а для решения параболической части для аппроксимации по пространству использовалась стандартная аппроксимация второй производной, а по времени — неявный метод Эйлера. Для такой схемы ДП не выписано в связи с трудоёмкостью. На рис. 5 представлены результаты численных расчётов. Видно, что начальный разрыв “распался”. Это связано с тем, что матрица диссипации, которая отвечает ДП численной схемы, отлична от матрицы  $\mathbf{B}_1$  и равна  $\tilde{\mathbf{B}}_1 = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_{\text{HLL}}$ , где последнее слагаемое соответствует матрице диссипации, порождаемой аппроксимацией неконсервативного произведения с помощью метода [20].

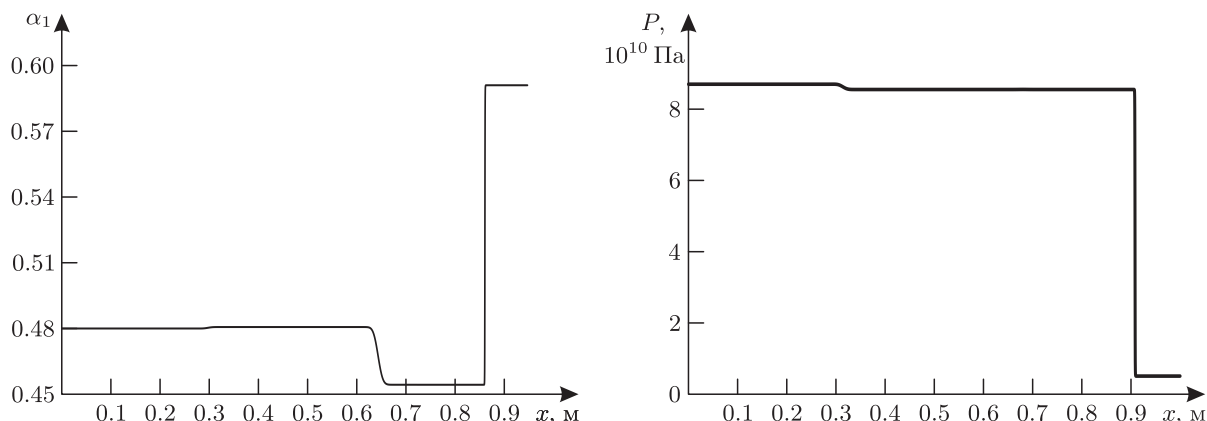


Рис. 5. Результаты численных расчётов для теста 9.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разностная схема с хорошо контролируемой диссипацией применяется для решения уравнений модели Капила, описывающей двухфазные течения. С математической точки зрения определяющая система является гиперболической неконсервативной системой уравнений. Её особенность заключается в том, что ДП всегда согласовано с физической матрицей диссипации при условии, что она задана. Это обеспечивает сходимость численного решения при измельчении шага сетки к верному предельному решению.

Использованная схема является слабоизученной и ранее применялась только к модельным задачам [13]. В работе продемонстрирована эффективность такого подхода при численном решении неконсервативных систем уравнений, возникающих в содержательных постановках при описании двухфазных течений. Проведено сравнение результатов расчётов с численными стационарными решениями типа бегущей волны, полученными методом из [18]. Также получена более слабая по сравнению с [13] оценка параметра схемы, гарантирующего требуемые свойства.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование Полехиной Р.Р. (пп. 2–4) выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект 23-11-00218). Исследование Савенкова Е.Б. (п. 1) выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-283.

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Two-phase modeling of deflagration-to-detonation transition in granular materials: Reduced equations / A.K. Kapila, R. Menikoff, Y. Bdzil [et al.] // *Physics of Fluids*. — 2001. — V. 13, № 10. — P. 3002–3024.
2. Two-phase modeling of DDT: structure of the velocity-relaxation zone / A.K. Kapila, S.F. Son, J.B. Bdzil [et al.] // *Physics of Fluids*. — 1997. — V. 9, № 12. — P. 3885–3897.

