

УДК 519.63

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

© Б. Н. Четверушкин¹, А. Е. Луцкий², Е. В. Шильников³

Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва

e-mail: ¹chetver@imamod.ru, ²allutsky@yandex.ru, ³shilnikov@imamod.ru

Поступила в редакцию 27.02.2024 г., после доработки 12.03.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Для построения дополнительных уравнений для описания турбулентных моментов применена кинетическая модель, используемая для вывода квазигазодинамической системы уравнений. Модель построена на примере пространственно-двумерной задачи для описания течения слабосжимаемого газа.

Ключевые слова: квазигазодинамическая система уравнений, турбулентное течение, слой смешения, замыкание системы осреднённых уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064124070109, EDN: KNDPWI

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Необходимость моделирования турбулентных течений обусловлена появлением в уравнениях, характеризующих движение среды, дополнительных неизвестных пульсационных моментов. Не вдаваясь в подробности хорошо известного определения [1, § 120] пульсационных моментов, приведём следующую систему уравнений, описывающую пространственно-двумерное осреднённое по времени турбулентное течение слабо сжимаемого изотермического газа:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p + \rho \overline{\Delta u^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p + \rho \overline{\Delta v^2})}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (3)$$

Здесь u и v — осреднённые значения скорости в направлениях Ox и Oy соответственно; ρ — плотность; p — давление; μ — коэффициент молекулярной вязкости; $\rho \overline{\Delta u^2}$, $\rho \overline{\Delta v^2}$, $\rho \overline{\Delta u \Delta v}$ — пульсационные моменты.

Пульсационные моменты $\rho \overline{\Delta u^2}$, $\rho \overline{\Delta v^2}$ являются малыми добавками к давлению, не оказывающими существенного влияния на картину течения. Не учитывая их в (1)–(3), получаем систему, состоящую из трёх уравнений относительно четырёх переменных ρ , u , v и $\rho \overline{\Delta u \Delta v}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (6)$$

Далее будем исследовать систему (4)–(6). Проблема замыкания системы уравнений с учётом пульсационных моментов является наиболее важной при описании турбулентных течений. Самым распространённым является представление вклада пульсационных моментов с помощью модели турбулентной вязкости [1, § 122], которая в нашем случае будет иметь вид

$$\overline{\rho \Delta u \Delta v} = -\mu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Ключевым в этом подходе является вид турбулентной вязкости μ_T , для описания которой используется большое количество моделей [2–10], в том числе и широко применяемая (κ – ε)-модель (см., например, работу А.Н. Колмогорова [10, гл. 6.3]). Эти модели позволяют проводить расчёты конкретных течений, содержащих турбулентные зоны. Однако, как правило, они ограничены узким набором параметров и геометрических конфигураций течения, а также большим набором настроечных параметров, выбранных в ходе вычислительного эксперимента.

В нашей работе на основе кинетической модели, ранее используемой для построения квазигазодинамической (КГД) системы уравнений [11, § 5], получено дополнительное уравнение для пульсационного момента $\overline{\rho \Delta u \Delta v}$, позволяющее замкнуть систему (4)–(6).

2. КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ПУЛЬСАЦИОННЫХ МОМЕНТОВ

На аналогию между движением молекул и дрейфом небольших турбулентных вихремолей было обращено внимание ещё в начале XX века [1, § 122]. Согласно этому выводу среднее время существования молей аналогично характерному времени τ между столкновениями молекул, а характерный путь l_T , пройденный молекул до исчезновения, соответствует длине свободного пробега молекул l . По аналогии с кинетической теорией газов, определяющей молекулярную вязкость как

$$\mu = \rho \frac{lc^2}{2} = \rho \frac{\tau c}{2},$$

где c — скорость звука, турбулентная вязкость μ_T определялась*) по формуле

$$\mu_T = \rho \frac{l_T v_T}{2} = \rho \frac{\tau_T v_T^2}{2}, \quad (7)$$

где v_T — характерная скорость дрейфа молей.

