

УДК 519.63

ЯВНО-НЕЯВНЫЕ СХЕМЫ РАСЧЁТА ДИНАМИКИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД С РАЗУПРОЧНЕНИЕМ

© В. И. Голубев¹, И. С. Никитин², А. В. Шевченко³, И. Б. Петров⁴^{1,3,4}Московский физико-технический институт

(национальный исследовательский университет), г. Долгопрудный

^{1,2,3}Институт автоматизации проектирования РАН, г. Москваe-mail: ¹golubev.vi@mipt.ru, ²i_nikitin@list.ru, ³alexshevchenko@phystech.edu, ⁴petrov@mipt.ru

Поступила в редакцию 08.02.2024 г., после доработки 08.02.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Исследовано динамическое поведение упруговязкопластических сред под действием внешней нагрузки. Для случая линейной функции вязкости и нелинейной функции разупрочнения построена явно-неявная расчётная схема, позволяющая получать численное решение исходной полулинейной гиперболической задачи. Данный подход не предполагает использование метода расщепления по физическим процессам, несмотря на это был получен явный вычислительный алгоритм, допускающий эффективную реализацию в современных вычислительных системах.

Ключевые слова: математическое моделирование, упруговязкопластическая среда, полулинейная гиперболическая система, явно-неявная схема.

DOI: 10.31857/S0374064124060076, EDN: KW BOSN

ВВЕДЕНИЕ

Для описания быстропротекающих процессов в твёрдых деформируемых средах используют классическую модель изотропной упруговязкопластической (УВП) среды Соколовского–Малверна. Система уравнений в многомерном случае была сформулирована в работах [1, 2].

В нестационарных (и тем более в квазистатических) процессах с характерным временем много большим, чем τ (характерное время релаксации), упруговязкопластические среды ведут себя как упругопластические (УП), и при $\tau \rightarrow 0$ УВП системы уравнений переходят в системы типа Прандтля–Рейса [3–6]. Ещё одним достоинством УВП теории по сравнению с УП теорией является дивергентность системы уравнений, что обеспечивает консервативность при расчёте разрывных решений.

Численные методы решения УП и УВП динамических систем уравнений описаны в работах [7–9]. Как правило, эти методы основаны на идее проектирования соответствующих компонент напряжений (девиаторов напряжений) [10, 11] на достаточно произвольные выпуклые поверхности текучести, в том числе для моделей с изотропным кинематическим или трансляционным упрочнением. Фактически в численных методах реализуется идея расщепления алгоритма на упругий шаг расчёта и последующую корректировку компонент напряжений в соответствии с выбранным типом поверхности текучести и упрочнения [12]. Подробные описания УВП моделей и явных численных алгоритмов решения даны в статьях [13–17].

В работах [18–20] предложен явно-неявный численный метод решения УВП динамической системы уравнений, в том числе повышенного порядка, для общего вида степенных

функций вязкости за пределом текучести. В результате аналитического решения неявной аппроксимации уравнений для девиаторов с малым параметром времени релаксации получены корректировочные формулы для идеальной и упрочняющейся упруговязкопластической среды. Эти разностные формулы допускают непосредственный предельный переход при $\tau \rightarrow 0$, что соответствует переходу к решению УП системы уравнений. Таким образом, достоинством УВП систем уравнений и полученных на их основе явно-неявных численных схем является то, что они, с одной стороны, отражают физику динамических процессов деформирования, а с другой — обеспечивают регуляризацию недивергентных УП систем уравнений типа Прадтля–Рейса.

Однако при учёте разупрочнения операторы УП теории на шаге по времени теряют свойство положительной определённости, критерий Адамара корректности краевых задач нарушается и пошаговые алгоритмы численного решения становятся неработоспособными [21]. Операторы УВП теории свободны от этого недостатка.

Для преодоления этих трудностей предложены модели с дополнительной переменной, называемой *повреждаемостью* (условной плотностью микродефектов — микропор, микротрещин и т.п.), рост которой описывается дополнительным кинетическим уравнением [22]. Разупрочнение, или (в более общем смысле) разрушение, выражается в уменьшении значений модулей упругости и/или предела текучести из-за роста числа микродефектов в единице объёма. Вариантом такого подхода для описания явления разупрочнения является регуляризация уравнений УП среды с помощью перехода к уравнениям УВП среды.

В данной работе исследуется классическая УВП система, дифференциальная часть которой совпадает с системой уравнений динамической теории упругости. УВП система является полулинейной гиперболической. Свободные недифференциальные члены, связанные с вязкопластическими скоростями деформаций, отличны от нуля вне поверхности текучести и задаются нелинейной функцией вязкости, как правило, степенного вида. Разупрочнение описывается с помощью динамического уравнения для соответствующего параметра, который растёт с увеличением интенсивности вязкопластических деформаций. Предел текучести при этом падает по заданному нелинейному закону в зависимости от параметра разупрочнения. Постановка начально-краевой задачи для такой системы уравнений является корректной. Для её аппроксимации используется ранее предложенный явно-неявный метод [19]. В результате аналитического решения алгебраических уравнений неявной аппроксимации получены формулы для корректировки девиаторов напряжений и параметра разупрочнения после упругого шага расчёта. Приведены численные решения ряда задач с развитием ярко выраженных полос скольжения (локализации деформаций).

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ С РАЗУПРОЧНЕНИЕМ

В декартовой прямоугольной системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$) система уравнений изотропной УВП среды с разупрочнением при малых деформациях имеет вид [4, 9]

