

УДК 517.977.1

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ СПЕКТРА  
ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ,  
ЗАМКНУТОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ© С. П. Зубова<sup>1</sup>, Е. В. Раецкая<sup>2</sup><sup>1</sup>Воронежский государственный университет<sup>2</sup>Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозоваe-mail: <sup>1</sup>spzubova@mail.ru, <sup>2</sup>raetskaya@inbox.ru

Поступила в редакцию 10.01.2024 г., после доработки 18.04.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Для линейной динамической системы приведён метод каскадной декомпозиции построения матрицы обратной связи для решения задачи размещения спектра (управления спектром, назначения полюсов), в процессе реализации которого сформировано новое доказательство известной теоремы о связи полной управляемости динамической системы с существованием матрицы обратной связи. Выявлена вся совокупность произвольных элементов, влияющих на неединственность матрицы. Приведены примеры построения матрицы обратной связи в случаях действительного спектра и при наличии комплексно-сопряжённых собственных чисел, а также в случае кратных собственных значений. Исследована устойчивость заданного спектра при малых возмущениях параметров системы с фиксированной матрицей обратной связи.

**Ключевые слова:** динамическая система управления, размещение спектра, метод каскадной декомпозиции, матрица обратной связи, устойчивость спектра.

DOI: 10.31857/S0374064124060065, EDN: KWCWHQ

## 1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

где  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $B: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  — вектор входа (управление);  $t \in [t_0, t_k]$ .

Задача размещения собственных значений состоит в следующем. На комплексной плоскости задаются произвольно числа  $\mu_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , замкнутые относительно операции сопряжения. Требуется замкнуть систему (1) обратной связью

$$u(t) = Kx(t) \quad (2)$$

такой, чтобы спектр  $\{\lambda_j\}$  матрицы  $A + BK$ , т.е.  $\sigma(A + BK)$ , совпадал с набором  $\{\mu_j\}$ :

$$\sigma(A + BK) = \{\mu_j\}_{j=1}^n. \quad (3)$$

Эту задачу называют также задачей размещения полюсов, задачей управления спектром [1].

Частным случаем задачи размещения спектра является задача стабилизации программного движения, что особенно актуально при решении практических задач. Задача стабилизации программного движения возникает, например, если для динамической системы рассчитано

программное управление  $u_{np}(t)$ , под воздействием которого программное состояние  $x_{np}(t)$  будет обладать определёнными свойствами  $\mathfrak{M}$ : двухточечными ( $x(t_0) = x_0$ ,  $x(t_k) = x_k$ ), или многоточечными ( $x(t_i) = x_i$ ), или какими-либо другими свойствами. Однако реальная динамическая система в силу каких-либо обстоятельств не может иметь в момент времени  $t_0$  состояние  $x_0$ . Тогда начальное состояние — это  $x^*$ . В таком случае бывает выгоднее рассчитывать не новое управление, а стабилизированное управление  $u_{cm}(t)$  для получения стабилизированного состояния  $x_{cm}(t)$ , удовлетворяющего условию  $x_{cm}(t_0) = x^*$  и обладающего свойством

$$\|x_{np}(t) - x_{cm}(t)\| \rightarrow 0 \quad (4)$$

с ростом  $t$ . Для системы (1), (2) задача стабилизации состоит в построении управления  $v(t) = u_{np}(t) - u_{cm}(t)$ , при наличии которого в системе

$$\dot{y} = Ay(t) + Bv(t), \quad (5)$$

$$v(t) = Ky(t) \quad (6)$$

вектор-функция  $y(t) = x_{np}(t) - x_{cm}(t)$  с условием

$$y(0) = x_0 - x^* \quad (7)$$

стремится к нулю с ростом  $t$ .

Задача (5)–(7) имеет решение  $y(t) = e^{t(A+BK)}(x_0 - x^*)$ , и если спектр матрицы  $A+BK$ :  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  лежит в открытой левой полуплоскости комплексной плоскости, то

$$\|y(t)\| = \|x_{np}(t) - x_{cm}(t)\| \leq ce^{-\omega t}, \quad \omega > 0.$$

Скорость сходимости в (4) зависит от назначения  $\mu_j = \lambda_j$  в (3).

Задачам назначения спектра и задачам стабилизации движения посвящено большое количество работ как отечественных, так и зарубежных авторов (см. обзор в [1]).

Приведём следующий результат.

**Теорема 1** [2, 3]. *Для разрешимости задачи (1)–(3) необходимо и достаточно, чтобы пара  $(A, B)$  была управляемой.*

А именно, чтобы выполнялось условие

$$\text{rank} \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n.$$

В статье [1] изложена история доказательств этой теоремы некоторыми авторами.

Практически матрица обратной связи в случае  $m=1$  построена с применением формул Басса–Гура и Акерманна и с решением уравнения

$$\det(A+BK-\lambda I) = p_n(\lambda),$$

где  $p_n(\lambda)$  — заданный многочлен  $n$ -й степени (см., например, [4]).

Численная реализация задачи (1)–(3) в компьютерной среде MATLAB, основанная на методе полного размещения полюсов [5], приведена в [6].

В работе [7] описан метод построения множества матриц обратной связи для заданных  $A$  и  $B$  в случае, когда  $\dim \text{Ker } B = \{0\}$  и пара  $(A, B)$  управляемая, для чего использовались жордановы наборы векторов матрицы  $(A - \lambda I \ B)$  для каждого  $\lambda_j = \mu_j$  и вводились параметризующие матрицы.

Цель настоящей работы — решить поставленную задачу методом каскадной декомпозиции, разработанным в [8–12] для решения широкого круга задач. Преимущество данного

метода состоит в том, что он даёт возможность детального исследования динамической системы, выявления компонент исходных данных, влияющих на свойства изучаемого объекта.

Метод каскадной декомпозиции не требует предварительного установления управляемости динамической системы — управляемость или неуправляемость устанавливаются в процессе декомпозиции. В связи с этим здесь не используется теорема 1, она доказывается в процессе исследования динамической системы при построении матрицы обратной связи.

В отличие от методов в указанных выше работах метод каскадной декомпозиции позволяет выявить *полный* набор свободных и не совсем свободных (удовлетворяющих некоторому условию) постоянных, от которых зависит вид матрицы обратной связи, без каких-либо условий на коэффициент  $B$ . Это приводит к построению *полного* множества матриц для конкретной задачи, что весьма важно для построения матрицы обратной связи, например, с меньшим количеством ненулевых компонент или меньшей по норме.

По сравнению с методом, предложенным в [7], решение поставленной задачи методом каскадной декомпозиции проводится с меньшим объёмом вычислительных действий.

В данной работе рассматриваются случаи простого спектра и кратного, действительно и при наличии комплексно-сопряжённых собственных значений. Выявляются условия, при выполнении которых вид матрицы  $K$  неединственный или единственный. Приводятся примеры построения  $K$  в названных случаях. Исследуется устойчивость назначенного спектра при малых возмущениях параметров динамической системы с фиксированной матрицей обратной связи.

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ. ЗАДАЧА НАЗНАЧЕНИЯ СПЕКТРА

Используется свойство нётеровости [13] отображения  $G: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^k$  (отображения и соответствующие им матрицы обозначаем одинаково):

$$\mathbb{R}^s = \text{Coim } G \dot{+} \text{Ker } G, \quad \mathbb{R}^k = \text{Im } G \dot{+} \text{Coker } G, \quad (8)$$

где  $\text{Ker } G$  — ядро (нуль-пространство)  $G$ ;  $\text{Coker } G$  — дефектное подпространство;  $\text{Coim } G$  — прямое дополнение к  $\text{Ker } G$  в  $\mathbb{R}^s$ ,  $\dot{+}$  — знак прямой суммы.

Сужение  $\tilde{G}$  оператора  $G$  на  $\text{Coim } G$  имеет обратный  $\tilde{G}^{-1}: \text{Im } G \rightarrow \text{Coim } G$ .

Вводятся проекторы  $P$  и  $Q$  на  $\text{Ker } G$  и  $\text{Coker } G$  соответственно.

Оператор  $\tilde{G}^{-1}(I - Q)$  называется *полуобратным* [14, с. 164] и обозначается  $G^-$ . Здесь и далее  $I$  — единичный оператор в соответствующем пространстве.

Далее применяется следующая

**Лемма 1** [10–12]. *Соотношение*

$$G\varphi = \psi, \quad \varphi \in \mathbb{R}^s, \quad \psi \in \mathbb{R}^k, \quad (9)$$

эквивалентно системе

$$Q\psi = 0, \quad (10)$$

$$\varphi = G^-\psi + z, \quad z \in \text{Ker } G. \quad (11)$$

При этом  $P\varphi = z$ . Условие  $Q\psi = 0$  — условие корректности равенства (9).

Заметим, что разложения (8), как и проекторы на подпространства и полуобратный оператор, могут быть записаны в различных формах, однако при этом выражения (10), (11) будут эквивалентными.

Далее исследуется уравнение

$$(A + BK)v = \lambda v \quad (12)$$

относительно вектора  $v = v(\lambda)$  и матрицы  $K = K(\lambda)$ .