В нашей работе мы используем кинетическую модель, на основе которой получена КГД система уравнений. Суть этой модели заключается в следующем. На момент времени $t = t^j$ распределение молекул по скоростям $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2) = (\xi_x, \xi_y)$ характеризуется локально максвелловской функцией

$$f = f_0 = \frac{\rho(t, \bar{x})}{(2\pi RT(t, \bar{x}))^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{(\bar{\xi} - \bar{u}(t, \bar{x}))^2}{2RT} \right\},$$

слабо меняющейся на расстоянии длины свободного пробега l ($l/L \ll 1$, где L — характерный размер задачи). Затем в течение времени τ возникает бесстолкновительный разлёт и на момент времени $t^{j+1} = t^j + \tau$ происходит мгновенная максвеллизация и процедура повторяется вновь.

*) Вопрос эффективного применения этой модели заключается в определении v_T, l_T или τ_T .

Функция распределения f^{j+1} на новом слое по времени до максвеллизации связана с локально-максвелловской функцией при $t = t^j$ соотношением*)

$$f(t^{j+1}, \bar{x}, \bar{\xi}) = f_0(t^j, \bar{x} - \tau \bar{\xi}, \bar{\xi}).$$

Учитывая условие $\text{Kn} = l/L \ll 1$ (Kn — число Кнудсена), можно с точностью до $O(\text{Kn}^2)$ записать балансное уравнение [11, § 5]

$$\frac{f^{j+1} - f_0^j}{\tau} + \text{div}(\bar{\xi} f_0^j) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\xi_i \xi_k \frac{\tau}{2} \frac{\partial f_0^j}{\partial x_k} \right). \quad (8)$$

КГД систему получим, умножив уравнение (8) последовательно на сумматорные инварианты

$$\varphi(\bar{\xi}) = 1, \bar{\xi}, \bar{\xi}^2/2 \quad (9)$$

и проинтегрировав затем по пространству скоростей.

Выпишем КГД систему на примере пространственно-одномерного случая:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) \right), \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2(\rho u)}{\partial t^2} + \frac{\partial(\rho u^3 + p)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + 3pu) \right), \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} (u(E+p)) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2(E+2p)) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} (E+p) \right) \right), \quad \tau = \frac{2\mu}{p}. \end{aligned}$$

Здесь E — полная энергия.

КГД система отличается от системы уравнений Навье–Стокса на члены порядка малости $O(\text{Kn}^2)$ **). Этот факт подтверждается многочисленными как расчётами, так и теоремами [12, 13]. Следует отметить, что сами уравнения Навье–Стокса получены из кинетического уравнения Больцмана с той же точностью $O(\text{Kn}^2)$ [14]. Применение КГД системы имеет существенные преимущества при использовании вычислительных систем высокой и сверх-высокой производительности [15], позволяя повысить устойчивость полученных на её основе явных разностных схем.

Воспользуемся балансным уравнением (8) для получения дополнительного уравнения с целью замкнуть систему (4)–(6). Умножим уравнение (8) на $\xi_x \xi_y$ и проинтегрируем по всем скоростям молекул. Эта процедура не вызывает затруднений из-за того что в (8) f^j полагается равной f_0 . В этом наблюдается отличие от уравнения Больцмана, в правой части которого стоит сложный интеграл столкновений, обращающийся в нуль лишь при интегрировании с сумматорными инвариантами (9).

Дополнительные уравнения для пульсационных моментов в принципе можно получить, умножая исходные уравнения Навье–Стокса на скорость и проводя процедуру осреднения по времени. Однако при этом появляются дополнительные моменты типа $\Delta u_l (\partial \Delta u_k / \partial x_l)$ и $(\partial \Delta u_l / \partial x_k) (\partial \Delta u_k / \partial x_l)$, препятствующие получению замкнутой системы уравнений. При использовании балансного уравнения (8) таких моментов нет, что является его преимуще-

*) Здесь не рассматривается воздействие на молекулы внешнего поля.

**) Число Кнудсена можно определить как отношение длины свободного пробега l к характерному размеру задачи L .

ством. Тем не менее появляется и ряд проблем, связанных с интегрированием уравнения (8) с весом $\xi_x \xi_y$.

Моменты членов в уравнении (8), связанных с интегрированием f_0^j , легко могут быть получены. Однако в отличие от КГД системы, когда моменты f^{j+1} с сумматорными инвариантами известны, момент $\int f^{j+1} \xi_x \xi_y d\bar{\xi}$ заранее неизвестен и зависит от вида функции f^{j+1} .

Время τ в уравнении (8) уже не является временем между столкновениями молекул и должно отражать турбулентное время τ_T существования молей.

