

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ
ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ
И НЕРАВЕНСТВ

© В. Г. Замураев

*Белорусско-Российский университет, г. Могилёв, Беларусь**e-mail: vhz@tut.by**Поступила в редакцию 01.02.2024 г., после доработки 28.04.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.*

Рассмотрена задача оптимального управления, управляемый процесс в которой описывается линейным функциональным уравнением в гильбертовом пространстве, а управляющим воздействием является изменение пространства. Получены достаточные условия существования решения задачи. Результаты обобщены на случай, когда управляемый процесс описывается линейным вариационным неравенством.

Ключевые слова: задача оптимального управления, оптимальное множество, уравнение с частными производными, вариационное неравенство, гильбертово пространство.

DOI: 10.31857/S0374064124060055, EDN: KWFSVZ

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемая в настоящей работе задача оптимального управления возникла как обобщение широкого класса задач оптимизации области и в подобной постановке была впервые предложена автором в статье [1]. Задачи оптимизации области — класс задач оптимального управления системами с распределёнными параметрами, в которых управляющим воздействием является изменение области определения управляемого процесса. Систематическое изучение таких задач началось с работ Ж.-Л. Лионса [2], Д. Бежи и Р. Гловинского [3], Д. Шенэ [4] и других авторов. Существуют различные как постановки этих задач, так и подходы к их решению. Для широких классов задач оптимизации области получены условия существования решения, условия оптимальности, численными методами найдены решения [5–9]. В большинстве работ управляемый процесс описывается некоторой краевой задачей для уравнения эллиптического типа.

Цель настоящей статьи — получить реально проверяемые на практике достаточные условия существования решения задачи, более общей, чем задача оптимизации области. В рассматриваемой задаче управляемый процесс описывается линейным функциональным уравнением в абстрактном гильбертовом пространстве, а управляющим воздействием является изменение пространства.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим вещественное сепарабельное гильбертово пространство H со скалярным произведением (u, u) и нормой $\|u\| = (u, u)^{1/2}$. Пусть A — действующий в пространстве H линейный симметричный положительно определённый оператор с областью определения $D(A)$, плотной в H : $(Au, v) = (u, Av)$ для любых $u, v \in D(A)$; $(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$, $u \in D(A)$, где $\gamma > 0$ — некоторая постоянная. Выражения $(Au, v) = [u, v]_A$ и $(Au, u)^{1/2} = [u, u]_A^{1/2} = |u|_A$ определяют

на множестве $D(A)$ скалярное произведение и норму. Энергетическое пространство H_A оператора A определяется как пополнение множества $D(A)$ в норме $|u|_A$. При этом имеет место непрерывное вложение пространства H_A в пространство H : $H_A \subset H$,

$$\|u\| \leq \frac{1}{\gamma} |u|_A. \quad (1)$$

Пусть f — произвольный элемент пространства H . Обобщённое решение уравнения $Au = f$ определяется как элемент $u \in H_A$, удовлетворяющий уравнению

$$[u, v]_A = (f, v), \quad v \in H_A. \quad (2)$$

При любом $f \in H$ существует единственное решение u_0 уравнения (2), которое совпадает с единственным элементом, реализующим в пространстве H_A минимум функционала энергии

$$F(u) = \frac{1}{2} |u|_A^2 - (f, u). \quad (3)$$

Рассмотрим метрическое пространство C — множество управлений. Каждому управлению $c \in C$ поставим в соответствие некоторое замкнутое подпространство $H_A(c)$ пространства H_A . Пусть $u_0(c)$ — решение уравнения

$$u \in H_A(c), \quad [u, v]_A = (f, v), \quad v \in H_A(c), \quad (4)$$

равносильного задаче минимизации функционала (3) на подпространстве $H_A(c)$.

Пусть u_d — некоторый фиксированный элемент пространства H . Рассматриваемая задача оптимизации состоит в отыскании управления $c = c^*$, доставляющего минимальное значение функционалу $j(c) = \|u_0(c) - u_d\|$ на множестве управлений C . Всякое решение c^* данной задачи будем называть *оптимальным управлением*, а соответствующее этому решению подпространство $H_A(c^*)$ — *оптимальным пространством*.