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, & \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k}, & \frac{\partial s_{ij}}{\partial t} &= 2\mu e'_{ij} - 2\mu \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}} \frac{1}{\tau} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}}{\sigma_s(k)} - 1 \right) \right\rangle, \\ \frac{\partial \kappa}{\partial t} &= \sqrt{e_{kl}^{vp} e_{kl}^{vp}}, & \sigma_s(\kappa) &= \sigma_0 f(\kappa), & e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), & e'_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}, \\ e_{ij}^{vp} &= \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}} \frac{1}{\tau} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}}{\sigma_s(\kappa)} - 1 \right) \right\rangle, & s_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, & \sigma &= \frac{\sigma_{kk}}{3}, & i, j &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь v_i — компоненты вектора скорости; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; s_{ij} — компоненты девиатора напряжений; σ — среднее напряжение; e_{ij} — компоненты тензора скорости деформации; e'_{ij} — компоненты девиатора скорости деформации; $\sqrt{s_{kl}s_{kl}}$ — второй инвариант девиатора напряжений; $\sigma_s(\kappa)$ — переменный предел текучести, зависящий от параметра разупрочнения κ ; σ_0 — начальное значение предела текучести (до начала процесса разупрочнения); $F(\sqrt{s_{kl}s_{kl}}/\sigma_s(\kappa) - 1)$ — в общем случае нелинейная функция вязкости, $F \geq 0$, $F(0) = 0$, $\langle F \rangle = FH(F)$; $H(F)$ — функция Хэвисайда; $f(\kappa)$ — функция разупрочнения, $f(0) = 1$, $f'(\kappa) < 0$; τ — характерное время релаксации компонент девиатора напряжений на поверхность текучести; ρ — плотность среды; λ и μ — модули упругости Ламе. По повторяющимся индексам проводится суммирование. Чтобы избежать терминологического недоразумения, отметим, что хотя величина κ является одной из функций в системе уравнений (1), подлежащих определению, традиционно за ней сохраним достаточно распространённое название “параметр разупрочнения”.

С учётом выражения для девиатора e'_{ij} эволюционное уравнение для разупрочнения примет вид

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}}{\sigma_s(\kappa)} - 1 \right) \right\rangle.$$

Особый интерес представляют схемы расчёта части системы уравнений для девиаторов с нелинейным свободным членом и возможным малым параметром τ , а также уравнения для разупрочнения с аналогичными особенностями правой части. Что касается остальных уравнений системы (1) — линейных уравнений движения для компонент скорости и уравнения для среднего напряжения, то их численная аппроксимация по какой-либо явной схеме требуемого порядка аппроксимации не вызывает затруднений. Будем считать, что такая аппроксимация проведена, значения скоростей и среднего напряжения на верхнем временном слое определены с учётом необходимых по постановке начальных и граничных условий.

2. ПОСТРОЕНИЕ ЯВНО-НЕЯВНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ

Построим неявную аппроксимацию первого порядка уравнения для девиаторов тензора напряжений с нелинейным свободным членом из УВП системы с разупрочнением (1) и уравнения для разупрочнения путём аппроксимации правой части полулинейных уравнений на верхнем слое по времени:

$$\frac{s_{ij}^{n+1} - s_{ij}^n}{\Delta t} = 2\mu e'_{ij}{}^{n+1} - \frac{2\mu}{\tau} \frac{s_{ij}^{n+1}}{\sqrt{s_{kl}^{n+1}s_{kl}^{n+1}}} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{s_{kl}^{n+1}s_{kl}^{n+1}}}{\sigma_0 f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle, \quad \frac{\kappa^{n+1} - \kappa^n}{\Delta t} = \frac{1}{\tau} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{s_{kl}^{n+1}s_{kl}^{n+1}}}{\sigma_0 f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle.$$

Индексами n и $n+1$ отмечены значения искомых величин на верхнем и нижнем слоях разбиения по времени, Δt — шаг по времени. Эту нелинейную систему уравнений для s_{ij}^{n+1} и κ^{n+1} можно записать в виде

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} = \bar{s}_{ije}^{n+1} - \frac{1}{\delta_2} \frac{\bar{s}_{ij}^{n+1}}{\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1}\bar{s}_{kl}^{n+1}}} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1}\bar{s}_{kl}^{n+1}}}{f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle, \quad \kappa^{n+1} - \kappa^n = \frac{1}{\beta} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1}\bar{s}_{kl}^{n+1}}}{f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle.$$

Здесь введены безразмерные компоненты $\bar{s}_{ij}^{n+1} = s_{ij}^{n+1}/\sigma_0$, $\bar{s}_{ij}^n = s_{ij}^n/\sigma_0$, $\bar{s}_{ije}^{n+1} = s_{ije}^{n+1}/\sigma_0$, где $s_{ije}^{n+1} = s_{ij}^n + 2\mu e'_{ij}{}^{n+1}\Delta t$ — компоненты девиатора после упругого шага по времени, $\delta_2 = \tau\sigma_0/(2\Delta t\mu)$ — безразмерный (возможно, малый) параметр системы уравнений, $\beta = \tau/\Delta t$ — ещё один безразмерный (возможно, малый) параметр этой системы. В данном построении,

за исключением особо оговоренных случаев, мы не будем устанавливать ограничений на величины δ_2 и β .

Отметим, что с учётом проведённого ранее расчёта значений компонент скорости на верхнем временном слое компоненты “упругого” девиатора \bar{s}_{ije}^{n+1} также можно считать известными, как и значения \bar{s}_{ij}^n на n -м слое.

Нелинейную систему, из которой необходимо найти неизвестные компоненты девиатора напряжений \bar{s}_{ij}^{n+1} и параметра разупрочнения κ^{n+1} на верхнем слое, можно записать как

$$\begin{aligned} \bar{s}_{ij}^{n+1} \left(\delta_2 + \left\langle F \left(\frac{\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}}}{f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle \left(\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1} \right)^{-1/2} \right) &= \delta_2 \bar{s}_{ije}^{n+1}, \\ \beta \kappa^{n+1} - \left\langle F \left(\frac{\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}}}{f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle &= \beta \kappa^n. \end{aligned}$$

Свернём уравнение для девиаторов напряжений сначала с \bar{s}_{ij}^{n+1} , а затем с \bar{s}_{ije}^{n+1} . Введём обозначения

$$X = \sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}}, \quad Z = \sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kle}^{n+1}}, \quad \Sigma = \sqrt{\bar{s}_{kle}^{n+1} \bar{s}_{kle}^{n+1}}$$

и получим следующую алгебраическую систему для неизвестных X , Z и κ^{n+1} :

$$\begin{aligned} X^2 \left(\delta_2 + \frac{\langle F(X/f(\kappa^{n+1}) - 1) \rangle}{X} \right) &= \delta_2 Z^2, \quad Z^2 \left(\delta_2 + \frac{\langle F(X/f(\kappa^{n+1}) - 1) \rangle}{X} \right) = \delta_2 \Sigma^2, \\ \beta \kappa^{n+1} - \left\langle F \left(\frac{X}{f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle &= \beta \kappa^n. \end{aligned}$$

Исключив из неё Z , получим

$$\delta_2 X + \left\langle F \left(\frac{X}{f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle = \delta_2 \Sigma, \quad \beta \kappa^{n+1} - \left\langle F \left(\frac{X}{f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle = \beta \kappa^n. \quad (2)$$

С учётом того что $\langle F(X/f(\kappa^{n+1}) - 1) \rangle = \delta_2(\Sigma - X)$, итоговые выражения будут следующими:

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\bar{s}_{ije}^{n+1}}{\Sigma} X, \quad \kappa^{n+1} = \frac{1}{\beta} \delta_2 (\Sigma - X) + \kappa^n. \quad (3)$$

Отыскав инвариант X из системы (2), можно будет найти компоненты девиатора напряжений и параметра разупрочнения из системы (3).