3. ТУРБУЛЕНТНАЯ ВЯЗКОСТЬ

Для определения турбулентной вязкости μ_T воспользуемся аналогом формулы (7). Выберем аналог v_T^2 в виде $|\overline{\Delta u \Delta v}|$. В качестве времени τ_T выберем характерную величину $|\partial u / \partial y + \partial v / \partial x|^{-1}$. Тогда турбулентная вязкость μ_T примет вид

$$\mu_T = \left| \frac{\rho \overline{\Delta u \Delta v}}{2} \right| \left| \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right|^{-1}, \quad (10)$$

и соответственно пульсационный момент $\overline{\Delta u \Delta v}$ может быть представлен в виде

$$\rho \overline{\Delta u \Delta v} = -\mu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Используемая при определении μ_T величина $|\partial u / \partial y + \partial v / \partial x|$ связана с характерным значением соответствующих производных. Однако, как показывают результаты вычислительного эксперимента, даже значительный разброс её величины не влияет на конечные значения осреднённых скоростей.

Момент $\int f^{j+1} \xi_x \xi_y d\bar{\xi}$ функции f запишем в виде

$$\int f^{j+1} \xi_x \xi_y d\bar{\xi} = \int f^{j+1} uv d\bar{\xi} + \int f^{j+1} c_x c_y d\bar{\xi},$$

где c_x и c_y — значения тепловых и хаотических скоростей

$$c_x = \xi_x - u, \quad c_y = \xi_y - v.$$

Величину $\int f^{j+1} c_x c_y d\bar{\xi}$ представим с помощью двух членов разложения:

$$\int f^{j+1} c_x c_y d\bar{\xi} = \int \left(\tau_T f_1 + \frac{\tau_T^2}{t_{\text{газ}}} f_2 \right) c_x c_y d\bar{\xi}. \quad (11)$$

Выберем τ_T по аналогии с временем τ и магнитным временем τ_M , присутствующих при квазигазодинамическом аналоге уравнения магнитной индукции [15]^{*}

$$\tau = \frac{2\mu}{p}, \quad \tau_M = \frac{2\nu}{p + B^2 / (8\pi)},$$

где ν — магнитная вязкость, B — вектор напряжённости магнитного поля,

$$\tau_T = \frac{2\mu_T}{p}. \quad (12)$$

^{*} Для получения магнитогазодинамического (МГД) аналога КГД системы использовалась комплекснозначная функция $f_{\text{ом}} = \rho(2\pi RT)^{-3/2} \exp\{-(\xi_k - u_k - iB_k(4\pi\rho)^{-1/2})(2RT)^{-1}\}$, где i — мнимая единица. МГД аналог КГД системы применялся для решения задач астрофизики и охлаждения ядерного реактора [15].

В кинетической теории следующим членом разложения по малому параметру $\tau/t_{\text{газ}}$ является навье-стоксовская функция f_{NS} , интеграл от которой $\int \tau f_{NS} c_i c_k d\bar{\xi}$ приводит к тензору вязких напряжений. По аналогии выберем $f_1 = h f_{NS}$. Коэффициент пропорциональности h определим так, чтобы в конечном уравнении, описывающем изменение пульсационного момента, отсутствовали члены по порядку величины бóльшие, чем μ , μ_T и $\rho \overline{\Delta u \Delta v}$. Отметим, что такое условие выполняется и для $(\kappa-\varepsilon)$ -модели.

Определим теперь функцию f_2 . Учитывая определение турбулентной вязкости μ_T (10) и τ_T (12), получаем

$$\frac{\tau_T}{t_{\text{газ}}} \sim |\rho \overline{\Delta u \Delta v}|.$$

Величина $\tau_T t_{\text{газ}}^{-1} \int c_x c_y f_2 d\bar{\xi}$ должна иметь размерность, совпадающую с $\partial(\rho \overline{\Delta u \Delta v})/\partial t$ в уравнении, описывающем изменение $\rho \overline{\Delta u \Delta v}$ по времени. Этому условию будут удовлетворять функция

$$f_2 \sim \frac{1}{p} f_{NS}.$$

В таком случае интеграл $\tau_T t_{\text{газ}}^{-1} \int c_x c_y f_2 d\bar{\xi}$ будет пропорционален $|\rho \overline{\Delta u \Delta v}|(\partial u/\partial y + \partial v/\partial x)$. Учитывая аналогию $|\overline{\Delta u \Delta v}|$ и c^2 , а также смену знака членов при разложении функции распределения по малому параметру, окончательно получаем