2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ

Введём следующие условия:

1) если

$$c_n \rightarrow c \in C, \quad (5)$$

$u_n \in H_A(c_n)$, $u_n \xrightarrow{w} u$ слабо в H_A , то $u \in H_A(c)$;

2) из (5) следует, что для произвольного $u \in H_A(c)$ найдётся элемент $u_n \in H_A(c_n)$ такой, что $u_n \rightarrow u$ сильно в H_A .

Лемма 1. Пусть выполнены условия 1) и 2). Тогда если $c_n \rightarrow c \in C$, то последовательность $\{u_0(c_n)\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся в пространстве H_A к $u_0(c)$.

Доказательство. Полагая в уравнении (4) $c = c_n$, $u = v = u_0(c_n)$, используя неравенство Коши–Шварца и оценку (1), получаем

$$|u_0(c_n)|_A^2 = (f, u_0(c_n)) = |(f, u_0(c_n))| \leq \|f\| \|u_0(c_n)\| \leq \frac{1}{\gamma} \|f\| |u_0(c_n)|_A,$$

откуда имеем

$$|u_0(c_n)|_A \leq \frac{1}{\gamma} \|f\|, \quad (6)$$

т.е. последовательность $\{u_0(c_n)\}$ ограничена. В силу слабой компактности замкнутого шара в гильбертовом пространстве H_A из последовательности $\{u_0(c_n)\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в H_A к некоторому элементу $\bar{u}$, которую снова обозначим через $\{u_0(c_n)\}$. Таким образом, учитывая, что любая подпоследовательность сходящейся

последовательности $\{c_n\}$ сходится к тому же пределу, имеем: $c_n \rightarrow c \in C$, $u_0(c_n) \in H_A(c_n)$, $u_0(c_n) \xrightarrow{w} \bar{u}$ слабо в H_A . По условию 1) тогда $\bar{u} \in H_A(c)$.

Для произвольного $v \in H_A(c)$ найдём элемент $v_n \in H_A(c_n)$ такой, что $v_n \rightarrow v$ в H_A . При таком выборе v_n , используя оценку (6), получаем

$$\begin{aligned} |[u_0(c_n), v_n]_A - [\bar{u}, v]_A| &= |[u_0(c_n), v_n - v]_A + [u_0(c_n) - \bar{u}, v]_A| \leqslant \\ &\leqslant |u_0(c_n)|_A |v_n - v|_A + |[u_0(c_n) - \bar{u}, v]_A| \leqslant \frac{1}{\gamma} \|f\| |v_n - v|_A + |[u_0(c_n) - \bar{u}, v]_A|. \end{aligned}$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} [u_0(c_n), v_n]_A = [\bar{u}, v]_A$.

Учитывая непрерывность вложения H_A в H , также находим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (f, v_n) = (f, v)$. Таким образом, $[\bar{u}, v]_A = (f, v)$ для любого $v \in H_A(c)$. В совокупности с условием $\bar{u} \in H_A(c)$ это означает, что $\bar{u} = u_0(c)$.

Для доказательства сильной сходимости последовательности $\{u_0(c_n)\}$ к $u_0(c)$ докажем сходимость норм: $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_0(c_n)|_A = |u_0(c)|_A$.

Так как $|u_0(c_n)|_A^2 = (f, u_0(c_n)) = [u_0, u_0(c_n)]_A$ и $u_0(c_n) \xrightarrow{w} u_0(c)$ слабо в H_A , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_0(c_n)|_A^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} [u_0, u_0(c_n)]_A = [u_0, u_0(c)]_A = (f, u_0(c)) = |u_0(c)|_A^2,$$

т.е. $\{u_0(c_n)\}$ сходится к $u_0(c)$ сильно в H_A . Лемма доказана.

Приведём кратко необходимые для дальнейшего изложения сведения из теории многозначных отображений [10, гл. 2].

Пусть X — некоторое множество, направленное отношением частичного порядка “ $\geqslant$ ”. Подмножество A множества X называется *терминальным*, если существует элемент $x_0 \in X$ такой, что $x \in A$ для любого $x \geqslant x_0$; и *конфинальным*, если для любого $x \in X$ существует $a \in A$ такой, что $a \geqslant x$.

