ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 6, с. 830–843

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63+517.957

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ НЕРАВЕНСТВ К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ НЕОГРАНИЧЕННОГО РОСТА

© П. П. Матус

Институт математики НАН Беларуси, г. Минск, Беларусь

e-mail: piotr.p.matus@gmail.com

Поступила в редакцию 20.02.2024 г., после доработки 20.02.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

К операторным неравенствам и к нелинейным нестационарным начально-краевым задачам математической физики с нелинейностями неограниченного роста применена теория устойчивости линейных операторных схем. На основе достаточных условий устойчивости двухслойных и трёхслойных разностных схем А.А. Самарского получены соответствующие априорные оценки для операторных неравенств при условии критичности рассматриваемых разностных схем, т.е. когда разностное решение и его первая временна́я производная неотрицательны во всех узлах сеточной области. Полученные результаты использованы для анализа устойчивости разностных схем, аппроксимирующих уравнения Фишера и Клейна–Гордона с нелинейной правой частью.

Ключевые слова: устойчивость, операторное неравенство, разностная схема, уравнение Фишера.

DOI: 10.31857/S0374064124060088, EDN: KVXBUY

ВВЕДЕНИЕ

Для приближённого решения линейных нестационарных задач математической физики при дискретизации по времени часто используются двухслойные и трёхслойные разностные схемы, которые могут быть записаны в канонической форме операторно-разностных уравнений с операторами, действующими в конечномерном гильбертовом пространстве. А.А. Самарским [1], А.В. Гулиным [2], П.Н. Вабищевичем [3] и другими учениками А.А. Самарского разработана общая теория устойчивости таких операторно-разностных схем, достаточные и необходимые условия устойчивости сформулированы в виде операторных неравенств.

Тем не менее многие прикладные задачи современного естествознания описываются нелинейными уравнениями математической физики. Для вычислительных методов, аппроксимирующих такие нелинейные задачи, в настоящее время отсутствует общая теория устойчивости. Некоторые частные результаты получены в работах [4–9]; приведённые результаты основывались на развитии техники принципа максимума [1, с. 44; 10] для нелинейных задач и применении сеточного аналога леммы Бихари [11, 12].

Оказывается, что некоторые разностные схемы, аппроксимирующие нелинейные нестационарные уравнения математической физики, могут быть записаны в каноническом виде линейных операторно-разностных неравенств, к которым уже можно применять общую теорию устойчивости А.А. Самарского [1]. Отметим, что с помощью линейных операторных неравенств можно получить предварительные оценки разностного решения в сильной норме пространств L_∞ или C на основе известных теорем вложения. После этого задача исследования устойчивости нелинейных разностных схем становится линейной и для оценки возмущения разностного решения снова можно применить общую теорию устойчивости линейных операторно-разностных уравнений.

В настоящей работе теория устойчивости линейных операторно-разностных схем переносится на операторные неравенства. На основе достаточных условий устойчивости двухслойных и трёхслойных операторно-разностных схем получены соответствующие априорные оценки для операторных неравенств. Эти оценки применяются к анализу устойчивости разностных схем, аппроксимирующих уравнения Фишера [13–17] и Клейна–Гордона [18] с нелинейной правой частью произвольного вида.

При рассмотрении операторно-разностных неравенств предполагается, что разностные схемы являются критическими, т.е. когда разностное решение и его первая производная по времени неотрицательны во всех узлах сеточной области [19, 20]. В указанных статьях установлены условия существования специальных поточечных оценок разностных решений — так называемые условия критичности, и на их основе доказаны теоремы сравнения решений неявных разностных схем для различных нелинейных параболических уравнений, т.е. определены условия, при которых одно решение мажорируется другим во всех узлах пространственно-временно́й сетки. Полученные результаты свидетельствуют о том, что решения неявных схем проявляют некоторые важные свойства "монотонности", присущие дифференциальным задачам для нелинейных параболических уравнений.

1. ДВУХСЛОЙНЫЕ ОПЕРАТОРНО-РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Пусть задано евклидово пространство H и сетка по времени $\bar\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = \overline{0, N_0};\ N_0\tau = T\} = \omega_\tau \cup \{T\}$. Обозначим через $A, B\colon H \to H$ линейные операторы, заданные в H и не зависящие от $\tau,\ t_n$. Рассмотрим задачу Коши для двухслойной операторно-разностной схемы [1, с. 357]

$$By_t + Ay = \varphi(t), \quad 0 < t \in \omega_\tau, \quad y_0 = u_0, \tag{1}$$

где $y_n = y(t_n) \in H$ — искомая функция, а входные данные $\varphi_n, u_0 \in H$ заданы.

Здесь и далее используются стандартные безындексные обозначения из [1, 21]: $y = y_n$, $\hat y = y_{n+1}$, $\check y = y_{n-1}$, $y_{\bar t} = (y - \check y)/\tau$, $y_t = (\hat y - y)/\tau$, $y_{\mathring{t}} = (\hat y - \check y)/2\tau$, $y^{(\sigma)} = \sigma\hat y + (1-\sigma)y$, $y_{\bar t t} = (\hat y - 2y + \check y)/\tau^2$. Через H_A, где $A = A^* > 0$, будем обозначать пространство со скалярным произведением $(y, v)_A = (Ay, v)$ и нормой $\|y\|_A^2 = (Ay, y)$.

Пусть в разностной схеме (1) $B = E + \tau A$, E — единичный оператор. Тогда её можно переписать в виде

$$y_t + A\hat y = \varphi, \quad 0 < t < \omega_\tau, \quad y_0 = u_0. \tag{2}$$

Лемма 1. *Для решения разностной схемы (2) при произвольном $\tau > 0$ имеет место оценка*

$$\|y_{n+1}\| \leqslant \|y_n\| + 2\tau\|\varphi_n\|, \quad n = \overline{0, N_0 - 1}. \tag{3}$$

Доказательство. Умножив (2) скалярно в пространстве H на $2\tau\hat y = 2\tau(y^{(0.5)} + 0.5\tau y_t)$, получим неравенство

$$\tau(\|y\|^2)_t + \tau^2\|y_t\|^2 \leqslant 2\tau\|\varphi\|\,\|\hat y\|,$$

из которого непосредственно следует оценка

$$(\|\hat y\| - \|y\|)(\|\hat y\| + \|y\|) \leqslant 2\tau\|\varphi_n\|(\|\hat y\| + \|y\|).$$

Лемма доказана.