3. СЛУЧАЙ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ ВЯЗКОСТИ И НЕЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ РАЗУПРОЧНЕНИЯ

Для того чтобы решить нелинейную алгебраическую систему (2) и получить явные выражения для неизвестных величин \bar{s}_{ij}^{n+1} и κ^{n+1} , необходимо конкретизировать функцию вязкости $F(x)$ и функцию разупрочнения $f(\kappa)$.

Для УВП среды при отсутствии разупрочнения аналитическое решение системы (2) можно получить в случае степенной функции вязкости $F(x) = x^q$, $q > 0$ [18]. Однако в системе с разупрочнением для получения аналитического решения примем более простую линейную зависимость $F(x) = x$. При этом не будем ограничивать диапазон значений безразмерных параметров $\beta \geq 0$, $\delta_2 \geq 0$.

Также ограничимся рассмотрением функции разупрочнения определённого вида

$$f(\kappa) = \frac{1}{1 + \alpha\kappa},$$

где величина параметра $\alpha \geq 0$ регулирует режим и скорость изменения предела текучести.

Предложение 1. Для выбранного вида функций $F(x) = x$ и $f(\kappa) = 1/(1 + \alpha\kappa)$ система уравнений (2) имеет аналитическое решение.

Доказательство. В выбранных обозначениях система (2) примет вид

$$\delta_2 X + \langle X(1 + \alpha\kappa^{n+1}) - 1 \rangle = \delta_2 \Sigma, \quad \beta\kappa^{n+1} - \langle X(1 + \alpha\kappa^{n+1}) - 1 \rangle = \beta\kappa^n. \quad (4)$$

В случае $X(1 + \alpha\kappa^{n+1}) < 1$ имеет место упругий режим деформирования и численное решение всей системы сводится к упругому шагу. Далее рассмотрим нетривиальный случай — УВП режим, когда $X(1 + \alpha\kappa^{n+1}) \geq 1$.

Сложение уравнений из системы (4) приводит к системе

$$X(1 + \alpha\kappa^{n+1}) = 1 + \delta_2(\Sigma - X), \quad \kappa^{n+1} = \frac{\delta_2}{\beta}(\Sigma - X) + \kappa^n. \quad (5)$$

Исключив из неё значение κ^{n+1} , получим уравнение для X :

$$X \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \delta_2 (\Sigma - X) + \alpha\kappa^n \right) = 1 + \delta_2 (\Sigma - X).$$

Для упрощения дальнейших выкладок введём величины $\zeta = \Sigma - X$ и $\gamma = \alpha/\beta$. Уравнение для ζ тогда запишем как

$$\gamma\delta_2\zeta^2 + (1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma))\zeta - (\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1) = 0.$$

Его точное решение, удовлетворяющее условию $\zeta > 0$, определяется по формуле

$$\zeta = \frac{1}{2\gamma\delta_2} \left[\sqrt{(1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma))^2 + 4\gamma\delta_2(\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1)} - (1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma)) \right],$$

следовательно,

$$X = \Sigma - \frac{1}{2\gamma\delta_2} \left[\sqrt{(1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma))^2 + 4\gamma\delta_2(\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1)} - (1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma)) \right].$$

Формулы для девиатора и параметра разупрочнения на верхнем слое по времени примут вид

$$\begin{aligned} \bar{s}_{ij}^{n+1} &= \frac{\bar{s}_{ije}^{n+1}}{\Sigma} \left(\Sigma - \frac{1}{2\gamma\delta_2} \sqrt{(1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma))^2 + 4\gamma\delta_2(\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1)} \right) - \\ &\quad - \frac{\bar{s}_{ije}^{n+1}}{\Sigma} \frac{1}{2\gamma\delta_2} (1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma)), \end{aligned}$$

$$\kappa^{n+1} = \kappa^n + \frac{1}{2\gamma\beta\delta_2} \left[\sqrt{(1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma))^2 + 4\gamma\delta_2(\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1)} - (1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma)) \right].$$

Утверждение доказано.

Формулы в доказательстве предложения 1 носят труднообозримый характер. Их можно упростить и сделать гораздо более наглядными, если предположить, что коэффициент

разупрочнения α мал, точнее, комбинированный параметр $\gamma \ll 1$. В этом случае выражение для ζ будет иметь вид

$$\zeta = \frac{1}{2\gamma\delta_2} (1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma)) \left(\sqrt{1 + 4\gamma\delta_2 \frac{\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1}{(1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma))^2} - 1} \right).$$

При малых значениях γ получим

$$\zeta \approx \frac{\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1}{1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma)}.$$

Формулы для инварианта, девиаторов и параметра разупрочнения на верхнем слое примут компактный вид

$$\begin{aligned} X &\approx \Sigma - \frac{\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1}{1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma)}, \\ \bar{s}_{ij}^{n+1} &\approx \frac{\bar{s}_{ije}^{n+1}}{\Sigma} \left(\Sigma - \frac{\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1}{1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma)} \right), \\ \kappa^{n+1} &\approx \frac{\delta_2}{\beta} \frac{\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1}{1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma)} + \kappa^n = \frac{\sigma_0}{2\mu} \frac{\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1}{1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma)} + \kappa^n. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь было учтено, что $\delta_2/\beta = \sigma_0/(2\mu)$.