Пусть C — топологическое пространство. *Направленностью* $(c_x) \subset C$ называется функция из X в C . Точка $c \in C$ называется *пределом направленности* (c_x) , если для любой окрестности V точки c существует терминальное подмножество A множества X такое, что $(c_x) \subset V$ при $x \in A$. Если пространство C хаусдорфово, то любая сходящаяся направленность имеет единственный предел.

Пусть T — топологическое пространство. *Направленностью множеств* $(S_x) \subset T$ называется функция, ставящая в соответствие каждому $x \in X$ некоторое множество $S_x \subset T$. Определим множества $\lim \inf_x S_x$ и $\lim \sup_x S_x$ следующим образом: $u \in \lim \inf_x S_x$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности U точки u $U \cap S_x \neq \emptyset$ для любого x из некоторого терминального подмножества множества X ; $u \in \lim \sup_x S_x$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности $U(u)$ $U \cap S_x \neq \emptyset$ для любого x из некоторого конфинального подмножества множества X .

Пусть C и T — хаусдорфовы топологические пространства и пусть F — многозначное отображение C в T , $F: c \mapsto F(c) \subset T$, $G(F) = \{(c, u) \in C \times T: u \in F(c)\}$ — график отображения F . Отображение F называется *полунепрерывным изнутри* на пространстве C , если для любой точки $c \in C$ и любой направленности $(c_x) \subset C$, сходящейся к c , $F(c) \subset \lim \inf_x F(c_x)$. Отображение F называется *полунепрерывным извне* на C , если для любой точки $c \in C$ из сходимости направленности (c_x) к c следует, что $\lim \sup_x F(c_x) \subset F(c)$.

Если пространства C и T удовлетворяют первой аксиоме счётности, то полунепрерывность многозначного отображения F в точке c изнутри равносильна тому, что для любых $u \in F(c)$ и для любой последовательности $\{c_n\} \subset C$, сходящейся к c , существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in F(c_n)$, сходящаяся к u . Полунепрерывность отображения F извне равносильна

замкнутости графика $G(F)$. В случае пространств с первой аксиомой счётности это означает, что из сходимости последовательности $\{(c_n, u_n)\} \subset G(F)$ к $(c, u) \in C \times T$ следует, что $u \in F(c)$.

Вернёмся к поставленной задаче оптимизации и рассмотрим многозначное отображение $H_A: C \rightarrow H_A$, $H_A: c \mapsto H_A(c)$.

Условие 2) равносильно полунепрерывности изнутри отображения H_A на множестве C . Учитывая, что слабая топология в H_A может не удовлетворять первой аксиоме счётности, в общем случае нельзя утверждать, что условие 1) равносильно слабой полунепрерывности извне отображения H_A на множестве C . Условие 1) назовём *секвенциальной слабой полунепрерывностью извне* отображения H_A на множестве C .

Теорема 1. Пусть метрическое пространство C — компакт и пусть многозначное отображение H_A секвенциально слабо полунепрерывно извне и полунепрерывно изнутри на пространстве C . Тогда рассматриваемая задача оптимизации имеет решение.

Доказательство. Функционал $j(c) = \|u_0(c) - u_d\|$ ограничен снизу на C , значит существует последовательность управлений $\{c_n\}$, минимизирующая этот функционал на C . Метрическое пространство C — компакт, следовательно, последовательность $\{c_n\}$ содержит подпоследовательность, которую снова обозначим через $\{c_n\}$, сходящуюся в C к некоторому управлению c^* .

Рассмотрим последовательность решений $\{u_0(c_n)\}$ уравнения (4), соответствующую этой сходящейся последовательности $\{c_n\}$. По лемме 1 последовательность $\{u_0(c_n)\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к $u_0(c^*)$ в H_A , а значит, и в H . Учитывая тот факт, что всякая подпоследовательность минимизирующей последовательности $\{c_n\}$ также будет минимизирующей последовательностью для рассматриваемого функционала на C , находим

$$\inf_{c \in C} \|u_0(c) - u_d\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_0(c_n) - u_d\| = \|u_0(c^*) - u_d\| = \min_{c \in C} \|u_0(c) - u_d\|,$$

т.е. c^* — оптимальное управление. Теорема доказана.