Применение леммы 1 к уравнению (12), записанному в виде

$$BKv = (\lambda I - A)v, \quad (13)$$

приводит к эквивалентной системе

$$Q(\lambda I - A)v = 0, \quad (14)$$

$$Kv = B^-(\lambda I - A)v + z^0, \quad z^0 \in \text{Ker } B, \quad (15)$$

где  $Q$  — проектор на  $\text{Coker } B$ .

Преимущество системы (14), (15) по сравнению с уравнением (12) в том, что в (12) неизвестны  $K$  и  $v$ , в уравнении (14) неизвестен только  $v$ , а в (15) — только  $K$ , если  $v$  найдено из (14).

Задача назначения спектра формулируется так: с помощью уравнения (14) найти  $n$  линейно независимых векторов  $v_j = v(\lambda_j)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , отвечающих произвольно заданным значениям  $\lambda_j = \mu_j$ , и затем с помощью (15) построить матрицу обратной связи  $K$ .

### 3. ПОСТРОЕНИЕ ВЕКТОРА $v = v(\lambda)$ .

Обозначим  $n_0 = \dim \text{Coker } B$ .

Возможны три следующих случая.

**Случай 0.1.**  $n = n_0$ . Тогда  $Q = I$ ,  $B = (0)$ , значения  $\lambda$  в (13) не могут быть произвольно заданными при  $v \neq 0$ , задача назначения спектра не имеет решения. Одновременно и система (1), т.е.  $\dot{x} = Ax(t)$ , не является управляемой.

**Случай 0.2.**  $n > n_0 = 0$ , т.е.  $Q = (0)$ ,  $B$  — сюръекция. Условие (14) отсутствует, в качестве  $v_j$  можно взять  $n$  любых линейно независимых векторов и, подставив их в (15) с  $\lambda = \lambda_j = \mu_j$ , найти компоненты матрицы  $K$ , решив полученную систему.

Одновременно с этим система (1) с сюръективной матрицей  $B$  полностью управляемая, поскольку  $u(t)$  можно найти непосредственно из (1), подставив в неё произвольную вектор-функцию  $x(t)$ , непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую заданным условиям  $\mathfrak{M}$ . Заметим, что в этом случае

$$\text{rank}(B) = n.$$

**Случай 0.3.**  $n > n_0 > 0$ . Здесь исследуем уравнение (14) *методом каскадной декомпозиции*.

*1-й шаг декомпозиции.* Обозначим  $Q$  через  $Q_0$  и представим  $v$  в виде  $v = (I - Q_0)v + Q_0v$ , а  $Q_0A$  — в виде  $Q_0A = Q_0A(I - Q_0) + Q_0AQ_0$ . Введём обозначения

$$A_0 = A, \quad B_0 = B, \quad A_1 = Q_0A_0Q_0, \quad B_1 = Q_0A_0(I - Q_0), \quad v^1 = (I - Q_0)v, \quad w^1 = Q_0v.$$

Теперь уравнение (14) эквивалентно системе

$$v = v^1 + w^1, \quad (16)$$

$$B_1v^1 = (\lambda I - A_1)w^1, \quad (17)$$

где  $B_1: \text{Im } B_0 \rightarrow \text{Coker } B_0$ . Из (8) следует

$$\text{Im } B_0 = \text{Coim } B_1 \dot{+} \text{Ker } B_1, \quad \text{Coker } B_0 = \text{Im } B_1 \dot{+} \text{Coker } B_1. \quad (18)$$

Проекторы на  $\text{Ker } B_1$  и  $\text{Coker } B_1$ , отвечающие разложениям (18), обозначим как  $P_1$  и  $Q_1$  соответственно. Введём полуобратный оператор  $B_1^- = \tilde{B}_1^{-1}(I - Q_1)$  (здесь  $I$  — единичный оператор в  $\text{Coker } B_0$ , т.е.  $I = Q$ ).

В силу леммы 1 соотношение (17) эквивалентно системе

$$Q_1(\lambda I - A_1)w^1 = 0, \quad (19)$$

$$v^1 = B_1^-(\lambda I - A_1)w^1 + z^1, \quad z^1 \in \text{Ker } B_1. \quad (20)$$

Пусть  $n_1 = \dim \text{Coker } B_1$ . Возможны три следующих случая.

**Случай 1.1.**  $n > n_0 = n_1$ , т.е.  $Q_1 = I$ ,  $B_1 = (0)$ . Из (17) следует, что  $A_1 w^1 = \lambda w^1$ . Значения  $\lambda$  не могут быть равными произвольным значениям  $\mu_j$  при  $w^1 \neq 0$  и задача назначения спектра неразрешима.

Система (1) в этом случае не является полностью управляемой [9–11].

**Случай 1.2.**  $n > n_0 > n_1 = 0$ , т.е.  $Q_1 = (0)$ ,  $B_1$  — сюръекция. Условие (19) отсутствует, для построения вектора  $v$  можно взять произвольно  $w^1 = w^1(\lambda) \in \text{Coker } B_1$ ,  $z^1 = z^1(\lambda) \in \text{Ker } B_1$  и по формуле (20) определить  $v^1 = v^1(\lambda)$ , далее по формуле (16) найти  $v = v(\lambda)$ . Затем следует перейти к п. 4.

Заметим, что система (1) в случае сюръективности  $B_1$  является полностью управляемой, причём [10–12]

$$\text{rank} \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = n.$$

**Случай 1.3.**  $n > n_0 > n_1 \neq 0$ . Применяем метод каскадной декомпозиции далее.

*2-й шаг декомпозиции.* В равенстве (19) представим  $w^1$  в виде  $w^1 = (I - Q_1)w^1 + Q_1 w^1$ ,  $Q_1 A_1$  — в виде  $Q_1 A_1 = Q_1 A_1 (I - Q_1) + Q_1 A_1 Q_1$  и обозначим  $(I - Q_1)w^1 = v^2$ ,  $Q_1 w^1 = w^2$ ,  $Q_1 A_1 (I - Q_1) = B_2$ ,  $Q_1 A_1 Q_1 = A_2$ .

Тогда уравнение (14) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} v &= v^1 + w^1, \\ w^1 &= v^2 + w^2, \\ B_2 v^2 &= (\lambda I - A_2)w^2, \end{aligned}$$

где  $B_2: \text{Im } B_1 \rightarrow \text{Coker } B_1$ .

В дальнейших исследованиях используется свойство (8) отображения  $B_2$  (см. 1-й шаг декомпозиции).

*q-й шаг декомпозиции.* Введём операторы

$$B_i = Q_{i-1} A_{i-1} (I - Q_{i-1}), \quad A_i = Q_{i-1} A_{i-1} Q_{i-1}, \quad (21)$$

$P_{i-1}$  и  $Q_{i-1}$  — проекторы на  $\text{Ker } B_{i-1}$  и  $\text{Coker } B_{i-1}$  соответственно, отвечающие разложениям

$$\text{Im } B_{i-2} = \text{Coim } B_{i-1} \dot{+} \text{Ker } B_{i-1}, \quad \text{Coker } B_{i-2} = \text{Im } B_{i-1} \dot{+} \text{Coker } B_{i-1}, \quad (22)$$

и элементы  $v^i = (I - Q_{i-1})w^{i-1}$ ,  $w^i = Q_{i-1}w^{i-1}$ ,  $i = \overline{1, q}$ .

Пусть  $\dim \text{Coker } B_{i-1} = n_{i-1}$ ,  $n > n_0 > n_1 > \dots > n_{q-1} \neq 0$ . Равенство (14) эквивалентно системе

$$v = v^1 + w^1, \quad (23)$$

$$w^i = v^{i+1} + w^{i+1}, \quad (24)$$

$$v^{i+1} = B_{i+1}^-(\lambda I - A_{i+1})w^{i+1} + z^{i+1}, \quad z^{i+1} \in \text{Ker } B_{i+1}, \quad i = \overline{0, q-2}, \quad (25)$$

$$B_q v^q = (\lambda I - A_q)w^q. \quad (26)$$

Далее возможны лишь два следующих случая.

**Случай q.1.** Существует  $q \in \mathbb{N}$  такое, что  $n > n_0 > \dots > n_{q-1} = n_q > 0$ . Имеем  $B_q = (0)$ , равенство (26) невыполнимо при  $\lambda = \lambda_j$ , равным  $n$  произвольно заданным значениям  $\mu_j$ , если  $w^q \neq 9$ . Задача назначения спектра неразрешима. Система (1) при  $B_q = (0)$  не является полностью управляемой [10–12].

**Случай q.2.** Существует  $p \in \mathbb{N}$  такое, что  $n > n_0 > \dots > n_{p-1} > n_p = 0$ . Отображение  $B_p$  — сюръекция, и из (26) с  $q = p$  для любого  $w^p \in \text{Coker } B_{p-1}$  находится  $v^p$  с точностью до произвольного слагаемого  $z^p \in \text{Ker } B_p$  (формула (25) с  $i = p-1$ ). Далее по формуле (24) с  $i = p-1$  строится  $w^{p-1}$ . Затем по формуле (25) с  $i = p-2$  находится  $v^{p-1}$ . Формула (24) с  $i = p-2$  даёт  $w^{p-2}$  и так далее. Наконец, из (23) определяется вектор  $v = v(\lambda)$ , являющийся решением уравнения (14).