Предложение 2. *Формулы (6) могут быть использованы для описания динамического поведения среды и при отсутствии вязкости.*

Доказательство. Предельный переход $\delta_2 \rightarrow 0$, соответствующий модели упругопластической среды, приводит к выражениям

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} \approx \frac{\bar{s}_{ije}^{n+1}}{\Sigma(1 + \alpha\kappa^n)}, \quad \kappa^{n+1} \approx \frac{\sigma_0}{2\mu} \frac{\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1}{1 + \alpha\kappa^n} + \kappa^n.$$

Утверждение доказано.

Осталось проверить условие реализации УВП режима $X(1 + \alpha\kappa^{n+1}) \geq 1$. Из уравнения (5) имеем

$$X(1 + \alpha\kappa^{n+1}) = 1 + \delta_2(\Sigma - X) \geq 1$$

или

$$\Sigma - X \approx \frac{\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1}{1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma)} \geq 0.$$

Отсюда получаем условие $\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1 \geq 0$.

4. СХЕМА РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ ЗАДАЧИ

В выбранных обозначениях уравнения теории линейной изотропной упругости в отсутствии внешних сил имеют вид

$$\mathbf{u}_t + A_{x_1}(\rho, \lambda, \mu)\mathbf{u}_{x_1} + A_{x_2}(\rho, \lambda, \mu)\mathbf{u}_{x_2} + A_{x_3}(\rho, \lambda, \mu)\mathbf{u}_{x_3} = \mathbf{0}.$$

Здесь вектор \mathbf{u} содержит три компоненты скорости смещения и шесть независимых компонент тензора напряжений, а λ , μ и ρ определяются свойствами описываемой среды. Исполь-

зубый в работе метод основан на последовательном решении одномерных систем уравнений [23]

$$\mathbf{u}_t + A_{x_i} \mathbf{u}_{x_i} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Заметим, что матрица A_{x_i} является гиперболической, т.е. может быть диагонализирована преобразованием

$$\Lambda_{x_i} = T_{x_i} A_{x_i} T_{x_i}^{-1},$$

где матрицы T_{x_i} и $T_{x_i}^{-1}$ вычисляются аналитически, как и диагональная матрица Λ_{x_i} , состоящая из собственных значений матрицы A_{x_i} . Далее будем опускать нижний индекс у матриц, чтобы упростить вид итоговых формул.

Замена $\boldsymbol{\theta} = T\mathbf{u}$ приводит к системе независимых одномерных линейных уравнений переноса

$$\boldsymbol{\theta}_t + \Lambda \boldsymbol{\theta}_{x_i} = \mathbf{0}.$$

Для каждой компоненты вектора $\boldsymbol{\theta}$ справедливы соотношения

$$\theta_j(t + \Delta t, x_i, x_k, x_l) = \theta_j(t, x_i - \lambda_j \Delta t, x_k, x_l).$$

Значение правой части данного выражения аппроксимируется значением полинома третьей степени $P_3(x_i - \lambda_j \Delta t)$, построенного на фиксированном наборе пространственных узлов $(x_{m-2}, x_{m-1}, x_m, x_{m+1})$. Здесь нижний индекс m означает номер узла в равномерной пространственной сетке вдоль координаты x_i с шагом h .

Итоговое выражение для компоненты вектора $\boldsymbol{\theta}$ на следующем временном слое $n+1$ в m -м узле имеет вид

$$\theta_m^{n+1} = \theta_m^n - \frac{\sigma}{2}(\theta_{m+1}^n - \theta_{m-1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(\theta_{m-1}^n - 2\theta_m^n + \theta_{m+1}^n) + \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)}{6}(\theta_{m-2}^n - 3\theta_{m-1}^n + 3\theta_m^n - \theta_{m+1}^n),$$

где $\sigma = \lambda_j \Delta t / h$ — число Куранта. Вычисление новых значений вектора \mathbf{u} проводится путём обратного преобразования $\mathbf{u}^{n+1} = T^{-1} \boldsymbol{\theta}^{n+1}$. Шаг по времени данного алгоритма: $\sigma < 1$.

5. ПРИМЕРЫ РАСЧЁТОВ

Был проведён расчёт процесса нагружения изотропной упруговязкопластической среды с разупрочнением. Рассматривался параллелепипед размера $50 \times 50 \times 10\,000$ м³. Он покрывался кубической расчётной сеткой с шагом 5 м. Задавались следующие значения параметров рассматриваемой среды: скорость продольных волн $C_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} = 4500$ м/с, скорость поперечных волн $C_s = \sqrt{\mu/\rho} = 2250$ м/с, плотность $\rho = 2500$ кг/м³, $\sigma_0 = 112\,500$ Па. Условие устойчивости выполнялось при $\Delta t = 1$ мс. На всех границах расчётной области, кроме нижней, ставилось условие нулевых пространственных производных.

На первом этапе была решена задача о мгновенном приложении к нижней части области равномерно по всей поверхности постоянного внешнего давления в 337 500 Па. Аналитическим решением данной задачи для упругой среды является распространение продольной упругой волны со скоростью C_p , для упругопластической среды без упрочнения — продольной волны со скоростью C_p и пластической волны со скоростью $C_f = \sqrt{(\lambda + 2\mu/3)/\rho} \approx 3674$ м/с. При этом наличие вязкости в такой среде должно приводить к размыванию фронта пластической волны. На рис. 1 представлены результаты численных решений, полученные по разработанной расчётной схеме для случаев с разупрочнением и без него. Было задано значение $\delta_2 = 1/2$. Анализ полученных результатов подтверждает корректное воспроизведение