3. Le Floch, P. Shock waves for nonlinear hyperbolic systems in nonconservative form / P. Le Floch // IMA Preprint Series. — 1989. — № 53.
4. Dal Maso, G. Definition and weak stability of nonconservative products / G. Dal Maso, P.G. LeFloch, F. Murat // J. de mathématiques pures et appliquées. — 1995. — V. 74, № 6. — P. 483–548.
5. LeFloch, P.G. Why many theories of shock waves are necessary: kinetic functions, equivalent equations, and fourth-order models / P.G. LeFloch, M. Mohammadian // J. Comput. Phys. — 2008. — V. 227, № 8. — P. 4162–4189.
6. Saurel, R. Simple and efficient relaxation methods for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures / R. Saurel, P. Petitpas, R.A. Berry // J. Comp. Phys. — 2009. — V. 228, № 5. — P. 1678–1712.
7. Меньшов, И.С. Численная модель многофазных течений на основе подсеточного разрешения контактных границ / И.С. Меньшов, А.А. Серёжкин // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2022. — Т. 62, № 10. — С. 1740–1760.
8. In-cell discontinuous reconstruction path-conservative methods for non conservative hyperbolic systems — second-order extension / P.-G. Ernesto, M.J. Castro, C. Chalons [et al.] // J. Comp. Phys. — 2022. — V. 459. — Art. 111152.
9. Warming, R.F. The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference method / R.F. Warming, B.J. Hyett // J. Comp. Phys. — 1974. — V. 14, № 2. — P. 159–179.
10. Шокин, Ю.И. Метод дифференциального приближения / Ю.И. Шокин. — Новосибирск : Наука, 1979. — 221 с.
11. Шокин, Ю.И. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике / Ю.И. Шокин, Н.Н. Яненко. — Новосибирск : Наука, 1985. — 364 с.
12. Шокин, Ю.И. Метод дифференциального приближения / Ю.И. Шокин // Препринт АН СССР. Сиб. отд-е, ВЦ. — 1990. — № 7. — 50 с.
13. Schemes with well-controlled dissipation. Hyperbolic systems in nonconservative form / A. Beljadid, P.G. LeFloch, S. Mishra, C. Parés // Communicat. Comput. Phys. — 2017. — V. 21, № 4. — P. 913–946.
14. Гельфанд, И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений / И.М. Гельфанд // Успехи мат. наук. — 1959. — Т. 14, № 2 (86). — С. 87–158.
15. Петровский, И.Г. О проблеме Cauchy для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций / И.Г. Петровский // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секция А. Математика и механика. — 1938. — Т. 1, вып. 7. — 39 с.
16. Majda, A. Stable viscosity matrices for systems of conservation laws / A. Majda, L. Pego // J. Differ. Equat. — 1985. — V. 56, № 2. — P. 229–262.
17. Полехина, Р.Р. К вопросу о численном решении неконсервативных гиперболических систем уравнений / Р.Р. Полехина, М.В. Алексеев, Е.Б. Савенков // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 7. — С. 968–982.
18. Куликовский, А.Г. Нелинейные волны в упругих средах / А.Г. Куликовский, Е.И. Свешникова. — М. : Лицей, 1998. — 412 с.
19. Cockburn, B. The Runge-Kutta local projection-discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws / B. Cockburn, C.-W. Shu // ESAIM Math. Model. Numer. Anal. — 1991. — V. 25, № 3. — P. 337–361.
20. Dumbser, M. A new efficient formulation of the HLLEM Riemann solver for general conservative and non-conservative hyperbolic systems / M. Dumbser, D.S. Balsara // J. Comp. Phys. — 2016. — V. 304. — P. 275–319.

# DIFFERENCE SCHEME WITH WELL CONTROLLED DISSIPATION FOR SOLUTION OF KAPILA MODEL

R. R. Polekhina<sup>1</sup>, E. B. Savenkov<sup>2</sup>

*Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russia*  
e-mail: <sup>1</sup>tukhvatullinarr@gmail.com, <sup>2</sup>savenkov@keldysh.ru

The work is devoted to the derivation and numerical studies of a difference scheme with well-controlled dissipation for solution of equations of the Kapila model. Kapila model is widely used for analysis of two-phase compressible flows. It has a form of first order non-conservative hyperbolic system. As any other 1st order non-conservative hyperbolic system it requires definition of the regularizing dissipative operator to define discontinuous solutions and Rankin–Hugoniot conditions. The choice of dissipative operator influence wave structure observed in the solutions. Schemes with well-controlled are constructed in such a way that the dissipative operator which is determined by the form of their equivalent equation coincides with the one used to define correct setting of the original problem to be solved. As a result, it is expected that numerical solution converges to the solution of the system under consideration. Numerical experiments presented in the work demonstrate the effectiveness of this approach. As exact solutions numerical solutions of the traveling wave type obtained by other methods were used.

**Keywords:** Kapila model, scheme with well controlled dissipation, multiphase flow, non-conservative hyperbolic system.