Пусть в разностной схеме (2) $\varphi(t)=\varphi_1(t)+\varphi_2(t)$. Тогда справедлива следующая

Лемма 2. *Для решения разностной схемы (2) при произвольном $\tau>0$ имеет место оценка*

$$\|y_{n+1}\|^2+\tau\|y_{n+1}\|_A^2+I(y_{n+1})\leqslant\|y_n\|^2+\frac{\tau}{2\varepsilon_1}\|\varphi_1\|^2+2\tau\|\varphi_2\|_{A^{-1}}^2, \tag{4}$$

где $\varepsilon_1>0$ — действительное число, определяемое из условия $I(y_{n+1})\geqslant 0$,

$$I(y_{n+1})=\frac{\tau}{2}(\|y_{n+1}\|_A^2-4\varepsilon_1\|y_{n+1}\|^2). \tag{5}$$

Доказательство. Умножая уравнение (2) скалярно в H на $2\tau\hat{y}=2\tau(y^{(0.5)}+0.5\tau y_t)$, будем иметь

$$\tau(\|y\|^2)_t+\tau^2\|y_t\|^2+2\tau\|y\|_A^2\leqslant 2\tau(\hat{y},\varphi). \tag{6}$$

Применяя к правой части (6) неравенство Коши с ε, обобщённое неравенство Коши–Буняковского, находим

$$2\tau(\hat{y},\varphi_1)\leqslant 2\tau\varepsilon\|\hat{y}\|^2+\frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi_1\|^2,$$

$$2\tau(\hat{y},\varphi_2)\leqslant 2\tau\|\hat{y}\|_A\|\varphi_2\|_{A^{-1}}\leqslant\frac{\tau}{2}\|\hat{y}\|_A^2+2\tau\|\varphi_2\|_{A^{-1}}^2.$$

Подставляя полученные оценки в (6), приходим к требуемому соотношению (4). Лемма доказана.

2. ДВУХСЛОЙНЫЕ ОПЕРАТОРНО-РАЗНОСТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

В этом пункте рассмотрим лишь критические разностные схемы. Дадим необходимые определения в соответствии с работами [19, 20].

Определение 1. Разностная схема (1) называется *критической*, если при критических входных данных её решение является критическим.

Определение 2. Входные данные и решение разностной задачи называются *критическими*, если при всех $t\in\omega_\tau$ выполняется неравенство

$$y(t+\tau)-y(t)\geqslant 0. \tag{7}$$

Фактически будут рассматриваться лишь такие разностные схемы, у которых разностная производная по времени y_t неотрицательна при определённых (критических) входных данных. В свою очередь, доказательство поточечного выполнения (7) для конкретной нелинейной разностной схемы является нетривиальной задачей.

Вместо разностной задачи (1) рассмотрим соответствующее операторно-разностное неравенство

$$By_t+Ay\leqslant\varphi(t),\quad 0<t\in\omega_\tau,\quad y_0=u_0, \tag{8}$$

в котором постоянные линейные операторы A и B удовлетворяют (обычным) условиям

$$B>0\quad A=A^*>0.$$

Отметим, что операторные неравенства вида (8) могут возникнуть, если в разностных схемах отбрасываются нелинейные отрицательные слагаемые в правой части уравнения, а условие критичности (7) необходимо для применения метода энергетических неравенств в сильных соболевских нормах.

Лемма 3. *Пусть*

$$R = B - 0.5\tau A \geqslant \varepsilon E,$$

где $\varepsilon > 0$ *— любое число. Тогда для решения задачи (8) имеет место оценка*

$$\|y_{n+1}\|_A^2 \leqslant \|y_n\|_A^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi_n\|^2. \tag{9}$$

Доказательство леммы при условии (7) проводится аналогично доказательству соответствующего утверждения для операторно-разностной схемы (1) [1, с. 371].

3. УРАВНЕНИЕ ФИШЕРА

Уравнение Фишера, также известное как уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова [13], названо в честь статистика и биолога Рональда Фишера, предложившего его для описания процессов популяционной динамики [14]. В области $Q_T = \{(x,t)\colon 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ поставим для этого уравнения начальную граничную задачу с краевыми условиями Дирихле:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u(1-u), \quad \lambda = \mathrm{const} > 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{10}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t). \tag{11}$$

В дальнейшем будем предполагать неотрицательность входных данных

$$0 \leqslant u_0(x), \mu_1(t), \mu_2(t) \leqslant m, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T,$$

где $m = \mathrm{const} > 0$, $\overline{Q}_T = \{(x,t)\colon 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, T — конечное число.

Отметим, что при неоднородных краевых условиях задача (10), (11) теряет свойство самосопряжённости эллиптического оператора. Здесь и далее предполагаем, что решение рассматриваемой дифференциальной задачи существует, единственно и обладает в $\bar{Q}_T$ всеми необходимыми непрерывными производными.