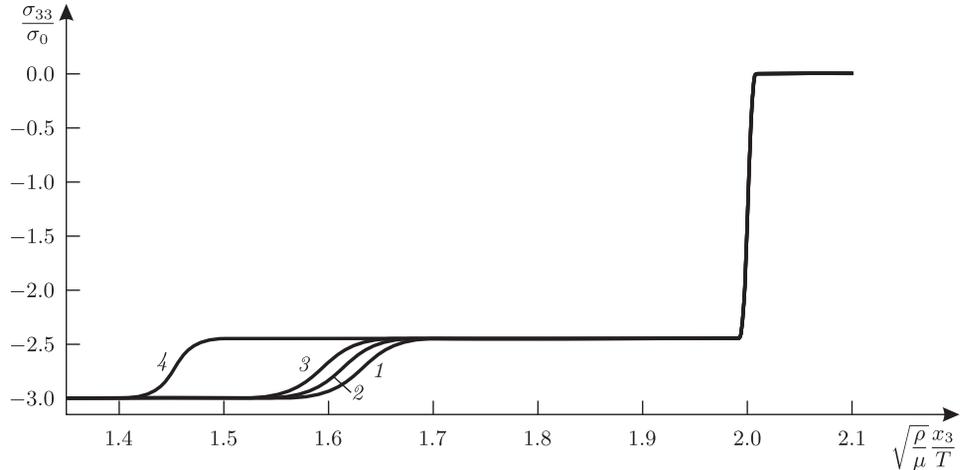


Рис. 1. Пространственные распределения вертикальной компоненты тензора напряжений σ_{33} при нормальном нагружении в момент времени $T_s = 2$ с: 1 — $\alpha = 0$; 2 — $\alpha = 1 \cdot 10^4$; 3 — $\alpha = 2 \cdot 10^4$; 4 — $\alpha = 8 \cdot 10^4$.

пластической волны и волны упругого предвестника, при этом учёт эффекта разупрочнения приводит к изменению скорости распространения пластической волны.

На втором этапе была решена задача о смешанной нормальной σ_n и тангенциальной σ_τ нагрузках. Скорость поперечных волн составляла $C_s = 2598$ м/с, остальные параметры расчёта оставались неизменными. Задавались значения $\sigma_n = 246\,603$ Па, $\sigma_\tau = 71\,594$ Па. На рис. 2 представлены численные решения, полученные при различных значениях параметра α .

На третьем этапе была решена задача о нагружении неоднородного полупространства нормальной нагрузкой. Рассматривалась трёхмерная область размера $2000 \times 50 \times 1700$ м³, покрытая равномерной расчётной сеткой с шагом 5 м. В центральной подобласти $x \in [600, 1400]$ м, $z \in [600, 1100]$ м для всех y было задано прямоугольное включение с параметрами $C_p = 300$ м/с, $C_s = 150$ м/с, $\rho = 1000$ кг/м³, в остальной области $C_p = 4800$ м/с, $C_s = 2400$ м/с, $\rho = 3125$ кг/м³. К граничной плоскости $z = 0$ прикладывалась нормальная нагрузка 250 000 Па. Таким образом, решение задачи не зависит от координаты y . Были вычислены поля напряжений через

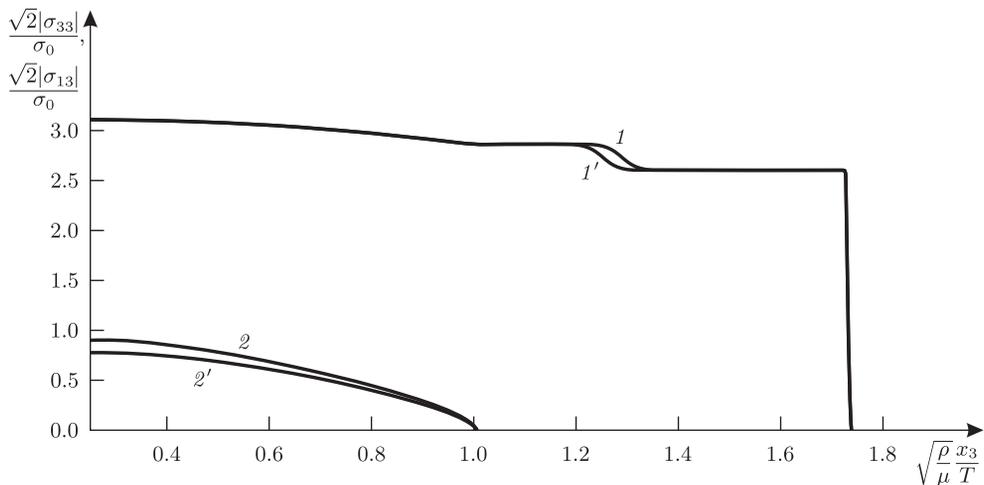


Рис. 2. Пространственные распределения компонент тензора напряжений σ_{33} (1, 1') и σ_{13} (2, 2') при смешанном нагружении в момент времени $T_s = 2$ с: 1, 2 — $\alpha = 0$; 1', 2' — $\alpha = 2 \cdot 10^4$.

$T_s = 0.9$ с от начала приложения нагрузки. Шаг по времени $\Delta t = 1$ мс. Рассматривались две постановки задачи: без разупрочнения и с разупрочнением с коэффициентом $\alpha = 10^4$. Следующие параметры постоянны во всей области и совпадают с предыдущими численными расчётами: $\sigma_0 = 112\,500$ Па, $\tau = 112.5$. На рис. 3 представлены пространственные распределе-