#### 4. ФОРМИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ ВЕКТОРОВ В СЛУЧАЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ $\{\mu_j\}_{j=1}^n$

Для решения уравнения (15) относительно неизвестных компонентов матрицы  $K$ , т.е. для построения матрицы обратной связи, достаточно иметь  $n$  линейно независимых векторов  $v_j = v(\lambda_j)$  с  $\lambda_j$ , равными произвольно заданным значениям  $\mu_j$ .

*Случай q.1.* Как показано в п. 3, вектор  $v(\lambda)$ , удовлетворяющий уравнению (12), имеет нулевую часть  $w^q(\lambda) \in \text{Coker } B_{q-1}$ , т.е.  $v(\lambda)$  принадлежит подпространству  $\mathbb{R}^n \setminus \text{Coker } B_{q-1}$ , при этом  $\dim(\mathbb{R}^n \setminus \text{Coker } B_{q-1}) = n - n_{q-1} < n$ , и в этом подпространстве может быть не более  $n - n_{q-1}$  линейно независимых векторов  $v(\lambda)$ .

*Случай q.2.* Существует  $p \in \mathbb{N}$  такое, что  $B_p$  — сюръекция.

Покажем, что для любого набора  $\{\mu_j\}_{j=1}^n$  существует вектор  $v(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющий уравнению (12), такой, что векторы  $v(\lambda_j)$  линейно независимы при  $\lambda_j = \mu_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Для упрощения рассмотрим случай  $p = 2$ . Тогда  $\mathbb{R}^n = \text{Im } B \dot{+} \text{Im } B_1 \dot{+} \text{Coker } B_1$ ,

$$v(\lambda) = v^1(\lambda) + w^1(\lambda) = v^1(\lambda) + v^2(\lambda) + w^2(\lambda),$$

где  $v^1(\lambda) \in \text{Im } B$ ,  $v^2(\lambda) \in \text{Im } B_1$ ,  $w^2(\lambda) \in \text{Coker } B_1$  и  $\dim \text{Im } B = n - n_0$ ,  $\dim \text{Im } B_1 = n_0 - n_1$ ,  $\dim \text{Coker } B_1 = n_1$ .

Рассмотрим равенство

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j v(\lambda_j) = 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}, \quad (27)$$

эквивалентное системе

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j v^1(\lambda_j) = 0, \quad (28)$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j v^2(\lambda_j) = 0, \quad (29)$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j w^2(\lambda_j) = 0. \quad (30)$$

Здесь  $w^2(\lambda_j)$  — произвольно выбираемые элементы. Покажем, как их можно выбрать, чтобы векторы  $v_j$  были линейно независимыми.

Равенство (28) преобразуем с помощью формулы (25) с  $i = 1$ :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j B_2^-(\lambda_j I - A_2) w^2(\lambda_j) + \sum_{j=1}^n \alpha_j z^2(\lambda_j) = 0, \quad z^2 \in \text{Ker } B_2,$$

откуда имеем

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j z^2(\lambda_j) = 0, \quad (31)$$

$$B_2^- \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j w^2(\lambda_j) - B_2^- A_2 \sum_{j=1}^n \alpha_j w^2(\lambda_j) = 0. \quad (32)$$

Второе слагаемое в (32) равно нулю в силу (30) и тогда

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j w^2(\lambda_j) = 0. \quad (33)$$

Запишем (29) в виде

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \left( B_1^-(\lambda_j I - A_1) w^2(\lambda_j) + z^1(\lambda_j) + B_1^-(\lambda_j I - A_1) (B_2^-(\lambda_j I - A_2) w^2(\lambda_j) + \tau^2(\lambda_j)) \right) = 0$$

с произвольными  $z^1(\lambda_j) \in \text{Ker } B_1$ ,  $\tau^2(\lambda_j) \in \text{Ker } B_2$ , откуда и из (30), (31), (33) получим

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j z^1(\lambda_j) = 0, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j \tau^2(\lambda_j) = 0, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j^2 w^2(\lambda_j) = 0.$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j^k w^2(\lambda_j) &= 0, \quad k = 0, 1, 2; \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j z^1(\lambda_j) = 0; \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j z^2(\lambda_j) &= 0, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j \tau^2(\lambda_j) = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь  $n$  скалярных равенств, поскольку вектор  $w^2(\lambda_j)$  имеет размерность  $n_1$ ,  $z^1(\lambda_j)$  — размерность  $n - 2n_0 + n_1$ ,  $z^2(\lambda_j)$  и  $\tau^2(\lambda_j)$  — размерность  $n_0 - 2n_1$ . Можно взять  $w^2(\lambda_j)$ ,  $z^1(\lambda_j)$ ,  $z^2(\lambda_j)$  и  $\tau^2(\lambda_j)$  такими, что определитель при  $\lambda_j$  в системе (34) будет определителем Вандермонда  $W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , например, компоненты названных векторов положить равными  $\lambda_j$  в соответствующих степенях. Тогда  $\alpha_j = 0$ ,  $j = \bar{1}, \bar{n}$ , и из (27) следует линейная независимость векторов  $v(\lambda_j)$ .

Аналогично получается линейная независимость  $v(\lambda_j)$  в случае  $p > 2$ , если  $v(\lambda)$  — решение уравнения (12),  $\lambda_j \in \mathbb{C}$  — произвольно заданные не кратные числа.

Таким образом, справедлива следующая

**Лемма 2.** Для произвольного набора простых чисел  $\{\mu_j\}_{j=1}^n$  существует  $n$  линейно независимых векторов  $v(\lambda_j)$ , удовлетворяющих уравнению (14) с  $\lambda_j = \mu_j$ , тогда и только тогда, когда существует число  $p \in \mathbb{N}$  такое, что  $B_p$  — сюръекция.

# 5. ФОРМИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ ВЕКТОРОВ В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ ЧИСЕЛ $\{\mu_j\}_{j=1}^n$

Пусть, например,  $\mu_1$  имеет кратность  $k$ , остальные числа  $\mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \dots, \mu_n$  простые. Вектор  $v = v(\lambda)$  формируется так, чтобы  $v(\lambda_j), j = 1, k+1, \dots, n$ , были линейно независимыми (как это описано в п. 4), а векторы  $\tilde{v}_j, j = 2, \overline{k}$ , находятся из уравнения

$$Q((\lambda_1 I - A)\tilde{v}_j + \tilde{v}_{j-1}) = 0, \quad j = \overline{2, k}. \quad (35)$$

Равенство (35) преобразуется с помощью формул (21) и замены  $(I - Q)\tilde{v}_j = \tilde{v}_j^1, Q\tilde{v}_j = \tilde{w}_j^1$  в систему

$$\tilde{v}_j = \tilde{v}_j^1 + \tilde{w}_j^1, \quad B_1 \tilde{v}_j^1 = (\lambda_1 I - A_1)\tilde{w}_j^1 + \tilde{w}_{j-1}^1,$$

откуда  $\tilde{v}_j^1 = B_1^-((\lambda_1 I - A_1)\tilde{w}_j^1 + \tilde{w}_{j-1}^1) + r_j^1, r_j^1 \in \text{Ker } B_1$ , и в силу леммы 1

$$Q_1((\lambda_1 I - A_1)\tilde{w}_j^1 + \tilde{w}_{j-1}^1) = 0.$$

Последнее равенство распадается на соотношения в подпространствах, как это описано в п. 3, и в результате каскадной декомпозиции соотношения (35) приходим к эквивалентной ему системе

$$\tilde{v}_j = \tilde{v}_j^1 + \tilde{w}_j^1, \quad (36)$$

$$\tilde{w}_j^i = \tilde{v}_j^{i+1} + \tilde{w}_j^{i+1}, \quad (37)$$

$$\tilde{v}_j^{i+1} = B_{i+1}^-((\lambda_1 I - A_{i+1})\tilde{w}_j^{i+1} + \tilde{w}_{j-1}^{i+1}) + r_j^{i+1}, \quad r_j^{i+1} \in \text{Ker } B_{i+1}, \quad i = \overline{0, q-2}, \quad (38)$$

$$B_q \tilde{v}_j^q = (\lambda_1 I - A_q)\tilde{w}_j^q + \tilde{w}_{j-1}^q. \quad (39)$$

*Случай q.1.* Из результатов п. 4 при  $B_q = (0)$  следует  $\tilde{w}_1^q = 0$ . Тогда из (39) с  $i = 2$  получаем  $\tilde{w}_2^q = 0$ , далее из (39) с  $i = 3$  имеем  $\tilde{w}_3^q = 0$  и т.д., т.е. в этом случае все векторы  $\tilde{v}_j, j = \overline{2, k}$ , и  $v(\lambda_j), j = 1, k+1, \dots, n$ , лежат в подпространстве  $\mathbb{R}^n \setminus \text{Coker } B_{q-1}$ , размерность которого меньше  $n$ , и не существует системы из  $n$  линейно независимых векторов  $v(\lambda)$ , удовлетворяющих соотношениям (35) и (14).