Лемма 2. Пусть $D(c)$ — некоторое множество, плотное в $H_A(c)$, и пусть из условия $c_n \rightarrow c \in C$ следует, что для произвольного $\varphi \in D(c)$ найдётся элемент $u_n \in H_A(c_n)$ такой, что $u_n \rightarrow \varphi$ сильно в H_A . Тогда из условия $c_n \rightarrow c \in C$ следует, что для произвольного $u \in H_A(c)$ и для любой окрестности $O(u)$ найдётся натуральное число N такое, что пересечение $O(u) \cap H_A(c_n) \neq \emptyset$ для любого $n \geq N$.

Доказательство. Множество $D(c)$ плотно в пространстве $H_A(c)$. Следовательно, для любого $u \in H_A(c)$ найдётся последовательность $\varphi_m \in D(c)$, сходящаяся в H_A к u , т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M(\varepsilon)$ такое, что $|\varphi_m - u|_A < \varepsilon/2$ для любого $m \geq M$. В частности, $|\varphi_M - u|_A < \varepsilon/2$. Пусть $c_n \rightarrow c \in C$. По условию для $\varphi_M \in D(c)$ найдутся элемент $v_{Mn} \in H_A(c_n)$ и натуральное число N такие, что $|v_{Mn} - \varphi_M|_A < \varepsilon/2$ при $n \geq N$. Тогда

$$|v_{Mn} - u|_A \leq |v_{Mn} - \varphi_M|_A + |\varphi_M - u|_A < \varepsilon,$$

т.е. при $n \geq N$ элементы $v_{Mn} \in H_A(c_n)$ содержатся в произвольной ε -окрестности точки $u \in H_A(c)$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть из условия $c_n \rightarrow c \in C$ следует, что для произвольного элемента $u \in H_A(c)$ и для любой окрестности $O(u)$ найдётся натуральное число N такое, что пересечение $O(u) \cap H_A(c_n) \neq \emptyset$ при $n \geq N$. Тогда существует натуральное число N_{n_0} и последовательность $u_n \in H_A(c_n)$, $n \geq N_{n_0}$, такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$.

Доказательство. Рассмотрим семейство вложенных окрестностей точки u :

$$O_{m+1}(u) \subset O_m(u).$$

По условию найдётся число N_m такое, что $O_m(u) \cap H_A(c_n) \neq \emptyset$, $n \geq N_m$. Поскольку окрестности рассматриваемого семейства вложены друг в друга, можно считать, что $N_{m+1} > N_m$.

Зафиксируем некоторое натуральное число n_0 и рассмотрим число N_{n_0} . Для каждого $n \geq N_{n_0}$ выберем некоторый элемент $v_{nm} \in O_m(u) \cap H_A(c_n)$. Для любого $n \geq N_{n_0}$ существует N_m такое, что $N_m \leq n < N_{m+1}$. Определим последовательность $u_n = v_{nm}$ для любых $n \geq N_{n_0}$ таких, что $N_m \leq n < N_{m+1}$.

Зафиксируем окрестность $O(u)$ и возьмём k так, чтобы $O_k(u) \subset O(u)$. Тогда из определения u_n и из вложенности окрестностей рассматриваемого семейства следует, что $u_n \in O_k(u)$ для любых $n \geq N_k$. Следовательно, последовательность $\{u_n\}$ при $n \geq N_{n_0}$ сходится к u . Лемма доказана.

Замечание. Из утверждений лемм 2 и 3 следует, что в приложениях можно проверять выполнение условия 2) лишь для элементов некоторого множества $D(c)$, плотного в пространстве $H_A(c)$. Заметим также, что если потребовать выполнения условия 2) лишь для элементов $D(c)$, то в доказательстве леммы 1 мы получаем: $\bar{u} \in H_A(c)$, $[\bar{u}, v]_A = (f, v)$ для всех $v \in D(c)$, откуда следует, что $\bar{u} = u_0(c)$.

Следующая теорема устанавливает связь между решениями u_0 и $u_0(c)$ уравнений (2) и (4) соответственно.