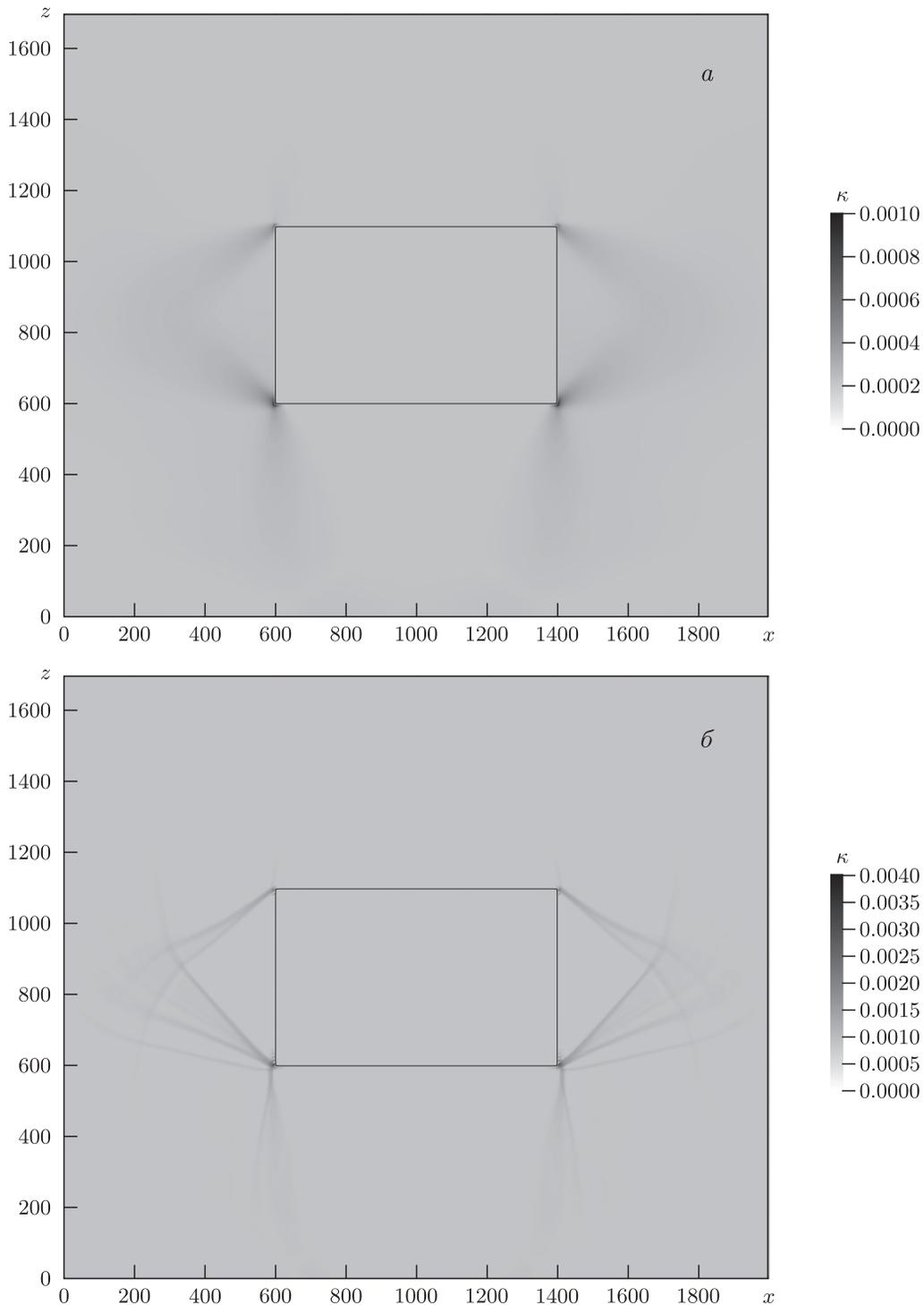


Рис. 3. Пространственное распределение параметра разупрочнения κ на момент окончания расчёта: *a* — $\alpha = 0$; *б* — $\alpha = 10^4$.

ния параметра разупрочнения κ на момент окончания расчёта. Отметим, что измельчение расчётной сетки не приводит к изменению установившейся картины разупрочнения в среде (рис. 4), но делает возникающие линии скольжения (локализации деформации) более чёткими и ярко выраженными.