На равномерной сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \{x_0 = 0,\ x_N = l\}$, $\omega_h = \{x_i = ih,\ i = \overline{1, N-1},\ hN = l\}$ задачу (10), (11) аппроксимируем разностной схемой

$$y_t = \hat{y}_{\bar{x}x} + \lambda y(1-y), \tag{12}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad y_0^{n+1} = \mu_1^{n+1}, \quad y_N^{n+1} = \mu_2^{n+1}. \tag{13}$$

3.1. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО НАЧАЛЬНЫМ ДАННЫМ В $L_2(\omega_H)$

Схему (12), (13) запишем в каноническом виде [1, с. 243]:

$$C_i y_i^{n+1} = A_i y_{i-1}^{n+1} + B_i y_{i+1}^{n+1} + F_i^n, \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1^{n+1}, \quad y_N^{n+1} = \mu_2^{n+1},$$

где

$$A_i = B_i = \gamma, \quad \gamma = \tau/h^2, \quad C_i = 1 + 2\gamma, \quad F_i^n = (1 + \lambda\tau(1 - y_i^n))y_i^n.$$

Будем также использовать (обычные) равномерные сеточные нормы

$$\|v\|_{\bar{C}} = \max_{x \in \overline{\omega}_h} |v(x)|, \quad \|v\|_C = \max_{x \in \omega_h} |v(x)|.$$

Прежде чем исследовать устойчивость решения разностной схемы в нелинейном случае, получим априорную оценку решения в равномерной C-норме [5]. Докажем следующее утверждение.

Лемма 4. *При достаточно малом временно́м шаге*

$$\tau \leqslant \tau_0, \quad \tau_0 = \frac{1}{\lambda m_2}, \tag{14}$$

решение разностной задачи для всех $(x,t) \in \overline{\omega}$ *неотрицательно и ограничено:*

$$0 \leqslant y(x,t) \leqslant m_2, \quad m_2 = e^{\lambda T} \max\Big\{\max_{t\in\omega_\tau}\{\mu_1(t), \mu_2(t)\}, \|u_0\|_{\overline{C}}\Big\}. \tag{15}$$

Доказательство. Воспользуемся нестандартным принципом максимума [22] и методом индукции. Пусть на j-м временно́м слое имеет место априорная оценка

$$0 \leqslant y_i^j \leqslant m_2^j, \quad m_2^j = \max\big\{\max\{\mu_1^j, \mu_2^j\}, e^{\lambda\tau}\|y^{j-1}\|_C\big\}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Докажем, что эта же оценка имеет место и при $j = n+1$, т.е. на $(n+1)$-м временно́м слое. Так как выполнены условия положительности коэффициентов

$$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad D_i = C_i - A_i - B_i = 1 > 0,$$

то на основании леммы [17] для сеточной функции y_i^{n+1} справедлива двусторонняя оценка

$$m_1^n \leqslant y_i^{n+1} \leqslant \bar{m}_2^n,$$

в которой

$$m_1^n = \min\Big\{\min_{x\in\gamma_h}\mu(x), \min_{x\in\omega_h}\frac{F(x)}{D(x)}\Big\} = \min\Big\{\min\{\mu_1^n, \mu_2^n\}, \min_{x\in\omega_h}(1+\lambda\tau(1-y_i^n))y_i^n\Big\}.$$

В силу условия (10) и предположения индукции заключаем, что

$$m_1^n = \min\Big\{\min\{\mu_1^n, \mu_2^n\}, \min_{x\in\omega_h}(1-\lambda\tau y_i^n)y_i^n\Big\} \geqslant 0,$$

$$\bar{m}_2^n = \max\Big\{\max_{x\in\gamma_h}\mu(x), \max_{x\in\omega_h}(1+\lambda\tau(1-y_i^n))y_i^n\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\Big\{\max\{\mu_1^n, \mu_2^n\}, \max_{x\in\omega_h}(1+\lambda\tau)y_i^n\Big\} \leqslant \max\Big\{\max\{\mu_1^n, \mu_2^n\}, e^{\lambda\tau}y_i^n\Big\}. \tag{16}$$

Итак, неравенства (15) для $j = n+1$ доказаны в силу произвольности $n = \overline{0, N_0-1}$, и из (16) следует требуемая оценка (15). Лемма доказана.

Следствие. *При выполнении условий леммы 4 для решения разностной задачи (12), (13) имеет место оценка*

$$\max_{t\in\overline{\omega}_\tau}\|y(t)\|_{\overline{C}} \leqslant m_2.$$

Доказательство. Для доказательства устойчивости рассматриваемой разностной схемы по начальным данным необходимо также рассмотреть задачу с возмущённым начальным условием

$$\tilde{y}_t = \hat{\tilde{y}}_{\bar{x}x} + \lambda\tilde{y} - \lambda\tilde{y}^2, \tag{17}$$

$$\tilde{y}(x,0) = \tilde{u}_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad \tilde{y}_0^{n+1} = \mu_1^{n+1} \geqslant 0, \quad \tilde{y}_N^{n+1} = \mu_2^{n+1} \geqslant 0. \tag{18}$$

Как и для решения разностной задачи (12), (13), при $\tau \leqslant \tilde{\tau}_0$, $\tau_0 = 1/(\lambda\tilde{m}_2)$, $\tilde{m}_2 = e^{\lambda T}\max\{\max_{t\in\omega_\tau}\{\mu_1(t), \mu_2(t)\}, \|\tilde{u}_0\|_{\overline{C}}\}$ аналогично можно получить оценку

$$0 < \tilde{y}(x,t) \leqslant \tilde{m}_2, \quad (x,t) \in \bar{\omega}.$$

Вычитая из (17), (18) соответствующие уравнения (12), (13), получаем задачу для возмущения $\bar{y}=\tilde{y}-y$ с однородными граничными условиями:

$$\bar{y}_t=\hat{\bar{y}}_{\bar{x}x}+\lambda\bar{y}(1-(y+\tilde{y})), \tag{19}$$

$$\bar{y}(x,0)=\bar{u}_0(x)=\tilde{u}_0(x)-u_0(x), \quad \bar{y}_0^{n+1}=\bar{y}_N^{n+1}=0. \tag{20}$$

Разностная задача (19), (20) может быть записана в виде (2), если положить $y_n = (y_1^n,\ldots,y_{N-1}^n)^T$, $\varphi_n=(\varphi_1^n,\ldots,\varphi_{N-1}^n)^T$, оператор $A\colon H\to H$, где линейное пространство $H=H_h$ состоит из множества векторов вида $\big(v(x_1),\ldots,v(x_{N-1})\big)^T$, скалярное произведение и норма в котором задаются формулами

$$(y,v)=\sum_{i=1}^{N-1}hy_iv_i, \quad \|v\|=\sqrt{(v,v)},$$

$$(Ay)_i=-y_{\bar{x}x,i}, \quad i=\overline{1,N-1}, \quad y_0=y_N=0, \quad A=A^*\geqslant\delta E, \quad \delta=8/e^2.$$