*Случай q.2.* По формулам (23)–(25) строятся векторы  $v(\lambda_1), v(\lambda_{k+1}), \dots, v(\lambda_n)$ , а по (36)–(38) — векторы  $\tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \dots, \tilde{v}_k$  в силу представления

$$\mathbb{R}^n = \text{Coim } B_1 \dot{+} \text{Ker } B_1 \dot{+} \text{Coim } B_2 \dot{+} \text{Ker } B_2 \dot{+} \dots \dot{+} \text{Coim } B_p \dot{+} \text{Ker } B_p \dot{+} \text{Coker } B_{p-1}, \quad (40)$$

которое следует из (18) и (22).

Произвольные линейно независимые элементы  $w^p$  подпространства  $\text{Coker } B_{p-1}$  распределяются между векторами  $\tilde{v}_1 = v(\lambda_1), v(\lambda_{k+1}), \dots, v(\lambda_n)$  так, что хотя бы один элемент  $\tilde{w}_1^p$  участвует в формуле для построения  $\tilde{v}_1$ , и полагаем  $\tilde{w}_2^p = \tilde{w}_3^p = \dots = \tilde{w}_k^p = 0$ .

Линейно независимые элементы  $r_j^i, i = \overline{1, p}, j = \overline{2, k}$ , берём равными нулю, а линейно независимые элементы  $z^i$  для  $v(\lambda_{k+1}), \dots, v(\lambda_n)$  следует распределить так, чтобы каждый вектор  $v(\lambda_{k+1}), \dots, v(\lambda_n)$  содержал хотя бы один элемент из  $\text{Ker } B_i$  для некоторого  $i$ , или элемент  $w^p$  из  $\text{Coker } B_{p-1}$ . Соотношение

$$\alpha_1 v(\lambda_1) + \sum_{j=2}^k \alpha_j \tilde{v}_j + \sum_{j=k+1}^n \alpha_j v(\lambda_j) = 0, \quad (41)$$

где  $\alpha_1, \alpha_j$  — векторные неопределённые коэффициенты, рассматривается в подпространствах разложения (40).

В подпространстве  $\text{Coker } B_{p-1}$  — это линейная комбинация линейно независимых векторов  $w^p$ , поэтому соответствующие коэффициенты при них равны нулю. В (41) остаются векторы  $\tilde{v}_j$ ,  $j = \overline{2, k}$ , и те  $v(\lambda_j)$ , в которых элемент из  $\text{Coker } B_{p-1}$  нулевой.

В подпространствах  $\text{Ker } B_i$   $i = \overline{1, p}$ , все векторы взяты линейно независимыми, следовательно, соответствующие компоненты векторов  $\alpha_j$  равны нулю.

В  $\text{Coim } B_p$  в левой части соотношения (41) стоят лишь элементы  $\tilde{v}_2^p = B_p^- w_1^p$  с неопределёнными коэффициентами, которые равны нулю в силу линейной независимости элементов, входящих в  $w_1^p$ .

В  $\text{Coim } B_{p-1}$  в левой части соотношения (41) лишь линейная комбинация линейно независимых векторов  $\tilde{v}_3^{p-1} = B_{p-1}^- B_p^- w_1^p$  и т.д.

В  $\text{Coim } B_{p-k+2}$  лишь линейная комбинация элементов  $\tilde{v}_k^{p-k+2} = B_{p-k+2}^- B_{p-k+3}^- \dots B_p^- w_1^p$ , следовательно, все  $\alpha_j = 0$ ,  $j = \overline{1, n}$ , и построенная система векторов является линейно независимой.

На основании результатов пп. 3–5 справедлива

**Лемма 3.** Для произвольного набора чисел  $\{\mu_j\}_{j=1}^n$  существует  $n$  линейно независимых векторов  $v(\lambda)$ , удовлетворяющих уравнению (12) с  $\lambda = \mu_j$  в случае простых чисел  $\mu_j$  или уравнениям  $Q(\lambda_s \tilde{v}_j + \tilde{v}_{j-1} - A \tilde{v}_j) = 0$ ,  $j = \overline{s+1, s+r}$ , если  $\lambda_s = \mu_s$  с кратностью  $r$ , в том и только в том случае, когда существует число  $p \in \mathbb{N}$  такое, что  $B_p$  — сюръекция.

## 6. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

### 6.1. СЛУЧАЙ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ В НАБОРЕ $\{\mu_j\}_{j=1}^n$

Для построения матрицы  $K = (k_{ij}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  в уравнение (15) подставляются векторы  $v = v(\lambda_j)$  с  $\lambda_j = \mu_j$ , построенные в п. 4, и значения  $\lambda = \lambda_j = \mu_j$  для каждого  $j = \overline{1, n}$ . В полученной системе выделяются подсистемы для определения элементов каждой из строк матрицы  $K$ :

$$V k_i = F_i + r_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (42)$$

где

$$V = (v_{js}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$v_{js}$  — компоненты векторов  $v(\lambda_j) = (v_{j1}, v_{j2}, \dots, v_{jn})$ ;  $k_i = (k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{in})$ ,  $k_{is}$  — компоненты  $i$ -й строки матрицы  $K$ .

Обозначив

$$B^-(\lambda_j I - A)v(\lambda_j) = (f_1(\lambda_j), f_2(\lambda_j), \dots, f_m(\lambda_j)), \quad j = \overline{1, n},$$

будем иметь

$$F_i = (f_i(\lambda_1), f_i(\lambda_2), \dots, f_i(\lambda_n)).$$

Векторы  $r_i$  формируются следующим образом: берутся произвольные векторы  $z_j \in \text{Ker } B$ ,  $z_j = (z_{j1}, z_{j2}, \dots, z_{js})$ ,  $s = m - n + n_0$ ,  $j = \overline{1, n}$ , тогда  $r_i = (z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{si})$ .

*Случай q.1.* Векторы  $v(\lambda_j)$  имеют размерность меньше  $n$  (см. случай q.1 в п. 5), поэтому  $\det V = 0$ , следовательно, уравнение (42) имеет решение  $k_i$  в том и только в том случае, когда  $\tilde{Q}(F_i + r_i) = 0$ , где  $\tilde{Q}$  — проектор на  $\text{Coker } V$  (лемма 1). Но  $\tilde{Q}(F_i + r_i) = 0$  при каждом  $i$  — это определённая функциональная зависимость между значениями  $\lambda_j$ , что противоречит произвольности значений  $\mu_j$  в задаваемом наборе  $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ . В этом случае матрица обратной связи построена быть не может.

*Случай q.2.* Матрица  $V$  в (42) состоит из компонентов линейно независимых векторов  $v(\lambda_j)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , построенных в п. 4, следовательно,  $\det V \neq 0$  и из (42) находятся компоненты матрицы  $K$ . При этом совокупность соотношений (14) и (15), используемых для построения

$v(\lambda_j)$  и нахождения компонентов матрицы  $K$ , эквивалентна в силу леммы 1 равенству (12). Таким образом, построенная матрица  $K$  и есть матрица обратной связи, такая что спектр матрицы  $A+BK$  совпадает с произвольно заданным набором простых чисел  $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ , т.е. справедлива следующая

**Лемма 4.** Для произвольного набора простых чисел  $\{\mu_j\}_{j=1}^n$  задача (1)–(3) имеет решение тогда и только тогда, когда существует число  $p \in \mathbb{N}$  такое, что  $B_p$  — сюръекция.

## 6.2. СЛУЧАЙ НАЛИЧИЯ КРАТНЫХ ЧИСЕЛ В $\{\mu_j\}_{j=1}^n$

Пусть  $\mu_1$  имеет кратность  $k$ , остальные  $\mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \dots, \mu_n$  простые. Значения  $\lambda = \lambda_j = \mu_j$  и  $v = v(\lambda_j)$  с  $\lambda_j = \mu_j$  при  $j = 1, k+1, \dots, n$  и  $v = \tilde{v}_j$  с  $\lambda_j = \mu_j$  при  $j = \overline{2, k}$ , построенные в п. 5, подставим в соотношения (15) и (35):

$$\begin{aligned} Kv(\lambda_j) &= B^-(\lambda_1 I - A)v(\lambda_j) + z_j^0, \quad z_j^0 \in \text{Ker } B, \quad j = 1, k+1, \dots, n, \\ K\tilde{v}_j &= B^-((\lambda_1 I - A)\tilde{v}_j + \tilde{v}_{j-1}) + r_j^0, \quad r_j^0 \in \text{Ker } B, \quad j = \overline{2, k}. \end{aligned} \quad (43)$$

Полученные соотношения представляют собой  $m$  систем вида

$$Vk_i = \Phi_i + r_i, \quad i = \overline{1, m},$$

где  $V$ ,  $k_i$  и  $r_i$  описаны в п. 6.1. Далее

$$B^-(\lambda_j I - A)v(\lambda_j) = (f_1(\lambda_j), f_2(\lambda_j), \dots, f_m(\lambda_j)), \quad j = 1, k+1, \dots, n,$$

$$B^-((\lambda_1 I - A)\tilde{v}_j + \tilde{v}_{j-1}) = (\varphi_{j1}, \varphi_{j2}, \dots, \varphi_{jm}), \quad j = \overline{2, k},$$

$$\Phi_i = (f_i(\lambda_1), \varphi_{2i}(\lambda_1), \varphi_{3i}(\lambda_1), \dots, \varphi_{ki}(\lambda_1), f_i(\lambda_{k+1}), f_i(\lambda_{k+2}), \dots, f_i(\lambda_n)).$$

*Случай q.1.* Система векторов, построенная в случае q.1 в п. 5, не может быть линейно независимой, следовательно,  $\det V = 0$  и уравнение (42) имеет решение  $k_i$  в том и только том случае, когда есть определённая функциональная зависимость между значениями  $\lambda_j$ , что противоречит произвольности значений  $\mu_j$  в задаваемом наборе  $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ . В этом случае матрица обратной связи построена быть не может.