Теорема 2. Решение $u_0(c)$ уравнения (4) является проекцией в энергетическом пространстве H_A на подпространство $H_A(c)$ решения u_0 уравнения (2):

$$u_0(c) = P(c)u_0,$$

где $P(c)$ — оператор проектирования пространства H_A на подпространство $H_A(c)$.

Доказательство. Для произвольного элемента $v \in H_A(c)$

$$[u_0(c), v]_A = (f, v) = [u_0, v]_A,$$

т.е.

$$[u_0 - u_0(c), v]_A = 0, \quad v \in H_A(c).$$

Тогда

$$|u_0(c) - u_0|_A^2 - |v - u_0|_A^2 = 2[u_0 - u_0(c), v - u_0(c)]_A - |u_0(c) - v|_A^2 \leq 0,$$

откуда следует, что

$$|u_0(c) - u_0|_A = \min_{v \in H_A(c)} |v - u_0|_A = \text{dist}(u_0, H_A(c)),$$

а значит, $u_0(c) = P(c)u_0$. Теорема доказана.

Оператор проектирования $P(c)$ является линейным непрерывным симметричным оператором, удовлетворяющим условию $P^2(c) = P(c)$. Кроме того, решения u_0 и $u_0(c)$ уравнений (2) и (4) связаны соотношением

$$|2u_0(c) - u_0|_A^2 = |u_0|_A^2. \quad (7)$$

Действительно, из уравнений (4) и (2) при $v = u_0(c)$ получаем

$$[u_0(c)]_A^2 = (f, u_0(c)) = [u_0, u_0(c)]_A,$$

$$|u_0(c)|_A^2 - 2[u_0(c), u_0/2]_A + |u_0|_A^2/4 = |u_0|_A^2/4,$$

откуда следует (7).

Если решение u_0 уравнения (2) соответствует некоторому управлению, то рассматриваемая задача оптимизации имеет содержательный смысл в том случае, когда минимальное значение функционала $j(c)$ меньше $\|u_0 - u_d\|$. Заметим, что это возможно. Взяв, например, в качестве u_d некоторое конкретное $u_0(c) = P(c)u_0 \neq u_0$, имеем

$$0 = \|u_0(c) - u_d\| < \|u_0 - u_d\| \neq 0.$$

3. ПРИМЕР

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для эллиптического уравнения с однородным краевым условием (см., например, [11, гл. 14, §§ 1–4])

$$-\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^2 A_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + C(x_1, x_2)u = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (8)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (9)$$

где $u = u(x_1, x_2)$, $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$, Γ — граница области Ω , $A_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $A_{12}(x_1, x_2) = A_{21}(x_1, x_2)$, $C \in C(\bar{\Omega})$, $C(x_1, x_2) \geq 0$ для всех точек $(x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$. Дифференциальное выражение в левой части уравнения (8) будем считать эллиптическим и невырожденным на замкнутом множестве $\bar{\Omega}$, т.е. имеет место соотношение

$$\sum_{i,j=1}^2 A_{ij}(x_1, x_2) t_i t_j \geq \mu_0 \sum_{k=1}^2 t_k^2,$$

где t_1, t_2 — произвольные действительные числа, μ_0 — положительная постоянная, ограничивающая снизу собственные числа $\lambda_1(x_1, x_2)$ и $\lambda_2(x_1, x_2)$ матрицы старших коэффициентов ($A_{ij}(x_1, x_2)$) в замкнутой области $\bar{\Omega}$, являющиеся положительными и непрерывными в $\bar{\Omega}$ функциями. Считаем, что функция $f \in L_2(\Omega)$.

Порождаемый задачей (8), (9) линейный неограниченный оператор

$$Au = -\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^2 A_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + C(x_1, x_2)u$$

является симметричным и положительно определённым на плотном в $L_2(\Omega)$ множестве

$$D(A) = \{u \in C^2(\bar{\Omega}) : u|_{\Gamma} = 0\},$$

содержащем в себе множество $D(\Omega)$ финитных в области Ω функций. Энергетическое пространство H_A оператора A (пространство Соболева) состоит из функций, которые в Ω квадратично суммируемы, имеют квадратично суммируемые обобщённые первые производные и удовлетворяют краевому условию (9) в следующем смысле: если $u \in H_A$, то существует последовательность функций $u_n \in D(A)$ таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (u_n - u)^2 d\Omega = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega = 0.$$