Для решения задачи (19), (20) воспользуемся априорной оценкой (3):

$$\|\bar{y}_{n+1}\|\leqslant\|\bar{y}_n\|+2\tau\lambda(1+\|y\|_C+\|\check{y}\|_C)\|\bar{y}_n\|\leqslant(1+\tau c)\|\bar{y}_n\|\leqslant e^{ct_{n+1}}\|\bar{u}_0\|,$$

где $c=2\lambda(1+m_2+\tilde{m}_2)$. Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Разностная схема (12), (13) абсолютно ρ-устойчива в сеточной норме $L_2(\omega_h)$ по начальным данным и имеет место априорная оценка*

$$\max_{t\in\bar{\omega}_\tau}\|\tilde{y}(t)-y(t)\|\leqslant c\|\tilde{u}_0-u_0\|. \tag{21}$$

Тем самым мы доказали классическую устойчивость, опираясь на предварительные оценки разностного решения в сильной равномерной норме, на основе теории устойчивости двухслойных операторно-разностных схем [1].

3.2. СХОДИМОСТЬ

Рассмотрим задачу для погрешности метода $z=y-u$. Подставляя $y=z+u$ в уравнения (12), (13), получаем задачу для z с однородными граничными и начальными условиями:

$$z_t=\hat{z}_{\bar{x}x}+\lambda(1-2u)z+\psi, \tag{22}$$

$$z(x,0)=0, \quad x\in\bar{\omega}_h, \quad z_0^{n+1}=z_N^{n+1}.$$

Запишем эту задачу в операторном виде (2):

$$z_t+A\hat{z}=\varphi_1+\varphi_2, \quad z_0=0,$$

где по-прежнему $(Az)_i=-z_{\bar{x}x,i}$, $i=\overline{1,N-1}$, $z_0=z_N=0$, $A=A^*>0$, $\varphi_1=\lambda(1-2u)z+\psi$, $\psi=-u_t+\hat{u}_{\bar{x}x}+\lambda u(1-u)$ — погрешность аппроксимации схемы на решении.

Для анализа скорости сходимости схемы (12), (13) применим априорную оценку (4). Прежде всего заметим, что, используя вложение $8\|z\|^2\leqslant l^2\|z\|_A^2$ и выбирая ε из условия $1-\varepsilon l^2/2\geqslant0$, можем убедиться в выполнении неравенства $I(z_{n+1})\geqslant0$. Следовательно, на основании априорной оценки (4) заключаем, что

$$\|z_{n+1}\|^2+\tau\|z_{n+1}\|_A^2\leqslant\|z_n\|^2+\frac{\tau\lambda^2}{2\varepsilon}\|1-2u\|_C^2\|z_n\|^2+2\tau\|z_{n+1}\|_{A^{-1}}^2,$$

откуда следует оценка

$$\|z_{n+1}\|^2+\sum_{k=0}^{n}\tau\|z_k\|^2\leqslant c_2\sum_{k=1}^{n}\tau_k\|\psi^k\|^2_{A^{-1}}\leqslant c_3(h^2+\tau)^2,$$

выражающая скорость сходимости как в сеточной норме L_2, так и в интегральной по времени норме $\|z\|_{L_2(\bar\omega_h\times\bar\omega_\tau)}$. Оценки скорости сходимости в негативных нормах по правой части обычно используются при анализе точности решения на обобщённых решениях дифференциальной задачи (5).

3.3. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ В H_A

Для получения априорных оценок в более сильных энергетических нормах на основе теории операторно-разностных неравенств нам нужно сначала доказать, что схема (12), (13) является критической, т.е. что $y_t\geqslant 0$ при всех $(x,t)\in\bar\omega$.

Вычитая из уравнения (12) это же уравнение, записанное на $(n-1)$-м временно́м слое, получаем задачу для $v=y_{\bar t}$:

$$v_t=\hat v_{\bar xx}+\lambda(1-(y+\check y))v,$$

$$v(x,0)=v_0,\quad x\in\omega_h,\quad v_0^{n+1}=\mu_1,\quad v_N^{n+1}=\mu_2, \tag{23}$$

где сеточная функция $v_0(x)$, $x\in\bar\omega_h$, является решением разностной задачи

$$v_{0i}+\tau v_{0\bar xx,i}=u_{0\bar xx,i}+\lambda u_{0i}(1-u_{0i}),\quad i=\overline{1,N-1}, \tag{24}$$

$$v_{00}=\mu_{1t}(0),\quad v_{0N}=\mu_{2t}(0),\quad \mu_1(0)=u_0(0),\quad \mu_2(0)=u_0(l). \tag{25}$$

Разностная задача (24), (25) является следствием разностной схемы и условия согласованности входных данных дифференциальной задачи. В свою очередь, схему (23), (24) можно рассматривать как аппроксимацию дифференциального уравнения Фишера, записанного в момент времени $t=0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_0''(x)+\lambda(1-u_0)u_0,$$

где $u_0(x)$ — начальная функция, удовлетворяющая уравнению (11). Далее предполагаем неотрицательность всех входных данных:

$$v_0(x)\geqslant 0,\quad x\in\bar\omega_h,\quad \mu_k(t)\geqslant 0,\quad t\in\omega_\tau,\quad k=1,2.$$

Кроме того, будем предполагать, что временной шаг τ является достаточно малым:

$$\tau\leqslant\tau_0,\quad \tau_0=\frac{1}{\lambda m_3},\quad m_3=2m_2.$$

Тогда на основании леммы 4 имеем неравенство

$$v_i^{n+1}\geqslant\min\Big\{\min_{k=1,2}\mu_{kt},\min_{x\in\omega_h}\big(1+\lambda\tau(1-(y+\check y))v_i^n\big)\Big\}\geqslant 0$$

при достаточно малом $\tau\leqslant\tau_0$. Так как $y,v\geqslant 0$ при всех $(x,t)\in\bar\omega$, то в предположении однородности граничных условий разностную задачу (12), (13) можно записать в виде уже линейного операторно-разностного неравенства (8):

$$By_t+Ay\leqslant\varphi(t),\quad v(0)=v_0,$$

в котором $B=E+\tau A$, $A=A^*>0$, $\varphi(t)=\lambda y$.