*Случай q.2.* Система векторов, построенная в случае q.2 в п. 5, линейно независима, следовательно,  $\det V \neq 0$  и уравнение (42) имеет решение  $k_i$ , тем самым определяя компоненты матрицы  $K$ . При этом  $v(\lambda_j)$  и  $K$  удовлетворяют уравнениям

$$Q(\lambda_1 I - A)v(\lambda_j) = 0, \quad j = 1, k+1, \dots, n,$$

$$Q((\lambda_1 I - A)\tilde{v}_j + \tilde{v}_{j-1}) = 0, \quad j = \overline{2, k},$$

$$Kv(\lambda_j) = B^-(\lambda_j I - A)v(\lambda_j) + r_j^0, \quad r_j^0 \in \text{Ker } B, \quad j = 1, k+1, \dots, n,$$

$$K\tilde{v}_j = B^-((\lambda_1 I - A)\tilde{v}_j + \tilde{v}_{j-1}) + r_j^0, \quad r_j^0 \in \text{Ker } B, \quad j = \overline{2, k}.$$

Совокупность этих соотношений эквивалентна в силу леммы 1 равенствам

$$(A+BK)v(\lambda_j) = \lambda_j v(\lambda_j), \quad j = 1, k+1, \dots, n,$$

$$(A+BK - \lambda_1 I)\tilde{v}_j = \tilde{v}_{j-1}, \quad j = \overline{2, k},$$

т.е.  $K$  является матрицей обратной связи такой, что спектр матрицы  $A+BK$  совпадает с заданным набором произвольных чисел  $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ , где  $\mu_1$  имеет кратность  $k$ , остальные  $\mu_j$  — простые; векторы  $v(\lambda_j)$ ,  $j = 1, k+1, \dots, n$ , — собственные элементы матрицы  $A+BK$ , отвечающие этим числам,  $\tilde{v}_j$ ,  $j = \overline{2, k}$ , — присоединённые к  $v(\lambda_1)$  элементы.

Тем самым доказана

**Теорема 2.** Задача (1)–(3) имеет решение тогда и только тогда, когда существует число  $p \in \mathbb{N}$  такое, что  $B_p$  — сюръекция.

Известен следующий результат.

**Теорема 3** [10–12]. Система (1) является полностью управляемой в том и только в том случае, когда существует число  $p \in \mathbb{N}$  такое, что  $B_p$  — сюръекция.

При этом

$$\text{rank} \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^p B \end{pmatrix} = n. \quad (44)$$

Из теорем 2, 3 следует справедливость теоремы 1. Таким образом, получено новое доказательство теоремы 1.

## 7. О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ МАТРИЦЫ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Если хотя бы одно из множеств  $\text{Ker } B_i$ ,  $i = \overline{0, p}$ , состоит не только из нулевого элемента, то векторы  $v_j$  определяются неединственным образом, и, следовательно, вид матрицы  $K$  в этом случае не единственен. Ниже приведены подтверждающие это примеры. Неединственность может быть и за счёт выбора произвольного элемента  $w^p \in \text{Coker } B_{p-1}$  (пример 1).

Однако матрица  $K$  может быть и единственной, например, если  $\dim \text{Coker } B_{p-1} = 1$  и  $\text{Ker } B_i = 0$ ,  $i = \overline{0, p}$  (пример 2). Заметим, чем выше кратность заданного  $\mu_j$ , тем больше произвольных параметров, входящих в компоненты матрицы  $K$ , что подтверждает пример 3.

**Пример 1.** В книге [15, с. 170] приведены динамическая модель и схема работы многокамерной нагревательной печи. Рассмотрим случай двух печей и трёх камер, т.е. систему (1), где  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $u = (u_1, u_2)$ ,

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -2a \end{pmatrix}, \quad 0 < a < \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для произвольно заданных чисел  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  требуется построить матрицу  $K$  такую, чтобы спектр  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  матрицы  $A + BK$  совпадал со значениями  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ , для чего уравнение  $(A + BK)v = \lambda v$  расщепляется на два уравнения (14) и (15):

$$Q(\lambda I - A)v = 0, \quad (45)$$

$$Kv = B^-(\lambda I - A)v, \quad (46)$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^- = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(матрицы  $Q$  и  $B^-$  можно записать и иначе, однако соотношения (45), (46) будут эквивалентными при любых видах записей).

В (46) отсутствует элемент  $z^0 \in \text{Ker } B$ , поскольку в этом примере  $\text{Ker } B = \{0\}$ .

Построим вектор  $v = v(\lambda)$ . Имеем

$$v^1 = (I - Q)v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -v_1 + 2v_2 \end{pmatrix}, \quad w^1 = Qv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_1 - 2v_2 + v_3 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = QA(I - Q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 2a & -2a \end{pmatrix}, \quad A_1 = QAQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2a & 4a & -2a \end{pmatrix}.$$

Уравнение (17) представим в виде

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -av_1 + 2av_2 + 2av_1 - 4av_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 2a & -4a & 2a + \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_1 - 2v_2 + v_3 \end{pmatrix},$$

тогда из последней строки следует равенство

$$av_1 - 2av_2 = (2a + \lambda)(v_1 - 2v_2 + v_3). \quad (47)$$

Поскольку  $\text{rank}(B \ AB) = 3$ , то  $p = 1$ , следовательно, оператор  $B_1$  в (17) сюръективен,  $Q_1 = 0$ . В формуле (20) предлагалось взять произвольные элементы  $w^1$  и  $z^1 \in \text{Ker } B_1$  и построить  $v^1$ , затем найти  $v$  как сумму  $v^1 + w^1$ .

Однако элемент  $w^1$  — это сомножитель при  $\lambda$  в (20), сомножитель при  $\lambda$  в (47) — это  $v_1 - 2v_2 + v_3$ , поэтому полагаем

$$v_1 - 2v_2 + v_3 = c, \quad c \in \mathbb{C}. \quad (48)$$

Тогда из (47) следует

$$av_1 - 2av_2 = (2a + \lambda)c. \quad (49)$$

В системе (48), (49) можно взять произвольно  $v_1 = d$ ,  $d \in \mathbb{C}$ , тогда  $v_2 = d/2 - c - \lambda c/(2a)$ ,  $v_3 = -\lambda c/a - c$ . Чтобы векторы  $v(\lambda_1)$ ,  $v(\lambda_2)$ ,  $v(\lambda_3)$  были линейно независимыми при разных  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ , полагаем  $d = 2\lambda^2$ ,  $c = -2a$ , тогда

$$v(\lambda) = (2\lambda^2, 2a + \lambda + \lambda^2, 2a + 2\lambda). \quad (50)$$

Построим вектор  $v = v(\lambda)$  теперь в соответствии с теорией. Разложения (18) следуют из равенств

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2x_1 + x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ 1/2x_1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$(x_1, x_2, -x_1 + 2x_2) \in \text{Im } B$ ,  $(0, -1/2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2) \in \text{Coim } B_1$ ,  $(x_1, 1/2x_1, 0) \in \text{Ker } B_1$ ,  $(0, 0, y) \in \text{Im } B_1$ ,  $\{(0, 0, 0)\} = \text{Coker } B_1$ .

Отсюда

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2a \\ 0 & 0 & -1/a \end{pmatrix}.$$

Равенство (20) можно записать как

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -v_1 + 2v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2a(\lambda(v_1 - 2v_2 + v_3) + 2a(v_1 - 2v_2 + v_3)) \\ -1/a(\lambda(v_1 - 2v_2 + v_3) + 2a(v_1 - 2v_2 + v_3)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ 1/2v_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где  $v_1$  — произвольная компонента. Далее берутся произвольно  $w^1 = v_1 - 2v_2 + v_3 = c$ ,  $v_1 = d$ ,  $c, d \in \mathbb{C}$ , и из третьей строки получаем те же значения  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ , что и в (50).

В случае различных  $\mu_j$  при  $\lambda_j = \mu_j$  получаем три линейно независимых вектора  $v(\lambda_1)$ ,  $v(\lambda_2)$ ,  $v(\lambda_3)$ , где  $v(\lambda)$  имеет вид (50).