$$\frac{\tau_T}{t_{\text{газ}}} \int c_x c_y f_2 d\bar{\xi} = -\frac{1}{2} |\rho \overline{\Delta u \Delta v}| \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \tag{13}$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Ввиду предположения о бесстолкновительном разлёте функции f_1 и f_2 зависят от газодинамических параметров предыдущего шага по времени, в том числе и от входящих в них величин хаотических скоростей $c_x = \xi_x - u^j$ и $c_y = \xi_y - v^j$. Однако в интеграл (11) входят величины c_x и c_y , определяемые с помощью значений скоростей на новом шаге по времени $t = t^{j+1}$. Тем не менее этот факт не влияет на конечный результат.

По аналогии с f_{NS} представим интересующий момент $\tau_T \int c_x^{j+1} c_y^{j+1} f_1 d\bar{\xi}$ в виде

$$\tau_T \int c_x^{j+1} c_y^{j+1} f_{NS} d\bar{\xi} = h \tau_T \int c_x^{j+1} c_y^{j+1} c_x^j c_y^j \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^j f_0^j d\bar{\xi}.$$

Учитывая, что $c_x^{j+1} = c_x^j - \tau_T \partial(u + \Delta u)/\partial t$, $c_y^{j+1} = c_y^j - \tau_T \partial(v + \Delta v)/\partial t$, величины $c_x^{j+1} c_y^{j+1} c_x^j c_y^j$ запишем как

$$c_x^{j+1} c_y^{j+1} c_x^j c_y^j = c_x^{2j} c_y^{2j} - \tau_T \frac{\partial(u + \Delta u)}{\partial t} c_y^j c_x^{2j} - \tau_T \frac{\partial(v + \Delta v)}{\partial t} c_x^j c_y^{2j} + \tau_T^2 \frac{\partial(u + \Delta u)}{\partial t} \frac{\partial(v + \Delta v)}{\partial t}. \tag{14}$$

Моменты всех членов с локально-максвелловской функцией f_0^j в правой части (14), кроме первого, обратятся в нуль либо будут второго порядка малости по τ_T , поэтому

$$\tau_T \int c_x^{j+1} c_y^{j+1} f_1 d\bar{\xi} = \frac{h p \tau_T}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^j. \tag{15}$$

Чтобы в уравнении для пульсационного момента $\rho \overline{\Delta u \Delta v}$ отсутствовали члены по порядку величины бóльшие, чем μ , μ_T и $\rho \overline{\Delta u \Delta v}$, выберем $h = 2$.

4. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПУЛЬСАЦИОННОГО МОМЕНТА

Умножим балансное уравнение (8) на $\xi_x \xi_y$ и проинтегрируем по скоростям молекул. Учтём (13) и (15) в интеграле $\int c_x c_y f^{j+1} d\xi$, а также представление актуальных скоростей в виде суммы осреднённой скорости и пульсационной составляющей, и получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho uv)}{\partial t} + \frac{\tau_T}{2} \frac{\partial^2(\rho uv)}{\partial t^2} + \frac{\partial(\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial t} + \frac{\tau_T}{2} \frac{\partial^2(\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial t^2} + \frac{\partial(\rho u^2 v)}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial(2u\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 u)}{\partial y} + \frac{\partial(2v\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = \\ = & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial x} 3(p \overline{\Delta u \Delta v} + u^2 \rho \overline{\Delta u \Delta v}) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial x} (3\rho uv + \rho u^3 v) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial y} (4\rho \overline{\Delta u \Delta v}) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p^2}{\rho} + p(u^2 + v^2) \right) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial y} 3(p \overline{\Delta u \Delta v} + v^2 \rho \overline{\Delta u \Delta v}) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial y} (3\rho uv + \rho v^3 u) \right). \end{aligned} \quad (16)$$

При этом величина $\int f^{j+1} uv d\bar{\xi} - \int f_0^j \xi_x \xi_y d\bar{\xi}$ заменена на

$$\frac{\int f^{j+1} uv d\bar{\xi} - \int f_0^j \xi_x \xi_y d\bar{\xi}}{\tau_T} = \frac{\partial(\rho uv)}{\partial t} + \frac{\tau_T}{2} \frac{\partial^2(\rho uv)}{\partial t^2} + \frac{\partial(\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial t} + \frac{\tau_T}{2} \frac{\partial^2(\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial t^2}.$$