Воспользуемся теперь леммой 3, в условии которой неравенство

$$R = B - 0.5\tau A = E + 0.5\tau A \geqslant \varepsilon E$$

выполнено для любого $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Кроме того, в силу вложения $8\|y_{n+1}\|^2 \leqslant l^2\|y_{n+1}\|_A^2$ неравенство

$$I(y_{n+1}) \geqslant \frac{\tau}{2}\left(1 - \frac{l}{2}\varepsilon_1\right)\|y_{n+1}\|_A^2 \geqslant 0$$

выполнено для любого $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2/l$. Следовательно, на основании оценки (9) заключаем, что

$$\|y_{n+1}\|_A^2 \leqslant \|y_n\|_A^2 + \frac{\tau\lambda^2}{2\varepsilon_1}\|y_n\|^2 \leqslant (1+\tau c_4)\|y_n\|_A^2 \leqslant \ldots \leqslant e^{c_4 t_n + 1}\|v_0\|_A^2.$$

Здесь $c_4 = \lambda^2 l^2/(16\varepsilon_1)$. Итак, доказана

Теорема 2. *Пусть $\mu_{1t} = \mu_{2t} = 0$, $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2/l$, $\tau \leqslant \tau_0$, $\tau_0 = 1/(\lambda m_3)$. Тогда при положительности всех входных данных разностных задач (12), (13), (21), (22) для сеточной функции y имеет место в H_A априорная оценка*

$$\max_{t\in\overline{\omega}_\tau}\|y(t)\|_A \leqslant e^{\frac{c_4 T}{2}}\|u_0\|_A.$$

Замечание. Все полученные выше результаты остаются справедливыми и для разностных схем, аппроксимирующих квазилинейные уравнения с нелинейностями неограниченного роста [5]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(u), \quad u \in D_u,$$

$$0 < k_1 \leqslant k(u) < k_2, \quad k'_u \leqslant 0, \quad |k'(u)| \leqslant k_3, \quad u \in \bar{D}_u, \quad u' \in \bar{D}_{\tilde{u}},$$

где $\bar{D}_u$ и $\bar{D}_{\tilde{u}}$ — области значений точного и возмущённого решений:

$$\bar{D}_u = \{u(x,t)\colon m_1 \leqslant u(x,t) \leqslant m_2,\ (x,t)\in\bar{Q}_T\},$$
$$\bar{D}_{\tilde{u}} = \{u(x,t)\colon \tilde{m}_1 \leqslant \tilde{u}(x,t) \leqslant \tilde{m}_2,\ (x,t)\in\bar{Q}_T\}.$$

4. ТРЁХСЛОЙНЫЕ ОПЕРАТОРНО-РАЗНОСТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Рассмотрим задачу Коши для операторно-разностного неравенства

$$Dy_{\bar{t}t} + Ay \leqslant \varphi(t), \quad 0 < t \in \omega_\tau, \tag{26}$$

$$y_0 = u_0, \quad y_{t,0} = u_{01},$$

где $y_n = y(t_n) \in H$ — искомая функция, а $\varphi_n = \varphi(t_n)$ и $u_0, u_{01} \in H$ заданы. Далее будем использовать следующие очевидные тождества:

$$2\tau y_{\mathring{t}} = \tau(y_{\bar{t}} + y_t) = y^{(0.5)} - \check{y}^{(0.5)}, \tag{27}$$

$$y = \frac{1}{4}(y^{(0.5)} + \check{y}^{(0.5)}) - \frac{\tau^2}{4}y_{\bar{t}t}. \tag{28}$$

Определим пространство H^2 как множество векторов

$$Y = \{Y^{(1)}, Y^{(2)}\}, \quad Y^{(\alpha)} \in H, \quad \alpha = 1, 2,$$

в котором сложение и умножение на число проводятся покоординатно:

$$Y+V=\{Y^{(1)}+V^{(1)},Y^{(2)}+V^{(2)}\},\quad \alpha Y=\{\alpha Y^{(1)},\alpha Y^{(2)}\}.$$

Если в пространстве H введено скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$, то в пространстве H^2 также можно ввести скалярное произведение

$$(Y,V)=\sum_{\alpha}^{2}(Y^{(\alpha)},V^{(\alpha)}).$$

В H^2 определим норму

$$\|Y_{n+1}\|=\{\|y_t\|_R^2+\|y^{(0.5)}\|_A^2\}^{1/2}.$$

Всюду ниже предполагаем, что все рассматриваемые разностные схемы являются критическими, т.е. существуют такие неотрицательные входные данные, при которых решение y и производная y_t являются неотрицательными сеточными функциями при всех $(x,t)\in\bar{\omega}$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть постоянные операторы A, D удовлетворяют соотношениям*

$$A=A^*>0,\quad D=D^*>0,$$

$$R=D-\frac{\tau^2}{4}A>E,\quad R=R^*,\quad R^{-1}<E,$$

$$D\geqslant\frac{1+\varepsilon}{4}\tau^2A. \tag{29}$$

Тогда имеют место следующие априорные оценки:

$$\|Y_{n+1}\|\leqslant\|Y_n\|+\tau\|\varphi(t_n)\|, \tag{30}$$

$$\|y_{n+1}\|_A\leqslant\sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\biggl(\|y_0\|_A+\|y_{t,0}\|_D+\sum_{k=1}^{n}\tau\|\varphi_k\|\biggr).$$

Доказательство. Используя тождество (28), перепишем неравенство (26) в виде

$$Ry_{\bar{t}t}+\frac{1}{2}\bigl(y^{(0.5)}+y^{(0.5)}\bigr)\leqslant\varphi_n. \tag{31}$$