В случае кратных значений  $\{\mu_j\}_{j=1}^3$  пусть  $\mu_1 = \mu_2 \neq \mu_3$ . Векторы  $v(\lambda_1)$  и  $v(\lambda_3)$  построены выше, а присоединённый к  $v(\lambda_1)$  вектор  $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$  находится из уравнения (35):

$$Q((\lambda_1 I - A)\tilde{v} + v(\lambda_1)) = 0,$$

т.е. из уравнения

$$a\tilde{v}_1 - 2a\tilde{v}_2 + 2a\tilde{v}_3 = -\lambda(\tilde{v}_1 - 2\tilde{v}_2 + 2\tilde{v}_3) - 2a.$$

Полагаем

$$\tilde{v}_1 - 2\tilde{v}_2 + 2\tilde{v}_3 = c, \quad \tilde{v}_1 = d, \quad c, d \in \mathbb{C},$$

тогда

$$a(\tilde{v}_1 - 2\tilde{v}_2 + 2\tilde{v}_3 + 2) = -\lambda c.$$

Из последних двух соотношений при тех же значениях  $c$  и  $d$ , что и при построении  $v(\lambda)$ , получаем

$$\tilde{v} = \tilde{v}(\lambda_1) = (2\lambda_1^2, 1 + 2a + \lambda_1 + \lambda_1^2, 2 + 2a + 2\lambda_1).$$

Векторы  $v(\lambda_1)$ ,  $\tilde{v}(\lambda_1)$ ,  $v(\lambda_3)$  линейно независимые.

Построим матрицу  $K = K(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

В случае различных  $\mu_j$  из (50) имеем три линейно независимых вектора  $v(\lambda_j)$  с компонентами  $v_1(\lambda_j) = 2\lambda_j^2$ ,  $v_2(\lambda_j) = 2a + \lambda_j + \lambda_j^2$ ,  $v_3(\lambda_j) = 2a + 2\lambda_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Подставляем  $\lambda = \lambda_j$  и  $v_i(\lambda_j)$  в (46) для каждого  $j$ :

$$\begin{aligned} k_{11}v_1(\lambda_j) + k_{12}v_2(\lambda_j) + k_{13}v_3(\lambda_j) &= 3(\lambda_j + a)v_1(\lambda_j), \\ k_{21}v_1(\lambda_j) + k_{22}v_2(\lambda_j) + k_{23}v_3(\lambda_j) &= 3(\lambda_j + a)(-v_1(\lambda_j) + v_2(\lambda_j)). \end{aligned} \quad (51)$$

Система, составленная из первых строк в (51) при каждом  $j$  и  $\lambda_j = \mu_j$

$$\begin{aligned} v_1(\lambda_1)k_{11} + v_2(\lambda_1)k_{12} + v_3(\lambda_1)k_{13} &= 3(\lambda_1 + a)v_1(\lambda_1), \\ v_1(\lambda_2)k_{11} + v_2(\lambda_2)k_{12} + v_3(\lambda_2)k_{13} &= 3(\lambda_2 + a)v_1(\lambda_2), \\ v_1(\lambda_3)k_{11} + v_2(\lambda_3)k_{12} + v_3(\lambda_3)k_{13} &= 3(\lambda_3 + a)v_1(\lambda_3), \end{aligned}$$

даёт значения  $k_{1s}$ ,  $s = 1, 2, 3$ .

Аналогично система, составленная из вторых строк в (51) при  $j = 1, 2, 3$ , даёт значения  $k_{2s}$ . Таким образом находятся все компоненты матрицы  $K$ .

В случае  $\mu_1 = \mu_2 \neq \mu_3$  подставим  $v(\lambda_1)$  и  $v(\lambda_3)$  в (51), а  $\tilde{v}(\lambda_1)$  — в (44), в результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} k_{11}v_1(\lambda_j) + k_{12}v_2(\lambda_j) + k_{13}v_3(\lambda_j) &= 3(\lambda_j + a)v_1(\lambda_j), \\ k_{21}v_1(\lambda_j) + k_{22}v_2(\lambda_j) + k_{23}v_3(\lambda_j) &= 3(\lambda_j + a)(-v_1(\lambda_j) + v_2(\lambda_j)), \quad j = 1, 3, \\ k_{11}\tilde{v}_1(\lambda_1) + k_{12}\tilde{v}_2(\lambda_1) + k_{13}\tilde{v}_3(\lambda_1) &= 3(\lambda_1 + a)\tilde{v}_1(\lambda_1) + v_1(\lambda_1), \\ k_{21}\tilde{v}_1(\lambda_1) + k_{22}\tilde{v}_2(\lambda_1) + k_{23}\tilde{v}_3(\lambda_1) &= 3(\lambda_1 + a)(-\tilde{v}_1(\lambda_1) + \tilde{v}_2(\lambda_1) - v_1(\lambda_1) + v_2(\lambda_1)). \end{aligned} \quad (52)$$

Здесь первые соотношения с  $j = 1, 3$  и третьи образуют систему

$$\begin{aligned} k_{11}v_1(\lambda_1) + k_{12}v_2(\lambda_1) + k_{13}v_3(\lambda_1) &= 3(\lambda_1 + a)v_1(\lambda_1), \\ k_{11}v_1(\lambda_3) + k_{12}v_2(\lambda_3) + k_{13}v_3(\lambda_3) &= 3(\lambda_3 + a)v_1(\lambda_3), \\ k_{11}\tilde{v}_1(\lambda_1) + k_{12}\tilde{v}_2(\lambda_1) + k_{13}\tilde{v}_3(\lambda_1) &= 3((\lambda_1 + a)\tilde{v}_1(\lambda_1) + v_1(\lambda_1)), \end{aligned}$$

откуда находятся компоненты  $k_{11}$ ,  $k_{12}$ ,  $k_{11}$  матрицы  $K$ . Решение остальных уравнений в (52) даёт компоненты  $k_{21}$ ,  $k_{22}$ ,  $k_{21}$ .

Возможны частные случаи.

1. Если  $\{\mu_j\}_{j=1}^3 = \{-1, -1+i, -1-i\}$  и  $v(\lambda) = (2\lambda^2, 2a + \lambda + \lambda^2, 2a + 2\lambda)$ , то матрица  $K$ , построенная с помощью (51), имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} -21+3a+6/a & 24-12/a & -24+6/a \\ 12-3/a & -3a-12+6/a & 6a+12-3/a \end{pmatrix}.$$

Проверка показывает, что  $\det(A+BK-\lambda I) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+1-i)(\lambda+1+i)$ .

2. Если при тех же значениях  $\mu_j$  взять в системе (48), (49) значения  $v_1 = d = 2a$ ,  $c = 2a\lambda$ , то  $v(\lambda) = (2a, a - 2a\lambda - \lambda^2, -2a\lambda - 2\lambda^2)$  и

$$K = \begin{pmatrix} 3+3a & -6 & 3 \\ -6+9/a & 12-3a-12/a & -21/2+6a+6/a \end{pmatrix}.$$

Проверка показывает, что  $\det(A+BK-\lambda I) = (\lambda+1)(\lambda+1-i)(\lambda+1+i)$ .

Случаи 1 и 2 подтверждают неединственность вида матрицы обратной связи  $K$  за счёт выбора элементов  $z^1 \in \text{Ker } B_1$  и  $w^1 \in \text{Coker } B$ .

3. Пусть  $\mu_1 = \mu_2 = -1$ ,  $\mu_3 = -2$ . Если  $v(\lambda_j) = (2\lambda_j^2, 2a + \lambda_j + \lambda_j^2, 2a + 2\lambda_j)$ ,  $j = 1, 3$ , то присоединённый к  $v(\lambda_1)$  вектор  $\tilde{v}(\lambda_1) = (2\lambda_1^2, 1 + 2a + \lambda_1 + \lambda_1^2, 2 + 2a + 2\lambda_1)$  и

$$K = \begin{pmatrix} -3+3a-6/a & -6+12/a & 6-6/a \\ -1+5/a & 9-3a-10/a & -9+6a+5/a \end{pmatrix}.$$

Заметим, что если формально положить  $a = 1$ , то  $\{-1, -1, -2\}$  — это спектр матрицы  $A$ , и  $K = (0)$  — ещё один вид матрицы  $K$ .

**Пример 2.** Случай единственности матрицы  $K$ . Если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то  $K = (k_1 \ k_2 \ k_3)$ , и поскольку  $\text{rank}(B \ AB \ A^2B) = 3$ , то  $p = 2$ . Запишем (15) как

$$k_1 v_1(\lambda) + k_2 v_2(\lambda) + k_3 v_3(\lambda) = (\lambda+1)v_1(\lambda). \quad (53)$$

Формулы (20) и (25) при  $q = 2$  примут вид

$$v_1(\lambda) = \lambda(v_1(\lambda) - v_2(\lambda)/2) + 2v_1(\lambda) - v_2(\lambda), \quad (54)$$

$$2v_1(\lambda) - v_2(\lambda) = \lambda(v_1(\lambda) - v_2(\lambda) + v_3(\lambda)) + 3(v_1(\lambda) - v_2(\lambda) + v_3(\lambda)). \quad (55)$$

Элемент  $w^2(\lambda) = v_1(\lambda) - v_2(\lambda) + v_3(\lambda)$  — произвольный. Полагаем

$$v_1(\lambda) - v_2(\lambda) + v_3(\lambda) = c, \quad (56)$$

тогда из (55) следует равенство

$$2v_1(\lambda) - v_2(\lambda) = c(\lambda+3), \quad (57)$$

из (54) —

$$v_1(\lambda) = \frac{c}{2}(\lambda+2)(\lambda+3),$$

из (57) —

$$v_2(\lambda) = c(\lambda+1)(\lambda+3),$$

из (56) —

$$v_3(\lambda) = \frac{c}{2}(\lambda+1)(\lambda+2).$$

Таким образом, нашли вектор

$$v(\lambda) = \frac{c}{2}((\lambda+2)(\lambda+3), 2(\lambda+1)(\lambda+3), (\lambda+1)(\lambda+2)).$$

При заданных значениях  $\lambda_j = \mu_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , где  $\mu_j$  различны, компоненты матрицы  $K$  находятся из (53) единственным образом.