Энергетическое произведение и норма в пространстве H_A определяются формулами

$$[u, v]_A = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^2 A_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + C(x_1, x_2)uv \right) d\Omega,$$

$$|u|_A = \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^2 A_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + C(x_1, x_2)u^2 \right) d\Omega \right)^{1/2},$$

обобщённое решение $u_0 \in H_A$ задачи (8), (9) находится из уравнения

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^2 A_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + C(x_1, x_2) uv \right) d\Omega = \int_{\Omega} f(x_1, x_2) v d\Omega, \quad v \in H_A.$$

Пусть $\Omega(c) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: 0 < x_1 < c(x_2), 0 < x_2 < 1\}$, где функция $c(x_2)$ принадлежит множеству

$$C = \left\{ c \in C^{0,1}[0, 1]: 0 < \alpha \leq c(x_2) \leq \beta < 1, |c'(x_2)| \leq k_1, \int_0^1 c(x_2) dx_2 = k_2 \right\};$$

здесь $C^{0,1}[0, 1]$ — множество функций, удовлетворяющих условию Липшица на отрезке $[0, 1]$, α, β, k_1, k_2 — некоторые постоянные. Множество $\bar{\Omega}(c) \subset \bar{\Omega}$. Границу области $\Omega(c)$ обозначим через $\Gamma(c)$. Рассмотрим задачу (8), (9) в замкнутой области $\bar{\Omega}(c)$:

$$-\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^2 A_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + C(x_1, x_2) u = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega(c), \quad (10)$$

$$u|_{\Gamma(c)} = 0,$$

обобщённое решение $u_0(c) \in H_{A(c)}$ которой находится из уравнения

$$\int_{\Omega(c)} \left(\sum_{i,j=1}^2 A_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + C(x_1, x_2) uv \right) d\Omega = \int_{\Omega(c)} f(x_1, x_2) v d\Omega, \quad v \in H_{A(c)}.$$

Каждую функцию $\varphi \in D(\Omega(c))$ продолжим нулём вне $\Omega(c)$ на всю область Ω . Полученная таким образом функция $\tilde{\varphi}$ является финитной на Ω , и её норма $|\tilde{\varphi}|_A = |\varphi|_{A(c)}$. Учитывая, что множество финитных в $\Omega(c)$ функций плотно в пространстве $H_{A(c)}$, распространим построенный оператор продолжения по непрерывности на всё пространство $H_{A(c)}$: если $u \in H_{A(c)}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = u$, то $\tilde{u} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}_n$, $|\tilde{u}|_A = |u|_{A(c)}$.

Образ пространства $H_{A(c)}$ при указанном продолжении является замкнутым подпространством пространства H_A , представляющим собой множество функций из H_A , равных нулю почти всюду в $\Omega \setminus \Omega(c)$. Обозначим это подпространство через $H_{A(c)}$. Учитывая взаимную однозначность указанного оператора продолжения, отождествим пространство $H_{A(c)}$ с пространством $H_A(c)$.

Пусть $u_d = u_d(x_1, x_2)$, $u_d \in L_2(\Omega)$. Рассматриваемая задача оптимизации состоит в минимизации функционала

$$j(c) = \left(\iint_{\Omega} (u_0(c) - u_d)^2 d\Omega \right)^{1/2}$$

на множестве управлений C .

Условие $\int_0^1 c(x_2) dx_2 = k_2$ означает, что при изменении области $\Omega(c)$ её площадь остаётся постоянной, т.е. рассматриваемая задача относится к классу задач оптимизации формы области. Близкая задача для частного случая уравнения (10) — неоднородного уравнения Лапласа — с однородным краевым условием на правой части границы области $\Omega(c)$ рассматривалась в работе [3], где было доказано существование решения, установлены необходимые условия оптимальности, для модельных задач с конкретными значениями параметров численными методами были найдены оптимальные области и соответствующие им значения минимизируемых функционалов; отмечено также, что в общем случае решение задачи не единственно.