Чтобы получить уравнение, описывающее изменение $\rho \overline{\Delta u \Delta v}$, вычтем из (16) уравнение (2), умноженное на v , и уравнение (3), умноженное на u . В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial t} + \frac{\tau_T}{2} \frac{\partial^2(\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial t^2} + \frac{\partial(u\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial y} + \\ & + uv \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right) + \overline{\Delta u \Delta v} \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right) = \\ = & - \frac{\rho \overline{\Delta u \Delta v}}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial x} 3(p + \rho u^2) \overline{\Delta u \Delta v} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial x} (3\rho uv + \rho u^3 v) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p^2}{\rho} + p(u^2 + v^2) + \rho u^2 v^2 \right) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial y} (4\rho \overline{\Delta u \Delta v}) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial y} 3(p + \rho v^2) \overline{\Delta u \Delta v} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial y} (3\rho uv + \rho v^3 u) \right) - v\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - u\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

В левой части уравнения (17) присутствует член $uv (\partial(\rho u)/\partial x + \partial(\rho v)/\partial y)$, формально превышающий по порядку величины члены, пропорциональные μ , μ_T и $\rho \overline{\Delta u \Delta v}$. Однако, учитывая, что

$$uv \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right) = -uv \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

для рассматриваемого случая слабо сжимаемого газа, этот член можно считать малым. Полученный результат можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема. На основе использования кинетической модели, записанной в виде балансного уравнения (8), а также классических представлений о виде функции распределения вблизи локально-термодинамического равновесия, получена замкнутая система уравнений, описывающая пространственно-двумерные турбулентные течения в слабосжимаемом газе.

5. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

В качестве основной для расчёта пульсаций использовалась следующая система:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\overline{\rho\Delta u\Delta v})}{\partial t} + \frac{\partial(u\rho\overline{\Delta u\Delta v})}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho\overline{\Delta u\Delta v})}{\partial y} + \\ & + \overline{\Delta u\Delta v} \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right) + uv \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right) = \\ & = -\frac{\overline{\rho\Delta u\Delta v}}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu + \mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial x} (3(p + \rho u^2)\overline{\Delta u\Delta v}) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu + \mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial x} (3\rho uv + \rho u^3 v) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu + \mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial y} (3(p + \rho v^2)\overline{\Delta u\Delta v}) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu + \mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial y} (3\rho uv + \rho v^3 u) \right) - v\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - u\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Система уравнений (1)–(3), (18) использовалась для расчёта турбулентных течений. В уравнении (18), в отличие от (17), так же как и в уравнениях (1)–(3) отсутствуют члены со смешанными пространственными производными. Как показывает вычислительный эксперимент, их присутствие фактически не сказывается на результате расчёта, при этом усложняя его процесс. По той же причине в (18) отсутствуют члены $(\tau_T/2) (\partial^2(\overline{\rho\Delta u\Delta v})/\partial t^2)$ и $(\tau_T/2) (\partial^2(\rho uv)/\partial t^2)$. Кроме того, в правой части (18) к членам, содержащим турбулентную вязкость μ_T , добавлена молекулярная вязкость μ , что позволяет единым образом строить расчётный процесс, в том числе и в зонах отсутствия турбулентности. Расчёт проводился по явной схеме.

Теперь выберем μ_T . В качестве примера рассматривалась задача о смешении двух плоских потоков, движущихся со скоростями u_1 и u_0 .

Характерным значением величины $|\partial u/\partial y + \partial v/\partial x|$ в данном случае удобно выбрать

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right| = \frac{|u_1 - u_0|}{L}, \quad (19)$$

где L — характерная толщина слоя смешения. Тогда турбулентную вязкость μ_T можно определить как

$$\mu_T = \frac{|\overline{\rho\Delta u\Delta v}|}{2} \frac{L}{|u_1 - u_0|}.$$

Естественно возникает вопрос о влиянии неопределённости в значении величины (19) на конечный результат расчёта. Установлено, что варьирование величины $|u_1 - u_0|/L$ более чем на порядок практически не влияет на значения осреднённых скоростей u и v .