**Пример 3.** В работе [6] для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и 4-кратного  $\lambda = -1$  построена матрица  $K$  одного вида такая, что  $\det(A - BK + I) = 0$ .

Рассмотренным в настоящей статье методом для этой задачи строится матрица  $K = K(c_1, c_2, \dots, c_8)$ , зависящая от восьми произвольных параметров, связанных лишь условием

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ c_3 & c_4 & c_1 & c_2 \\ c_5 & c_6 & c_3 & c_4 \\ c_7 & c_8 & c_5 & c_6 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (58)$$

Для этого из (14) и (35) находятся векторы  $v(\lambda) = \tilde{v}_1(\lambda)$  и  $\tilde{v}_j(\lambda)$ :

$$\tilde{v}_j(\lambda) = \begin{pmatrix} c_{2j-1} \\ c_{2j} \\ c_{2j-3} + \lambda c_{2j-1} \\ c_{2j-2} + \lambda c_{2j} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, 4}$$

( $c_k = 0$  при  $k \leq 0$ ). При выполнении условия (58) эти векторы линейно независимы.

В уравнениях (43) относительно компонент матрицы  $K$  формируются две системы:

$$V \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{13} \\ k_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5c_2 + \lambda^2 c_1 \\ 5c_4 + 2\lambda c_1 + \lambda^2 c_3 \\ c_1 + 5c_6 + 2\lambda c_3 + \lambda^2 c_5 \\ c_3 + 5c_8 + 2\lambda c_5 + \lambda^2 c_7 \end{pmatrix},$$

$$V \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ k_{23} \\ k_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7c_1 + \lambda^2 c_2 \\ 7c_3 + 2\lambda c_2 + \lambda^2 c_4 \\ c_2 + 7c_5 + 2\lambda c_4 + \lambda^2 c_6 \\ c_4 + 7c_7 + 2\lambda c_5 + 2\lambda^2 c_6 + \lambda^2 c_8 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $V$  составлена из компонент векторов  $\tilde{v}_j(\lambda)$ , её определитель  $\Delta$  приведён в (58).

Таким образом строится  $K = (k_{ij})$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = \overline{1, 4}$ .

Векторы  $\tilde{v}_j(\lambda)$  при  $j = \overline{1, 4}$  образуют для  $A + BK$  жорданову цепочку, отвечающую собственному числу  $-1$ .

В частности, если  $c_i$  таковы:  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = 0$ ,  $c_4 = 0$ ,  $c_5 = 0$ ,  $c_6 = -1$ ,  $c_7 = 1$ ,  $c_8 = 0$ , то

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 & 1 \\ -7 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для сравнения: если  $\lambda_j$  — различные (не кратные), то вектор  $v(\lambda)$ , найденный из (14), таков:  $v(\lambda) = (c_1, c_2, \lambda c_1, \lambda c_2)$ , и если  $c_1 = a$ ,  $c_2 = b\lambda^2$ , то  $v(\lambda_j)$  линейно независимые,  $j = \overline{1, 4}$ . Определитель  $\Delta$  матрицы  $V$ , составленной из компонент векторов  $v(\lambda_j)$ , равен  $a^2 b^2 W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ , где  $W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  — определитель Вандермонда.

Компоненты матрицы  $K$  находятся из уравнений

$$V \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{13} \\ k_{14} \end{pmatrix} = (a + 5b) \begin{pmatrix} \lambda_1^2 \\ \lambda_2^2 \\ \lambda_3^2 \\ \lambda_4^2 \end{pmatrix}, \quad V \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ k_{23} \\ k_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a + b\lambda_1^4 \\ 7a + b\lambda_2^4 \\ 7a + b\lambda_3^4 \\ 7a + b\lambda_4^4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом построенная матрица  $K$  зависит от двух параметров  $a$  и  $b$ , однако есть возможность варьировать параметры  $c_1$  и  $c_2$  так, чтобы  $v(\lambda_1)$ ,  $v(\lambda_2)$ ,  $v(\lambda_3)$ ,  $v(\lambda_4)$  были линейно независимыми.

В этом примере при 4-кратном  $\lambda$  матрица обратной связи содержит восемь почти произвольных (связанных условием (58)) параметров, а при различных  $\lambda$  лишь четыре.

## 8. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СПЕКТРА ПРИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ФИКСИРОВАННОЙ МАТРИЦЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Пусть для динамической системы (1) и заданного набора  $\{\mu_j\}_{j=1}^n$  построена матрица обратной связи  $K$ , т.е. существуют векторы  $v_j = v_j(\lambda_j) \in \mathbb{R}^n$  такие, что

$$(A + BK)v_j = \lambda_j v_j, \quad \lambda_j = \mu_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Матрицы  $A$  и  $B$  возмущаются с помощью матриц  $\varepsilon C$  и  $\varepsilon G$  соответственно, где  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ , и система (1) принимает вид

$$\dot{\tilde{x}} = (A + \varepsilon C)\tilde{x} + (B + \varepsilon G)\tilde{u},$$

$\tilde{x} = \tilde{x}(t, \varepsilon)$ ,  $\tilde{u} = \tilde{u}(t, \varepsilon)$ . Вводится обратная связь  $\tilde{u} = K\tilde{x}$ , теперь

$$((A + \varepsilon C) + (B + \varepsilon G)K)\tilde{v}_j = \tilde{\lambda}_j \tilde{v}_j, \quad (59)$$

$$\tilde{v}_j = \tilde{v}_j(\lambda_j, \varepsilon), \quad \tilde{\lambda}_j = \tilde{\lambda}_j(\varepsilon).$$

Исследуем поведение  $\tilde{v}_j$  и  $\tilde{\lambda}_j$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Равенство (59) запишем в виде

$$((A + BK) + \varepsilon(C + GK))\tilde{v}_j = \tilde{\lambda}_j \tilde{v}_j. \quad (60)$$

Из результатов теории ветвления собственных значений и собственных элементов фредгольмовских операторов [16, гл. IX, § 32] в силу фредгольмовости  $A + BK$  и ограниченности

$C + GK$  следует, что при всех достаточно малых  $\varepsilon \neq 0$  существует ровно  $n$  (с учётом кратности) непрерывных по  $\varepsilon$  собственных значений

$$\tilde{\lambda}_j(\varepsilon) = \tilde{\lambda}_j(0) + \alpha_j(\varepsilon) \quad (61)$$

оператора  $A + BK + \varepsilon(C + GK)$  таких, что  $\tilde{\lambda}_j(0) = \lambda_j$  и все они представимы сходящимися рядами по целым или дробным степеням  $\varepsilon$ . Каждому  $\tilde{\lambda}_j(\varepsilon)$  отвечает собственный элемент  $\tilde{v}_j(\lambda_j, \varepsilon)$ , представимый сходящимся рядом по тем же степеням  $\varepsilon$ , что и  $\tilde{\lambda}_j(\varepsilon)$ .

Величины  $\alpha_j(\varepsilon)$  удобно определять с помощью диаграммы Ньютона, построенной с помощью равенства

$$\det(A + BK + \varepsilon(C + GK) - \lambda_j I - \alpha_j(\varepsilon)I) = 0, \quad (62)$$

вытекающего из (60) и (61).

В прямоугольной системе координат отмечаются точки  $(i, j)$ , соответствующие слагаемому с множителем  $\varepsilon^j \alpha^i$  в (62). Крайняя левая нижняя и крайняя правая отмеченные точки соединяются выпуклой вниз ломаной линией с изломами в отмеченных точках (диаграмма Ньютона). С помощью отрезков ломаной устанавливаются главные части величин  $\alpha_j(\varepsilon)$  такие, что  $\alpha_j(\varepsilon) = a_j \varepsilon^r + o(\varepsilon^r)$ , где  $r$  — тангенс угла наклона отрезка от оси абсцисс в отрицательном направлении. Числа  $a_j$  также определяются с помощью отрезков.

**Пример 4.** Пусть в системе, рассмотренной в примере 3 с заданным 4-кратным спектром  $\lambda_j = -1$  и с построенной матрицей обратной связи

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 & 1 \\ -7 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

возникло возмущение  $C = (c_{ij})$ ,  $c_{13} = 1$ , остальные  $c_{ij} = 0$ , и  $G = (g_{ij})$ ,  $g_{31} = 1$ , остальные  $g_{ij} = 0$ .

Равенство (62) примет вид

$$\alpha_j^4 + 3\varepsilon \alpha_j^3 + (-3\varepsilon + \varepsilon^2) \alpha_j^2 + (-3\varepsilon - \varepsilon^2) \alpha_j + 5\varepsilon + \varepsilon^2 = 0.$$

Диаграмма Ньютона состоит из одного отрезка, соединяющего точки  $(0, 1)$  и  $(4, 0)$ . Главная часть  $\alpha_j(\varepsilon)$  определяется из уравнения  $\alpha_j^4 + 5\varepsilon = 0$ , откуда  $\alpha_j = a_j \varepsilon^{1/4} + o(\varepsilon^{1/4})$ , где  $a_j$  — решение уравнения  $a_j^4 = -5\varepsilon$ .