Умножая неравенство (31) скалярно в H на $2\tau y_{\mathring{t}}$ и учитывая тождество (27), получаем энергетическое выражение

$$\|Y_{n+1}\|^2-\|Y_n\|^2\leqslant\tau(y_t+y_{\bar{t}},\varphi). \tag{32}$$

Правую часть в (31) оценим следующим образом:

$$\tau(y_t+y_{\bar{t}},\varphi)\leqslant\tau(\|y_t\|_R+\|y_{\bar{t}}\|_R)\|\varphi\|_{R^{-1}}\leqslant\tau(\|Y_{n+1}\|+\|Y_n\|)\|\varphi\|.$$

Подставляя последнюю оценку в (32), приходим к первому неравенству (30). Второе неравенство следует из двусторонней оценки [1, с. 399]

$$\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\|y\|_A\leqslant\|Y\|\leqslant\|\check{y}\|_A+\|y_{\bar{t}}\|_D$$

и неравенства

$$\|Y_{n+1}\|\leqslant\|Y_1\|+\sum_{k=1}^{n}\tau\|\varphi(t_k)\|,$$

которое непосредственно вытекает из выражения (29). Теорема доказана.

4.1. УРАВНЕНИЕ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

Уравнение Клейна–Гордона играет важную роль в математической физике, в частности, используется при изучении солитонов в физике конденсированного вещества [18]. В области Q_T рассмотрим для этого уравнения следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f_1(u)+f_2(x,t), \tag{33}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_{01}(x), \tag{34}$$

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0. \tag{35}$$

Наряду с задачей (33)–(35) будем рассматривать и задачу с возмущёнными входными данными

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}+f_1(\tilde{u})+\tilde{f}_2(x,t),$$

$$\tilde{u}(x,0)=\tilde{u}_0(x), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x,0)=\tilde{u}_{01}(x),$$

$$\tilde{u}(0,t)=0, \quad \tilde{u}(l,t)=0.$$

Как обычно в задачах с неограниченной нелинейностью предполагаем выполнение следующих условий, накладываемых на функции, зависящие от точного решения:

$$f_1(u)\leqslant 0, \quad f_1(\tilde{u})\leqslant 0, \quad |f(\tilde{u})-f(u)|\leqslant L|\tilde{u}-u|, \quad u\in\bar{D}_u, \quad \tilde{u}\in\bar{D}_{\tilde{u}}, \quad L=\mathrm{const}>0,$$

лишь в области значений точного решения.

На равномерной сетке $\bar{\omega}=\bar{\omega}_h\times\bar{\omega}_\tau$ дифференциальные задачи заменим разностными:

$$y_{\bar{t}t}=y_{\bar{x}x}^{(\sigma,\sigma)}+f_1(y)+f_2, \tag{36}$$

$$y(x,0)=u_0(x), \quad x\in\bar{\omega}_h, \quad y_t(x,0)=u_1(x), \quad x\in\omega_h, \quad \hat{y}\big|_{\gamma_h}=0; \tag{37}$$

$$\tilde{y}_{\bar{t}t}=\tilde{y}_{\bar{x}x}^{(\sigma,\sigma)}+f_1(\tilde{y})+\tilde{f}_2, \tag{38}$$

$$\tilde{y}(x,0)=\tilde{u}_0(x), \quad x\in\bar{\omega}_h, \quad \tilde{y}_t(x,0)=\tilde{u}_1(x), \quad x\in\omega_h, \quad \hat{\tilde{y}}\big|_{\gamma_h}=0, \tag{39}$$

где, как обычно,

$$y^{(\sigma,\sigma)}=y+\sigma\tau^2 y_{\bar{t}t}, \tag{40}$$

$$u_1(x)=u_{01}+\frac{\tau}{2}\big(u_0''(x)+f_1(u_0)+f_2(x,0)\big), \quad x\in\omega_h,$$

$$\tilde{u}_1(x)=\tilde{u}_{01}+\frac{\tau}{2}\big(\tilde{u}_0''(x)+f_1(\tilde{u}_0)+\tilde{f}_2(x,0)\big), \quad x\in\omega_h.$$

Пусть $y^n\in\bar{D}_u$ и, следовательно, $f_1(y^n)\leqslant 0$. Тогда из (36) имеем неравенство

$$y_{\bar{t}t}\leqslant y_{\bar{x}x}^{(\sigma,\sigma)}+f_2. \tag{41}$$

Учитывая тождество (40), разностную схему (41), (37) запишем в каноническом виде (26):

$$Dy_{\bar{t}t}+Ay\leqslant f_2(t), \quad 0<t\in\omega_\tau, \tag{42}$$

здесь $D=E+\sigma\tau^2 A$, $R=E+\tau^2(\sigma-1/4)A$.

Пусть
$$\frac{1+\varepsilon}{4}\leqslant\sigma\leqslant 1,\quad 0<\varepsilon\leqslant 3. \tag{43}$$
Тогда $R\geqslant E$ и выполнено условие (41). На основании теоремы 3 заключаем, что
$$\|y_{n+1}\|_C\leqslant\frac{\sqrt{l}}{2}\|y_{n+1}\|_A\leqslant M\biggl(\|u_0\|_A+\|u_1\|_D+\sum_{k=1}^{N_0-1}\tau\|f_{2k}\|\biggr)\leqslant m_3,\quad m_3e^{cT}\leqslant m_2, \tag{44}$$
где
$$M=\frac{\sqrt{l}}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}},\quad c=\frac{Ll}{2\sqrt{2}}.$$

Аналогично и для возмущённой разностной схемы (38), (39)
$$\|\tilde y_{n+1}\|_{L_\infty}=\|\tilde y_{n+1}\|_C\leqslant\tilde m_3,\quad \tilde m_3e^{cT}\leqslant\tilde m_2. \tag{45}$$
Следовательно, $y^{n+1}\in\bar D_u$, $\bar y^{n+1}\in\bar D_{\tilde u}$. Итак, доказана

Теорема 4. *Пусть в разностной схеме (26), (37) вес σ удовлетворяет неравенству (43). Тогда для решений разностных схем $y_n\in\bar D_u$, $\tilde y_n\in\bar D_{\tilde u}$ для всех $n=\overline{0,N_0}$ имеют место оценки*
$$\|y_n\|_C\leqslant\bar m_3,\quad \|\tilde y_n\|_C\leqslant\bar m_3,\quad \bar m_3=\max\{m_3,\tilde m_3\},$$
причём постоянные m_3, $\tilde m_3$ зависят лишь от ε и входных данных задачи и удовлетворяют условиям (44), (45).