Проверим выполнение условий 1) и 2). Пусть $c_n \rightarrow c \in C$, $u(c_n) \in H_A(c_n)$, $u(c_n) \xrightarrow{w} u$ слабо в H_A . Так как любой линейный непрерывный функционал на пространстве $L_2(\Omega)$ непрерывен также на пространстве H_A , последовательность $\{u_n\}$ слабо сходится к u в пространстве $L_2(\Omega)$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega} u_n v \, d\Omega = \iint_{\Omega} uv \, d\Omega, \quad v \in L_2(\Omega).$$

При $v = u \in L_2(\Omega)$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega} u_n u \, d\Omega = \iint_{\Omega} u^2 \, d\Omega. \quad (11)$$

Полагая $v = \chi_{\Omega(c)} u$, где $\chi_{\Omega(c)}(x_1, x_2)$ — характеристическая функция множества $\Omega(c)$, $v \in L_2(\Omega)$, получаем равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega(c)} u_n u \, d\Omega = \iint_{\Omega(c)} u^2 \, d\Omega. \quad (12)$$

Пусть $\Omega(c_n) \Delta \Omega(c)$ — симметрическая разность множеств $\Omega(c_n)$ и $\Omega(c)$, мера которой

$$\mu(\Omega(c_n) \Delta \Omega(c)) = \iint_{\Omega(c_n) \Delta \Omega(c)} d\Omega = \int_0^1 |c_n(x_2) - c(x_2)| \, dx_2 \leq \max_{x_2 \in [0,1]} |c_n(x_2) - c(x_2)|. \quad (13)$$

Оценим теперь абсолютную величину следующей разности:

$$\begin{aligned} \left| \iint_{\Omega} u_n u \, d\Omega - \iint_{\Omega(c)} u^2 \, d\Omega \right| &= \left| \iint_{\Omega(c_n)} u_n u \, d\Omega - \iint_{\Omega(c)} u^2 \, d\Omega \right| \leq \left| \iint_{\Omega(c_n) \Delta \Omega(c)} u_n u \, d\Omega \right| + \left| \iint_{\Omega(c)} (u_n - u) u \, d\Omega \right| \leq \\ &\leq \left(\iint_{\Omega} u_n^2 \, d\Omega \right)^{1/2} \left(\iint_{\Omega(c_n) \Delta \Omega(c)} u^2 \, d\Omega \right)^{1/2} + \left| \iint_{\Omega(c)} (u_n - u) u \, d\Omega \right|. \end{aligned}$$

Учитывая ограниченность в $L_2(\Omega)$ слабо сходящейся последовательности $\{u_n\}$, сходимость $c_n \rightarrow c$ в $C[0, 1]$, оценку (13), абсолютную непрерывность интеграла Лебега, равенства (11) и (12), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega} u_n u \, d\Omega = \iint_{\Omega(c)} u^2 \, d\Omega = \iint_{\Omega} u^2 \, d\Omega,$$

откуда следует, что $u(x_1, x_2) = 0$ почти всюду в $\Omega \setminus \Omega(c)$. В совокупности с условием $u \in H_A$ это означает, что $u \in H_A(c)$.

В соответствии с замечанием к лемме 3 выполнение условия 2) проверим лишь для элементов плотного в $H_A(c)$ множества финитных в Ω функций с носителем в $\Omega(c)$. Пусть $c_n \rightarrow c \in C$ в метрике пространства $C[0, 1]$ и пусть $\tilde{\varphi}(x_1, x_2)$ — финитная в Ω функция, носитель которой лежит в $\Omega(c)$. Функция $\tilde{\varphi}$ обращается в нуль в некоторой пограничной полосе

$$\Omega_{\varepsilon}(c) = \{(x_1, x_2) \in \Omega(c) : \rho((x_1, x_2), \Gamma) < \varepsilon\}$$

области $\Omega(c)$, в частности, и на множестве $\{(x_1, x_2) \in \Omega(c) : |x_1 - c(x_2)| < \varepsilon, 0 \leq x_2 \leq 1\}$.

Сходимость последовательности $\{c_n\}$ к управлению c означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $x_2 \in [0, 1]$

$$|c_n(x_2) - c(x_2)| \leq \max_{x_2 \in [0,1]} |c_n(x_2) - c(x_2)| < \varepsilon$$

при $n \geq N$, т.е. при таких значениях n функция $\varphi \in D(\Omega(c_n)) \subset H_A(c_n)$. Последовательность $\varphi_n = \varphi$ для $n \geq N$.