## FUNDING

The research of Polekhina R.R. (sections 2–4) was carried out with support from the Russian Science Foundation (project no. 23-11-00218). The research of Savenkov E.B. (section 1) was carried out with support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-283.

## REFERENCES

1. Kapila, A.K., Menikoff, R., Bdzil, Y., Son, S.F., and Stewart, D.S., Two-phase modeling of deflagration-to-detonation transition in granular materials: reduced equations, *Physics of Fluids*, 2001, vol. 13, no. 10, pp. 3002–3024.
2. Kapila, A.K., Son, S.F., Bdzil, J.B., Menikoff, R., and Stewart, D.S., Two-phase modeling of DDT: structure of the velocity-relaxation zone, *Physics of Fluids*, 1997, vol. 9, no. 12, pp. 3885–3897.
3. LeFloch, P., Shock waves for nonlinear hyperbolic systems in nonconservative form, *IMA Preprint Series*, 1989, no. 53.
4. Maso, G., Le Floch, P., and Murat, F., Definition and weak stability of nonconservative products, *J. de mathématiques pures et appliquées*, 1995, vol. 74, no. 6, pp. 483–548.
5. LeFloch, P.G. and Mohammadian, M., Why many theories of shock waves are necessary: kinetic functions, equivalent equations, and fourth-order models, *J. Comp. Phys.*, 2008, vol. 227, no. 8, pp. 4162–4189.
6. Saurel, R., Petitpas, P., and Berry, R.A., Simple and efficient relaxation methods for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures, *J. Comp. Phys.*, 2009, vol. 228, no. 5, pp. 1678–1712.
7. Menshov, I.S. and Serezhkin, A.A., Numerical model of multiphase flows based on sub-cell resolution of fluid interfaces, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2022, vol. 62, no. 10, pp. 1723–1742.
8. Ernesto, P.-G., Castro, M.J., Chalons, C., De Luna, T.M., and Parés, C., In-cell discontinuous reconstruction path-conservative methods for non conservative hyperbolic systems — Second-order extension, *J. Comp. Phys.*, 2022, vol. 459, art. 111152.
9. Warming, R.F. and Hyett, B.J., The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference method, *J. Comp. Phys.*, 1974, vol. 14, no. 2, pp. 159–179.
10. Shokin, Yu.I., *The Method of Differential Approximation*, Berlin; New York: Springer-Verlag, 1983.
11. Shokin, Yu.I. and Yanenko, N.N., *Metod differentsialnogo priblizheniya. Primenenie k gazovoi dinamike* (The Method of Differential Approximation. Application to Gas Dynamics), Novosibirsk: Nauka, Siberian Branch, 1985.

12. Shokin, Yu.I., Metod differentsialnogo priblizheniya (Differential Approximation Method), *Preprint of USSR Academy of Sciences. Siberian Branch*, 1990, no. 7.
13. Beljadid, A., LeFloch, P.G., Mishra, S., and Parés, C., Schemes with well-controlled dissipation. Hyperbolic systems in nonconservative form, *Communicat. Comput. Phys.*, 2017, vol. 21, no. 4, pp. 913–946.
14. Gel'fand, I.M., Some problems in the theory of quasilinear equations, Ser. 2, *Am. Math. Soc.*, 1963, vol. 29, pp. 295–381.
15. Petrovskii, I.G., *O probleme Cauchy dlia sistem lineynykh uravneniy c chastnymi proizvodnymi v oblasti neanaliticheskikh funktsiy* (On the Cauchy problem for linear systems of partial differential equations in domain of non-analytical functions), *Bull. of Moscow State University. Series A. Mathematics and Mechanics*, 1938, vol. 1, no. 7, 39 p.
16. Majda, A., Stable viscosity matrices for systems of conservation laws, *J. Differ. Equat.*, 1985, vol. 56, no. 2, pp. 229–262.
17. Polekhina, R.R., Alekseev, M.V., and Savenkov, E.B., On the numerical solution of nonconservative hyperbolic systems of equations, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 7, pp. 970–984.
18. Kulikovskiy, A.G. and Sveshnikova, E.I., *Nelineinye volny v uprugikh sredah* (Nonlinear Waves in Elastic Media), Moscow: Litsey, 1998.
19. Cockburn, B. and Shu, C.-W. The Runge-Kutta local projection-discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws, *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 1991, vol. 25, no. 3, pp. 337–361.
20. Dumbser, M. and Balsara, D., A new efficient formulation of the HLLEM Riemann solver for general conservative and non-conservative hyperbolic systems, *J. Comp. Phys.*, 2016, vol. 304, pp. 275–319.