4.2. УСТОЙЧИВОСТЬ

Вычитая из возмущённой задачи (38), (39) соответствующие уравнения (36), (37), с учётом сделанных выше предположений получаем разностное неравенство
$$\bar y_{\bar tt}\leqslant\bar y^{(\sigma,\sigma)}_{\bar xx}+L\bar y+\bar f_2,$$
$$\bar y_0=\tilde u_0-u_0,\quad \bar y_{t,0}=\tilde u_1-u_1.$$

При выполнении условий (43) можем воспользоваться априорной оценкой (30):
$$\|\bar Y_{n+1}\|\leqslant\|Y\|_n+\tau L\|\bar y\|+\tau\|\bar f_2\|.$$
Так как
$$\|y_n\|\leqslant\frac{l}{2\sqrt{2}}\|y_n\|_A\leqslant\frac{l}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\|Y_n\|,$$
то из последнего неравенства находим оценки
$$\|\tilde y_n-y_n\|_C\leqslant\frac{\sqrt{l}}{2}\|\bar Y_n\|\leqslant Me^{cT}\biggl(\|\tilde u_0-u_0\|_A+\|\tilde u_1-u_1\|_D+\sum_{k=1}^{N_0-1}\tau\|\tilde f_{2k}-f_{2k}\|\biggr), \tag{46}$$
выражающие абсолютную устойчивость решения разностный схемы (26), (46) в равномерной норме пространств L_∞ или C при единственном ограничении на вес (43).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований “Конвергенция—2025” (проект 2021025).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. — М. : Наука, 1977. — 657 с.
2. Самарский, А.А. Устойчивость разностных схем / А.А. Самарский, А.В. Гулин. — М. : Наука, 1973. — 415 с.
3. Вабищевич, П.Н. Аддитивные операторно-разностные схемы / П.Н. Вабищевич. — М. : Красанд, 2019. — 464 с.
4. Matus, P. Stability of difference schemes for nonlinear time-dependent problems / P. Matus // Comput. Meth. Appl. Math. — 2003. — V. 3, № 2. — P. 313–329.
5. Matus, P. On convergence of difference schemes for IBVP for quasilinear parabolic equation with generalized solutions / P. Matus // Comput. Meth. Appl. Math. — 2014. — V. 14, № 3. — P. 361–371.
6. Матус, П.П. Исследование устойчивости и сходимости разностных схем для политропного газа с дозвуковыми течениями / П.П. Матус, М.М. Чуйко // Дифференц. уравнения. — 2009. — Т. 45, № 7. — С. 1053–1064.
7. Matus, P. Nonlinear stability for equations of isentropic gas dynamics / P. Matus, A. Kolodynska // Comput. Meth. Appl. Math. — 2008. — V. 8, № 2. — P. 155–170.
8. Матус, П.П. Устойчивость по начальным данным и монотонность неявной разностной схемы для однородного уравнения пористой среды с квадратичной нелинейностью / П.П. Матус // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 7. — С. 1011–1021.
9. Матус, П.П. О корректности разностных схем для полулинейного уравнения с обобщёнными решениями / П.П. Матус // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2010. — Т. 50, № 12. — С. 2155–2175.
10. Matus, P. The maximum principle and same its applications / P. Matus // Comput. Meth. Appl. Math. — 2002. — V. 2, № 1. — P. 50–91.
11. Лемешевский, С.В. Лемма Бихари и её применение к исследованию устойчивости нелинейных разностных схем / С.В. Лемешевский, Е.К. Макаров, П.П. Матус // Докл. НАН Беларуси. — 2010. — Т. 54, № 1. — С. 5–9.
12. Демидович, В.Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений / В.Б. Демидович // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т. 5, № 7. — С. 1247–1255.
13. Колмогоров, А.Н. Исследования уравнения диффузии, соединённой с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме / А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секция А. — 1937. — Т. 1, № 6. — С. 1–25.
14. Fisher, R.A. The wave of advance of advantageous genes / R.A. Fisher // Ann. Hum. Genetic. — 1937. — V. 7, № 4. — P. 353–369.
15. Murray, J.D. Mathematical Biology: an Introduce / J.D. Murray. — Berlin, 2001. — 551 p.
16. Матус, П.П. Компактные и монотонные разностные схемы для параболических уравнений / П.П. Матус, Б.Д. Утебаев // Мат. моделирование. — 2021. — Т. 33, № 4. — С. 60–78.
17. Матус, П.П. Глобально устойчивые разностные схемы для уравнения Фишера / П.П. Матус, Д. Пылак // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 7. — С. 960–967.
18. Caudrey, P.J. The sine-Gordon as a model classical fied theory / P.J. Caudrey // Nuovo Cimento. — 1975. — V. 25, № 2. — P. 497–511.
19. О сравнении решений параболических уравнений / В.А. Галиктионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов, А.А. Самарский // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 248, № 3. — С. 586–589.
20. Галиктионов, В.А. Условия критичности и теоремы сравнения разностных решений нелинейных параболических уравнений / В.А. Галиктионов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1983. — Т. 23, № 1. — С. 109–118.
21. Samarskii, A.A. Difference schemes with operator factors / A.A. Samarskii, P.P. Matus, P.N. Vabishchevich. — Dordrech : Kluwer, 2002. — 384 p.
22. Matus, P. Analysis of second order difference schemes on non-uniform grids for quasilinear parabolic equations / P. Matus, L.M. Hieu, L.G. Vulkov // J. Comput. Appl. Math. — 2017. — V. 310. — P. 186–199.