Таким образом, в этом примере  $\tilde{\lambda}_j(\varepsilon) = -1 + a_j \varepsilon^{1/4} + o(\varepsilon^{1/4})$ , где  $|a_j| = 5^{1/4}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен метод построения матрицы обратной связи для линейной динамической системы управления в случае многомерного управляющего вектора. Метод основан на свойстве нётеровости конечномерного отображения с матрицей, стоящей при управляющем векторе, благодаря чему исходная система управления расщепляется на две подсистемы: одна из них даёт возможность построения некоторых линейно независимых векторов, из второй с помощью этих векторов находятся компоненты матрицы обратной связи. Для нахождения векторов к первой системе применяется метод каскадной декомпозиции, состоящий в поэтапном расщеплении названной системы на подсистемы. Одна из подсистем служит для нахождения некоторых частей искомых векторов, а вторая подсистема приводится к виду, аналогичному виду подсистемы предыдущего шага, но с меньшим количеством скалярных уравнений. Благодаря конечномерности исходной системы управления процесс декомпозиции заканчивается за конечное число шагов, на последнем шаге устанавливается полная управляемость (или неуправляемость) исходной системы (если это не было установлено заранее)

и выявляются элементы искоемых векторов, которым можно придавать произвольные значения. Определив значения этих элементов, строится система линейно независимых векторов, с помощью которых вычисляются компоненты матрицы обратной связи. Количество шагов декомпозиции можно узнать предварительно: число шагов  $p$  фигурирует в уточнённом условии Калмана (формула (44)).

Результаты получены без использования теоремы 1 и являются её новым доказательством с описанием построения матрицы обратной связи и установлением свойств, влекущих неединственность вида матрицы.

Построение множества матриц обратной связи для конкретных систем иллюстрируется на примерах.

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шумафов, М.М. Стабилизация линейных систем управления. Проблема назначения полюсов. Обзор / М.М. Шумафов // Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. — 2019. — Т. 6 (64), вып. 4. — С. 564–591.
2. Зубов, В.И. Теория оптимального управления / В.И. Зубов. — Л. : Судпромгиз, 1966. — 352 с.
3. Wonham, W.M. On pole assignment in multi-input controllable linear systems / W.M. Wonham // IEEE Trans. Aut. Contr. — 1967. — V. AC-12, № 6. — P. 660–665.
4. Леонов, Г.А. Методы стабилизации линейных управляемых систем / Г.А. Леонов, М.М. Шумафов. — СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005. — 421 с.
5. Зубов, Н.Е. Матричные методы в теории и практике автоматического управления летательных аппаратов / Н.Е. Зубов, Е.А. Микрин, В.Н. Рябченко. — М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. — 67 с.
6. Лапин, А.В. Реализация в среде MATLAB аналитических алгоритмов модального управления по состоянию и по выходу / А.В. Лапин, Н.Е. Зубов // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2020. — Вып. 1. — С. 1–16.
7. A unified method arbitrary pole placement / R. Schmid, L. Ntogramatzidis, T. Nguyen, A. Pandey // Automatika. — 2014. — V. 50. — P. 2150–2154.
8. Zubova, S.P. Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Math. Methods in the Appl. Sci. — 2021. — V. 44, № 15. — P. 11998–12009.
9. Зубова, С.П. Алгоритм решения линейных многоточечных задач управления методом каскадной декомпозиции / С.П. Зубова, Е.В. Раецкая // Автоматика и телемеханика. — 2017. — № 7. — С. 22–38.
10. Зубова, С.П. Решение обратных задач для линейных динамических систем каскадным методом / С.П. Зубова // Докл. РАН. — 2012. — Т. 447, № 6. — С. 599–602.
11. Зубова С.П. Решение задачи управления для линейной дескрипторной системы с прямоугольно-матричными коэффициентами / С.П. Зубова // Мат. заметки. — 2010. — Т. 88, № 6. — С. 884–895.
12. Зубова, С.П. О полиномиальных решениях линейной стационарной системы управления / С.П. Зубова, Е.В. Раецкая, Ле Хай Чунг // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 11. — С. 41–47.
13. Аткинсон, Ф.В. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах / Ф.В. Аткинсон // Мат. сб. — 1951. — Т. 28 (70), № 1. — С. 3–14.
14. Борताковский, А.С. Линейная алгебра в примерах и задачах: учеб. пособие / А.С. Борताковский, А.В. Пантелеев. — М. : НИЦ ИНФРА-М, 2005. — 592 с.
15. Андреев, Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами / Ю.Н. Андреев. — М. : Наука, 1976. — 424 с.
16. Вайнберг, М.М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Трепогин. — М. : Наука, 1969. — 527 с.

# SOLUTION OF THE SPECTRUM ALLOCATION PROBLEM FOR A LINEAR CONTROL SYSTEM WITH CLOSED FEEDBACK

S. P. Zubova<sup>1</sup>, E. V. Raetskaya<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Voronezh State University, Russia

<sup>2</sup>Voronezh State Forestry University named after G.F. Morozov, Russia

e-mail: <sup>1</sup>spzubova@mail.ru, <sup>2</sup>raetskaya@inbox.ru

The method for constructing a feedback matrix to solve the problem spectrum allocation (spectrum control, pole assignment) for linear dynamic system is given. A new proof of the well-known theorem about the connection between the complete controllability of a dynamic system with existence of the feedback matrix is formed in the process of construction by the cascade decomposition method. The entire set of arbitrary elements that influence the non-uniqueness of the matrix is identified. Examples of constructing a feedback matrix in the case of a real spectrum and in the presence of complex conjugate eigenvalues, as well as for the case of multiple eigenvalues, are given. The stability of the specified spectrum under small perturbations of the system parameters with a fixed feedback matrix is studied.

**Keywords:** dynamic control system, spectrum placement, cascade decomposition method, feedback matrix, spectrum stability.

## REFERENCES

1. Shumafov, M.M., Stabilization of linear control systems. The problem of pole assignment. Review, *Vestnik SPbGU. Matematika. Mekhanika. Astronomiya*, 2019, vol. 6 (64), no. 4, pp. 564–591.
2. Zubov, V.I., *Teoriya optimal'nogo upravleniya* (Optimal Control Theory), Leningrad: Sudpromgiz, 1966.
3. Wonham, W.M., On pole assignment in multi-input controllable linear systems, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 1967, vol. AC-12, no. 6, pp. 660–665.
4. Leonov, G.A. and Shumafov, M.M. *Metodu stabilizacii lineinuh upravlaemuh sistem* (Methods for Stabilization of Linear Controlled Systems), SPb.: SPbSU Press, 2005.
5. Zubov, N.E., Mikrin, E.A. and Rjabchen, V.N., *Matrichnye metody v teorii i praktike avtomaticheskogo upravleniya letatelnykh apparatov* (Matrix Methods in the Theory and Practice of Automatic Control of Aircrafts), Moscow: Izd-vo MGTU im. Baamana (Bauman Press), 2016.
6. Lapin, A.V. and Zubov, N.E., Implementation in the MATLAB environment of analytical algorithms for modal control by state and by exit, *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovacii* (Engineering Journal: Science and Innovation), 2020, vol. 1, pp. 1–16.
7. Schmid, R., Ntogramatzidis, L., Nguyen, T., and Pandey, A., A unified method arbitrary pole placement, *Automatika*, 2014, vol. 501, pp. 2150–2154.
8. Zubova, S.P. and Raetskaya, E.V., Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives, *Math. Methods in the Appl. Sci.*, 2021, vol. 44, no. 15, pp. 11998–12009.
9. Zubova, S.P. and Raetskaya, E.V., Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition, *Automation and Remote Control*, 2017, vol. 78, no. 7, pp. 1189–1202.
10. Zubova, S.P., Solution of inverse problems for linear dynamical systems by the cascade method, *Dokl. Math.*, 2012, vol. 86, no. 3, pp. 846–849.
11. Zubova, S.P., Solution of the control problem for linear descriptor system with rectangular coefficient matrix, *Math. Notes*, 2010, vol. 88, no. 5–6, pp. 844–854.
12. Zubova, S.P., Trung, L.H., and Raetskaya, E.V., On polynomial solutions of the linear stationary control system, *Automation and Remote Control*, 2008, vol. 69, no. 11, pp. 1852–1858.
13. Atkinson, F.V., Normal solvability of linear equations in normed spaces, *Mat. Sbornik*, 1951, vol. 28 (70), no. 1, pp. 3–14.
14. Bortakovsky, A.S. and Panteleev, A.V., *Lineinaja algebra v primerah i zadachach* (Linear Algebra in Examples and Problems), Moscow, 2005.
15. Andreev, U.N., *Ypravlenie konechnomernymi lineinymi objektami* (Control of Finite-Dimensional Linear Objects), Moscow: Nauka, 1976.
16. Vainberg, M.M. and Trenogin, V.A., *Teoriya vetvleniya reshenij nelineinuh yavnenij* (Branching Theory for Solutions to Nonlinear Equations), Moscow: Nauka, 1969.