В задаче о смешении двух потоков существовала одна характерная зона — сам слой смешения. Для задач, в которых присутствует несколько турбулентных зон, предлагается выбрать μ_t в каждой зоне в зависимости от характерного для неё значения $|\partial u/\partial y + \partial v/\partial x|$.

Вопрос о нахождении центральных пульсационных моментов $\overline{\rho\Delta u^2}$ и $\overline{\rho\Delta v^2}$, определяющих значение турбулентной кинетической энергии, также легко решается. Для получения дополнительного уравнения, описывающего $\overline{\rho\Delta u^2}$, умножим балансное уравнение (19) на $\xi_x^2/2$ и проинтегрируем по скоростям молекул, а затем вычтем умноженное на скорость u уравнение (2). Аналогично можно получить уравнения для нахождения $\overline{\rho\Delta v^2}$.

Рассмотрим результаты расчёта задачи о слое смешения. Начальные скорости слоёв $u = 0.7$ при $y \leq 0$ и $u = 0.35$ при $y > 0$. Молекулярная вязкость определялась по заданному числу Рейнольдса $Re = 5 \cdot 10^4$. Результаты вычислений сравнивались с данными, полученными на основе модели Спаларта–Аллмараса [2] и приближённой аналитической зависимости Шлихтинга [16, гл. 24, § 3]. При использовании уравнений Навье–Стокса имеем нестационарное решение, соответствующее неустойчивости слоя смешения (рис. 1).

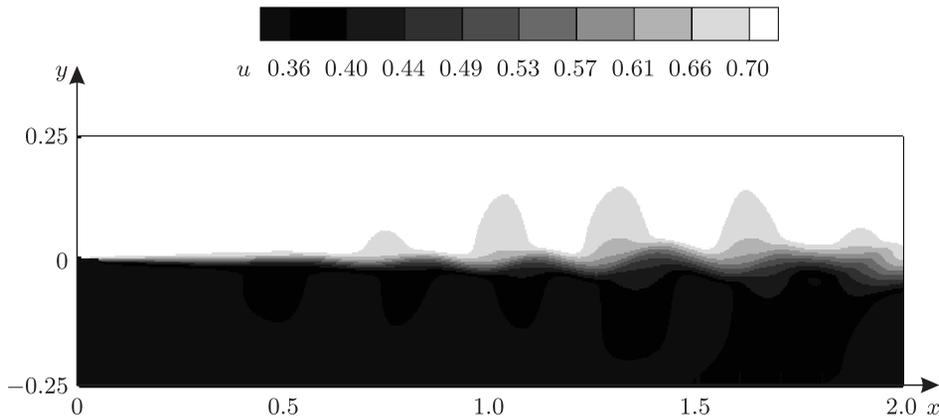


Рис. 1. Мгновенное распределение скорости. Нестационарное решение уравнений Навье–Стокса.

В результате расчёта уравнений представленной модели и уравнений Рейнольдса с моделью Спаларта–Аллмараса получаем стационарное решение (рис. 2). Наблюдается линейный рост ширины области смешения.

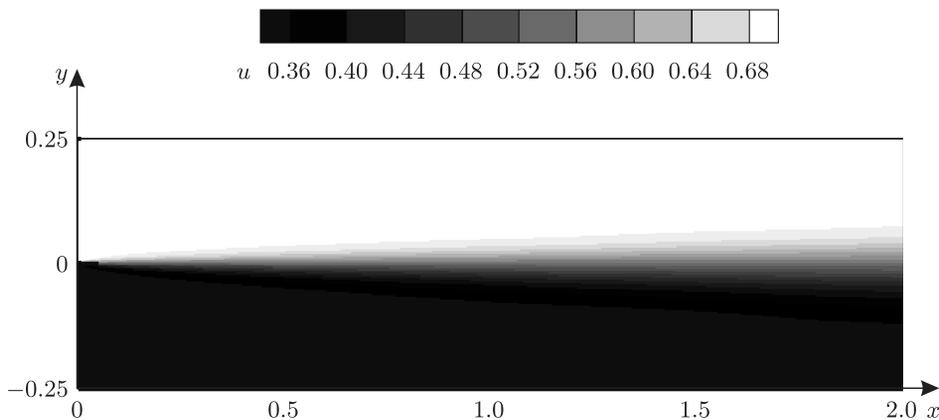


Рис. 2. Распределение скорости. Стационарное решение с использованием представленной модели.