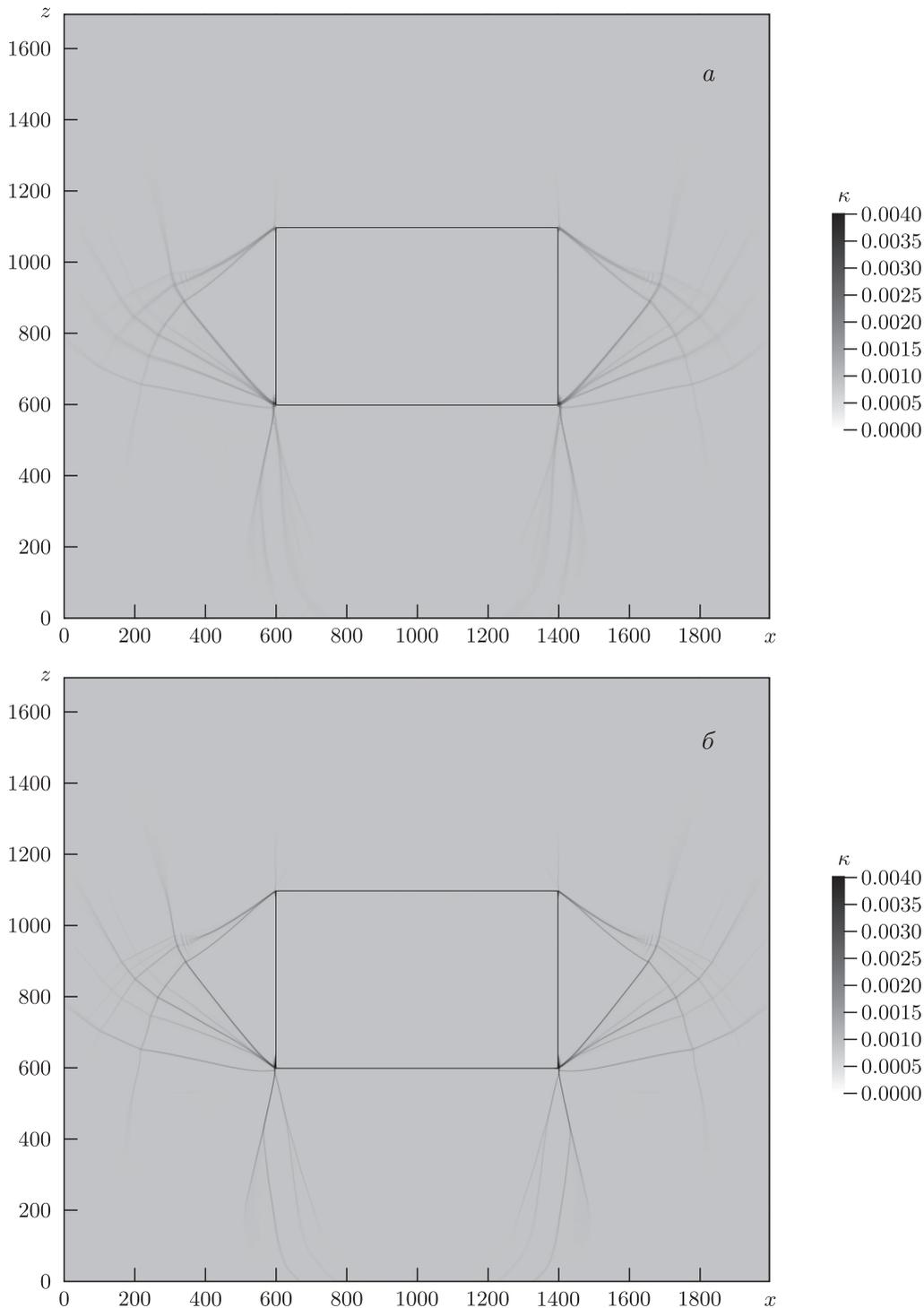


Рис. 4. Пространственное распределение параметра разупрочнения κ на момент окончания расчёта: *a* — сетка измельчена в 2 раза; *b* — в 4 раза. $\alpha = 10^4$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для устойчивого численного решения определяющей системы уравнений упруговязко-пластической модели сплошной среды с разупрочнением предложена явно- неявная схема с явной аппроксимацией уравнений движения и неявной аппроксимацией определяющих соотношений, содержащих малый параметр в знаменателе нелинейных свободных членов. Для общего случая нелинейных функций вязкости и разупрочнения получена нелинейная алгебраическая система уравнений на значения девиатора и параметра разупрочнения. В общем случае найти её аналитическое решение не представляется возможным. Однако для частного случая линейной функции вязкости и нелинейной функции разупрочнения было найдено аналитическое решение, что позволило предложить полностью явный алгоритм решения задачи нагружения упруговязкопластической среды с разупрочнением.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института автоматизации проектирования РАН (№ 124022400174-3).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фрейденталь, А. Математические теории неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер ; пер. с англ. А.И. Смирнова ; под ред. Э.И. Григолока. — М. : Физматгиз, 1962. — 431 с.
2. Perzyna, P. Fundamental problems in viscoplasticity / P. Perzyna // *Adv. Appl. Mech.* — 1966. — V. 9. — P. 243–377.
3. Коларов, Д. Механика пластических сред / Д. Коларов, А. Балтов, Н. Бончева. — М. : Наука, 1979. — 302 с.
4. Новацкий, В.К. Волновые задачи теории пластичности / В.К. Новацкий. — М. : Наука, 1978. — 310 с.
5. Дюво, Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс ; пер. с фр. С.Ю. Прищепионка, Т.Н. Рожковской ; под ред. С.К. Годунова. — М. : Наука, 1980. — 384 с.
6. Садовский, В.М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред / В.М. Садовский. — М. : Наука, 1997. — 208 с.
7. Ortiz, M. An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations / M. Ortiz, J.C. Simo // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* — 1986. — V. 23, № 3. — P. 353–366.
8. Simo, J.C. Elastoplasticity and Viscoplasticity-Computational Aspects / J.C. Simo, T.J. Hughes. — New-York : Springer, 1988.
9. Кукуджанов, В.Н. Вычислительная механика сплошных сред / В.Н. Кукуджанов. — М. : Наука, 2008. — 320 с.
10. Уилкинс, М.Л. Расчет упругопластических течений / М.Л. Уилкинс // *Вычислительные методы в гидродинамике* / Ред. Б. Олдер, С. Фернбах и М. Ротенберг ; пер. с англ. В.П. Коробейникова и П.И. Чушкина ; под ред. С.С. Григоряна и Ю.Д. Шмыглевского. — М. : Мир, 1967. — С. 212–263.
11. Wilkins, M.L. *Computer Simulation of Dynamic Phenomena* / M.L. Wilkins. — Berlin; Heidelberg; New York : Springer, 1999. — 264 p.
12. Кукуджанов, В.Н. Метод расщепления упругопластических уравнений / В.Н. Кукуджанов // *Механика твёрдого тела.* — 2004. — № 1. — С. 98–108.

13. Failure mechanism, existing constitutive models and numerical modeling of landslides in sensitive clay: a review / Z.A. Urmi, A. Saeidi, R. Chavali, A. Yerro // *Geoenvironmental Disasters*. — 2023. — V. 10. — Art. 14
14. Lagrangian modelling of large deformation induced by progressive failure of sensitive clays with elastoviscoplasticity / X. Zhang, D. Sheng, S.W. Sloan, J. Bleyer // *Int. J. Numer. Methods Eng.* — 2017. — V. 112. — P. 963–989.
15. Hinchberger, S.D. Viscoplastic constitutive approach for rate-sensitive structured clays / S.D. Hinchberger, G. Qu // *Canad. Geotech. J.* — 2009. — V. 46, № 6. — P. 609–626.
16. Кукуджанов, В.Н. Распространение волн в упруговязкопластических материалах с диаграммой общего вида / В.Н. Кукуджанов // *Механика твердого тела*. — 2001. — № 5. — С. 96–111.
17. Кукуджанов, В.Н. Микромеханическая модель разрушения неупругого материала и ее применение к исследованию локализации деформаций / В.Н. Кукуджанов // *Механика твердого тела*. — 1999. — № 5. — С. 72–87.
18. Явно-неявные схемы расчёта динамики упруговязкопластических сред с малым временем релаксации / В.И. Голубев, И.С. Никитин, Н.Г. Бурого, Ю.А. Голубева // *Дифференц. уравнения*. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 803–813.
19. Голубев, В.И. Уточненные схемы расчета динамики упруговязкопластических сред / В.И. Голубев, И.С. Никитин // *Журн. вычислит. математики и мат. физики*. — 2023. — Т. 63, № 10. — С. 1674–1686.
20. Golubev, V.I. Numerical schemes of higher approximation orders for dynamic problems of elastoviscoplastic media / V.I. Golubev, I.S. Nikitin, X. Mi // *Журн. Сиб. федерал. ун-та. Математика и физика*. — 2024. — Т. 17, № 1. — С. 8–17.
21. Бурого, Н.Г. Моделирование разрушения упругопластических тел / Н.Г. Бурого // *Вычислит. механика сплошных сред*. — 2008. — Т. 1, № 4. — С. 5–20.
22. Бурого, Н.Г. Алгоритмы сквозного счета для процессов разрушения / Н.Г. Бурого, И.С. Никитин // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2018. — Т. 10, № 5. — С. 645–666.
23. Голубев, В.И. Повышение порядка точности сеточно-характеристического метода для задач двумерной линейной упругости с помощью схем операторного расщепления / В.И. Голубев, А.В. Шевченко, И.Б. Петров // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2022. — Т. 14, № 4. — С. 899–910.