USING OPERATOR INEQUALITIES IN STABILITY RESEARCH OF DIFFERENCE SCHEMES FOR NONLINEAR BOUNDARY PROBLEMS WITH NONLINEARITY OF UNLIMITED GROWTH

P. P. Matus

Institute of Mathematics of NAS of Belarus, Minsk, Belarus
e-mail: piotr.p.matus@gmail.com

The article develops the theory of stability of linear operator schemes for operator inequalities and nonlinear nonstationary initial-boundary value problems of mathematical physics with nonlinearities of unlimited growth. Based on sufficient conditions for the stability of A.A. Samarsky's two-layer and three-layer difference schemes, the corresponding a priori estimates for operator inequalities are obtained under the condition of the criticality of the difference schemes under consideration, i.e. when the difference solution and its first time derivative are non-negative at all nodes of the grid region. The results obtained are applied to the analysis of the stability of difference schemes that approximate the Fisher and Klein-Gordon equation with a nonlinear right-hand side.

Keywords: stability, operator inequality, difference scheme, Fisher equation.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the state scientific research program "Convergence—2025" (project no. 2021025).

REFERENCES

1. Samarskij, A.A., *Teoriya raznostnyh skhem* (Theory of Difference Schemes), Moscow: Nauka, 1977.
2. Samarskij, A.A. and Gulin, A.A., *Ustojchivost' raznostnyh skhem* (Stability of Difference Schemes), Moscow: Nauka, 1973.
3. Vabishchevich, P.N., *Additivnye operatorno-raznostnye skhemy* (Additive Operator-Difference Schemes), Moscow: Krasand, 2019.
4. Matus, P.P., Stability of difference schemes for nonlinear time-dependent problems, *Comput. Meth. Appl. Math*, 2003, vol. 3, pp. 313–329.
5. Matus, P., On convergence of difference schemes for IBVP for quasilinear parabolic equation with generalized solutions, *Comput. Meth. Appl. Math.*, 2014, vol. 14, no. 3, pp. 361–371.
6. Matus, P.P. and Chujko, M.M., Issledovanie ustojchivosti i skhodimosti raznostnyh skhem dlya politropnogo gaza s dozvukovymi techeniyami, *Differ. Uravn.*, 2009, vol. 45, no. 7, pp. 1053–1064.
7. Matus, P.P. and Kolodynska, A., Nonlinear stability for equations of isentropic gas dynamics, *Comput. Meth. Appl. Math.*, 2008, vol. 8, no. 2, pp. 155–170.
8. Matus, P.P., Ustojchivost' po nachal'nym dannym i monotonnost' neyavnoj raznostnoj skhemy dlya odnorodnogo uravneniya poristoj sredy s kvadratichnoj nelinejnost'yu, *Differ. Uravn.*, 2010, vol. 46, no. 7, pp. 1011–1021.
9. Matus, P.P., O korrektnosti raznostnyh skhem dlya polulinejnogo uravneniya s obobshchennymi resheniyami, *Zhurn. Vychislit. Matem. i Matem. Fiz.*, 2010, vol. 50, no. 12, pp. 2155–2175.
10. Matus, P.P., The maximum principle and same its applications, *Comput. Meth. Appl. Math.*, 2002, vol. 2, no. 1, p. 50–91.
11. Lemeshevskij, S.V., Makarov, E.K., and Matus, P.P., Lemma Bihari i ee primenenie k issledovaniyu ustojchivosti nelinejnyh raznostnyh skhem, *Dokl. NAN Belarusi*, 2010, vol. 54, no. 1, pp. 5–9.
12. Demidovich, V.B., Ob odnom priznake ustojchivosti raznostnyh uravnenij, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 7, pp. 1247–1255.
13. Kolmogorov, A.N., Petrovskij, I.G., and Piskunov, N.S., Issledovaniya uravneniya diffuzii, soedinyonnoj s vozrastaniem kolichestva veshchestva i ego primenenie k odnoj biologicheskoj probleme, *Bull. Mosk. Gos. Un-ta. Sekciya A*, 1937, vol. 1, no. 6, pp. 1–25.
14. Fisher, R.A., The wave of advance of advantageous genes, *Ann. Hum. Genetic*, 1937, vol. 7, no. 4, pp. 353–369.
15. Murray, J.D., *Mathematical Biology: an Introduce*, Berlin, 2001.
16. Matus, P.P. and Utebaev, B.D., Kompaktnye i monotonnye raznostnye skhemy dlya parabolicheskih uravnenij, *Mat. Modelirovanie*, 2021, vol. 33, no. 4, pp. 60–78.

17. Matus, P.P. and Pylak, D., Globally stable difference schemes for the Fisher equation, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 7, pp. 962–969.
18. Caudrey, P.J., The sine-Gordon as a model classical fied theory, *Nuovo Cimento*, 1975, vol. 25, pp. 497–511.
19. Galiktionov, V.A., Kurdyumov, S.P., Mihajlov, A.P., and Samarskij, A.A., O sravnenii reshenij parabolicheskih uravnenij, *Dokl. AN SSSR*, 1979, vol. 248, no. 3, pp. 586–589.
20. Galiktionov, V.A., Usloviya kritichnosti i teoremy sravneniya raznostnyh reshenij nelinejnyh parabolicheskih uravnenij, *Zhurn. Vychisl. Matem. i Matem. Fiz.*, 1983, vol. 23, no. 1. pp. 109–118.
21. Samarskii, A.A., Matus, P.P., and Vabishchevich, P.N., *Difference Schemes with Operator Factors*, Dordrech: Kluwer, 2002.
22. Matus, P., Hieu, L.M., Vulkov, L.G., Analysis of second order difference schemes on non-uniform grids for quasilinear parabolic equations, *J. Comput. Appl. Math.*, 2017, vol. 310, pp. 186–199.