На рис. 3 показано распределение скорости в сечении $x = 1.5$. Видно, что кривые достаточно близки.

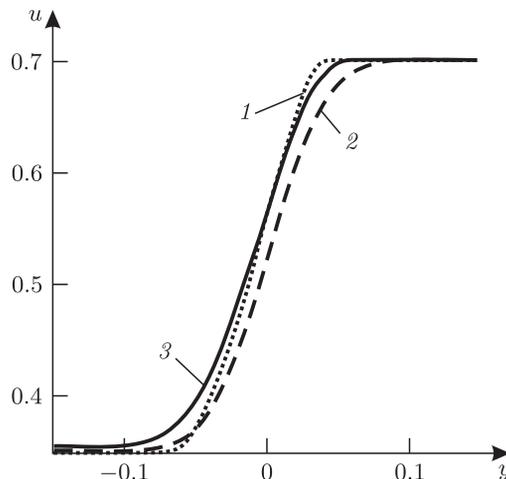


Рис. 3. Распределение скорости в поперечном сечении $x = 1.5$: 1 — модель Спаларта–Аллмараса; 2 — зависимость Шлихтинга; 3 — КГД система.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты демонстрируют перспективность применения предложенной модели к моделированию турбулентных течений. Однако полноценное включение её в ряд используемых моделей для описания турбулентности течений требует дополнительных исследований. В частности, планируется в дальнейшем расширить круг моделируемых задач, обобщить данную модель на случай сжимаемого газа и пространственной 3D-геометрии. Предполагается также в рамках предложенной методологии получить дополнительные уравнения для моментов $\rho \Delta u^2$ и $\rho \Delta v^2$, которые важны для нахождения кинетической энергии турбулентных пульсаций.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. — М. : Дрофа, 2003. — 840 с.
2. Spalart, P.R. A one equation turbulence model for aerodynamic flows / P.R. Spalart, S.R. Allmaras // Recherche Aerospatiale. — 1994. — № 1. — P. 5–21.
3. Comparative numerical testing of one and two equation turbulence models for flows with separation and reattachment / M. Shur, M. Strelets, L. Zaikov [et al.] // AIAA Paper. — 1995. — Art. 95–0863.
4. Ивахненко, И.А. Квазигазодинамическая модель и мелкомасштабная турбулентность / И.А. Ивахненко, С.В. Поляков, Б.Н. Четверушкин // Мат. моделирование. — 2008. — Т. 20, № 2. — С. 13–20.
5. Wilcox, D.E. Formulation of the K-omega turbulence model revisited / D.E. Wilcox // AIAA J. — 2008. — V. 46, № 11. — P. 2823–2838.
6. Использование алгебраической модели турбулентности для расчёта нестационарных течений в окрестности выемок / И.В. Абалакин, А.Н. Антонов, И.А. Граур, Б.Н. Четверушкин // Мат. моделирование. — 2000. — Т. 12, № 1. — С. 45–56.
7. Menter, F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications / F.R. Menter // AIAA J. — 1994. — V. 32, № 8. — P. 1598–1605.

8. The k-e-Rt turbulence closure / V. Goldberg, O. Perommain, P. Batten, S. Chakravarthy // *Engineering Appl. of Comput. Fluid Mech.* — 2009. — V. 3, № 2. — P. 175–183.
9. Abdol-Hamid, K.S. Verification and validation of the K-KL turbulence model in FUN 3D and CFL 3D Codes / K.S. Abdol-Hamid, J.-R. Carlson, C.L. Rumsey // *AIAA Paper.* — 2016. — Art. 2016–3941.
10. Фриш, У. Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова / У. Фриш. — М. : Физматлит, 1998. — 343 с.
11. Четверушкин, Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений / Б.Н. Четверушкин. — М. : Макс-Пресс, 2004. — 328 с.
12. Zlotnik, A.A. On a hyperbolic perturbation of a parabolic initial boundary value problem / A.A. Zlotnik, B.N. Chetverushkin // *Appl. Math. Letters.* — 2018. — V. 83. — P. 116–122.
13. Злотник, А.А. О свойствах и погрешности параболического и гиперболического 2-го порядка возмущений гиперболической системы 1-го порядка / А.А. Злотник, Б.Н. Четверушкин // *Мат. сб.* — 2023. — Т. 214, № 4. — С. 3–37.
14. Четверушкин, Б.Н. Кинетические алгоритмы расчёта течений электропроводящей жидкости на высокопроизводительных вычислительных системах / Б.Н. Четверушкин, В.И. Савельев, А.В. Савельев // *Докл. РАН.* — 2019. — Т. 489, № 6. — С. 552–557.
15. Chetverushkin, B.N. Kinetic consistent MHD algorithm for incompressible conductive fluids / B.N. Chetverushkin, A.V. Saveliev, V.I. Saveliev // *Computer and Fluids.* — 2023. — V. 255. — Art. 105724.
16. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг ; пер. Г.А. Вольперта ; под ред. Л.Г. Лойцянского. — М. : Наука, 1974. — 711 с.