EXPLICIT-IMPLICIT SCHEMES FOR CALCULATING DYNAMICS OF ELASTOVISCOPLASTIC MEDIA WITH SOFTENING

V. I. Golubev¹, I. S. Nikitin², A. V. Shevchenko³, I. B. Petrov⁴

^{1,3,4}*Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia*

^{1,2,3}*Institute of Computer Aided Design of the RAS, Moscow, Russia*

e-mail: ¹golubev.vi@mipt.ru, ²i_nikitin@list.ru, ³alexshevchenko@phystech.edu, ⁴petrov@mipt.ru

The paper examines the dynamic behavior of elastoviscoplastic media under the action of an external load. For the case of a linear viscosity function and a nonlinear softening function, an explicit-implicit calculation scheme has been constructed that makes it possible to obtain a numerical solution to the original semilinear hyperbolic problem. This approach does not involve the use of the method of splitting into physical processes. Despite this, an explicit computational algorithm was obtained that can be effectively implemented on modern computing systems.

Keywords: mathematical modeling, elastoviscoplastic media, semilinear hyperbolic system, explicit-implicit scheme.

FUNDING

This work was carried out within the state assignment at the Institute of Computer Aided Design of the Russian Academy of Sciences (state registration no. 124022400174-3).

REFERENCES

1. Freudenthal, A. and Geiringer, H., The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum, in *Encyclopedia of Physics*, S. Flugge, ed., Vol. VI. *Elasticity and Plasticity*, Springer-Verlag, 1958, pp. 229–433.
2. Perzyna, P., Fundamental problems in viscoplasticity, *Adv. Appl. Mech.*, 1966, vol. 9, pp. 243–377.
3. Kolarov, D., Baltov, A., and Boncheva, N., *Mehanika plasticheskikh sred* (Mechanics of Plastic Media), Moscow: Nauka, 1979.
4. Novatskii, V.K., *Volnovie zadachi teorii plastichnosti* (Wave Problems of Plasticity Theory), Moscow: Nauka, 1978.
5. Duvaut, G. and Lions, J.-L., *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Paris: Dunod, 1972.
6. Sadovskii, V.M. *Razrivnie resheniya v zadachah dinamiki uprugoplasticheskikh sred* (Discontinuous Solutions in Problems of Dynamics of Elastoplastic Media), Moscow: Nauka, 1997.
7. Ortiz, M. and Simo, J.C., An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1986, vol. 23, no. 3, pp. 353–366.
8. Simo, J.C. and Hughes, T.J., *Elastoplasticity and Viscoplasticity-Computational Aspects*, New-York: Springer, 1988.
9. Kukudzhinov, V.N., *Vichislitel'naya mehanika sploshnih sred* (Numerical Mechanics of Continuum Media), Moscow: Nauka, 2008.
10. Wilkins, M.L., Calculation of elastic-plastic flow, in *Methods in Computational Physics. Advances in Research and Applications. Vol. 3. Fundamental Methods in Hydrodynamics*, B. Alder, S. Fernbach, M. Rotenberg, eds., New York; London: Academic Press, 1967, pp. 211–264.
11. Wilkins, M.L., *Computer Simulation of Dynamic Phenomena*, Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1999.
12. Kukudzhinov, V.N., Metod raschepleniya uprugoplasticheskikh uravnenij (Method for splitting elastoplastic equations), *Mehanika Tverdogo Tela* (Mechanics of Solid Body), 2004, no. 1, pp. 98–108.
13. Urmi, Z.A., Saeidi, A., Chavali, R., and Yerro, A., Failure mechanism, existing constitutive models and numerical modeling of landslides in sensitive clay: a review, *Geoenvironmental Disasters*, 2023, vol. 10, art. 14.
14. Zhang, X., Sheng, D., Sloan, S.W., and Bleyer, J., Lagrangian modelling of large deformation induced by progressive failure of sensitive clays with elastoviscoplasticity, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2017, vol. 112, pp. 963–989.
15. Hinchberger, S.D. and Qu, G., Viscoplastic constitutive approach for rate-sensitive structured clays, *Canad. Geotech. J.*, 2009, vol. 46, no. 6, pp. 609–626.
16. Kukudzhinov, V.N., Rasprostranenie voln v uprugoplasticheskikh materialah s diagrammoj obchego vida (Wave propagation in elastoviscoplastic materials with a general diagram), *Mehanika Tverdogo Tela* (Mechanics of Solid Body), 2001, no. 5, pp. 96–111.
17. Kukudzhinov, V.N., Mikromekhanicheskaya model razrusheniya neuprugogo materiala i ee promeniye k issledovaniyu lokalizatsii deformatsii (Micromechanical model of fracture of an inelastic material and its application to the study of strain localization), *Mehanika Tverdogo Tela* (Mechanics of Solid Body), 1999, no. 5, pp. 72–87.
18. Golubev, V.I., Nikitin, I.S., Burago, N.G., and Golubeva, Yu.A., Explicit–implicit schemes for calculating the dynamics of elastoviscoplastic media with a short relaxation time, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 6, pp. 822–832.
19. Golubev, V.I. and Nikitin, I.S., Refined schemes for computing the dynamics of elastoviscoplastic media, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2023, vol. 63, no. 10, pp. 1874–1885.
20. Golubev, V.I., Nikitin, I.S., Mi, X., Numerical schemes of higher approximation orders for dynamic problems of elastoviscoplastic media, *J. Sib. Fed. Univ. Math. & Phys.*, 2024, vol. 17, no. 1, pp. 8–17.
21. Burago, N.G., Modelirovanie razrusheniya uprugoplasticheskikh tel (Simulation of destruction of elastoplastic bodies), *Vichislitel'naya Mehanika Sploshnih Sred* (Numerical Mechanics of Continuum Media), 2008, vol. 1, no. 4, pp. 5–20.
22. Burago, N.G. and Nikitin, I.S., Algorithms of through calculation for damage processes, *Computer Research and Modeling*, 2018, vol. 10, no. 5, pp. 645–666.
23. Golubev, V.I., Shevchenko, A.V., and Petrov, I.B., Raising convergence order of grid-characteristic schemes for 2D linear elasticity problems using operator splitting, *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, no. 4, pp. e899–e910.