ABOUT ONE MODEL FOR DESCRIBING TURBULENT FLOWS

B. N. Chetverushkin¹, A. E. Lutsky², E. V. Shilnikov³

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russia
e-mail: ¹chetver@imamod.ru, ²allutsky@yandex.ru, ³shilnikov@imamod.ru

Based on a simple kinetic model, which is used in the derivation of a quasi-gasdynamic system, additional equations for turbulent moments are obtained. The properties of the additional equations are demonstrated by the example of turbulent mixing layer simulation.

Keywords: quasi-gas dynamic system of equations, turbulent flow, mixing layer, closure of averaged equations system.

REFERENCES

1. Loitsyanskii, L.G., *Mechanics of Liquids and Gases*, Oxford, 2014.
2. Spalart, P.R. and Allmaras, S.R., A one equation turbulence model for aerodynamic flows, *Recherche Aerospaciale*, 1994, no. 1, pp. 5–21.
3. Shur, M., Strelets, M., Zaikov, L. [et al.], Comparative numerical testing of one and two equation turbulence models for flows with separation and reattachment, *AIAA Paper*, 1995, art. 95–0863.
4. Ivakhnenko, I.A., Polyakov, S.V., and Chetverushkin, B.N., Quasihydrodynamic model and small-scale turbulence, *Math. Models Comput. Simul.*, 2009, vol. 1, pp. 44–50.
5. Wilcox, D.E., Formulation of the K-omega turbulence model revisited, *AIAA J.*, 2008, vol. 46, no. 11, pp. 2823–2838.
6. Abalakin, I.V., Antonov, A.N., Graur, I.A., and Chetverushkin, B.N., Application of an algebraic turbulent model to unsteady flow simulation around a cavity, *Mat. Model.*, 2000, vol. 12, no. 1, pp. 45–56.
7. Menter, F.R., Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications, *AIAA J.*, 1994, vol. 32, no. 8, pp. 1598–1605.
8. Goldberg, V., Perommain, O., Batten, P., and Chakravarthy, S., The k-e-Rt turbulence closure, *Engineering Appl. Comput. Fluid Mech.*, 2009, vol. 3, no. 2, pp. 175–183.

9. Abdol-Hamid, K.S., Carlson, J.-R., and Rumsey, C.L., Verification and validation of the K-KL turbulence model in FUN 3D and CFL 3D Codes, *AIAA Paper*, 2016, art. 2016–3941.
10. Frish, U., *Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov*, Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
11. Chetverushkin, B.N., *Kinetic Schemes and Quasi Gasdynamic System of Equations*, Barcelona: CIMNE, 2008.
12. Zlotnik, A.A. and Chetverushkin, B.N., On a hyperbolic perturbation of a parabolic initial boundary value problem, *Appl. Math. Letters*, 2018, vol. 83, pp. 116–122.
13. Zlotnik, A.A. and Chetverushkin, B.N., Properties and errors of second-order parabolic and hyperbolic perturbations of a first-order symmetric hyperbolic system, *Sb. Math.*, 2023, vol. 214, no. 4, pp. 444–478.
14. Chetverushkin, B.N., Saveliev, A.V., and Saveliev, V.I., Kinetic algorithms for modeling conductive fluids flow on high-performance computing systems, *Dokl. Math.*, 2019, vol. 100, pp. 577–581.
15. Chetverushkin, B.N., Saveliev, A.V., and Saveliev, V.I., Kinetic consistent MHD algorithm for incompressible conductive fluids, *Computer and Fluids*, 2023, vol. 255, art. 105724.
16. Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, Michigan: McGraw-Hill, 1979.