Множество управлений C замкнуто в пространстве $C[0, 1]$. Кроме того, семейство управлений равномерно ограничено и в силу условия $|c'(x_2)| \leq k_1$ равномерно непрерывно на отрезке $[0, 1]$. По теореме Арцела метрическое пространство управлений C компактно.

Таким образом, в данном примере все условия теоремы 1 выполнены и, следовательно, рассматриваемая задача оптимизации имеет решение.

4. СЛУЧАЙ ВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА

Пусть S — некоторое непустое замкнутое выпуклое множество в пространстве H_A . Задача минимизации функционала (3) на множестве S равносильна решению вариационного неравенства

$$[u, v - u]_A \geq (f, v - u), \quad u, v \in S. \quad (14)$$

По теореме Стампаккья [12, с. 138] для любой функции $f \in H$ существует единственное решение u_0 неравенства (14). Каждому управлению $c \in C$ поставим в соответствие некоторое непустое замкнутое выпуклое множество $S(c)$ в пространстве H_A . Пусть $u_0(c)$ — решение неравенства

$$[u, v - u]_A \geq (f, v - u), \quad u, v \in S(c). \quad (15)$$

Лемма 4. Пусть многозначное отображение $S: C \rightarrow H_A$ ($S: c \mapsto S(c)$), секвенциально слабо полунепрерывно извне и полунепрерывно изнутри на пространстве C . Тогда если $c_n \rightarrow c \in C$, то последовательность $\{u_0(c_n)\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся в H_A к $u_0(c)$.

Доказательство. Для доказательства ограниченности последовательности $\{u_0(c_n)\}$ найдём для произвольного фиксированного $v \in S(c)$ элемент $v_n \in S(c_n)$ такой, что $v_n \rightarrow v$ в H_A . Положим $c = c_n$, $u = u_0(c_n)$, $v = v_n$ в неравенстве (15):

$$[u_0(c_n), v_n - u_0(c_n)]_A \geq (f, v_n - u_0(c_n)),$$

откуда получим

$$|u_0(c_n)|_A^2 \leq [u_0(c_n), v_n]_A - (f, v_n - u_0(c_n)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} |u_0(c_n)|_A^2 &\leq |[u_0(c_n), v_n]_A| + |(f, v_n - u_0(c_n))| \leq |u_0(c_n)|_A |v_n|_A + \|f\| \|v_n - u_0(c_n)\| \leq \\ &\leq |u_0(c_n)|_A |v_n|_A + \frac{1}{\gamma} \|f\| \|v_n - u_0(c_n)\|_A \leq |u_0(c_n)|_A |v_n|_A + \frac{1}{\gamma} \|f\| (|v_n|_A + |u_0(c_n)|_A). \end{aligned}$$

Из найденных соотношений следует, что

$$|u_0(c_n)|_A \leq \frac{1}{2} \left(|v_n|_A + \frac{1}{\gamma} \|f\| + \sqrt{\left(|v_n|_A + \frac{1}{\gamma} \|f\| \right)^2 + \frac{4}{\gamma} \|f\| |v_n|_A} \right).$$

Рассуждая аналогично как при доказательстве леммы 1, для подпоследовательностей будем иметь: $c_n \rightarrow c \in C$, $u_0(c_n) \in S(c_n)$, $u_0(c_n) \xrightarrow{w} \bar{u}$ слабо в H_A . Тогда в силу секвенциальной слабой полунепрерывности отображения S извне $\bar{u} \in S(c)$. Из оценки

$$|[u_0(c_n), v_n]_A| = |[u_0(c_n), v + v_n - v]_A| \leq |[u_0(c_n), v]_A| + |u_0(c_n)|_A |v_n - v|_A$$

следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [u_0(c_n), v_n]_A = [\bar{u}, v]_A. \quad (16)$$

Из оценки

$$\begin{aligned} |(f, v_n - u_0(c_n))| &= |(f, v_n - v + v - u_0(c_n))| \leq |(f, v_n - v)| + |(f, v - u_0(c_n))| \leq \\ &\leq \|f\| \|v_n - v\| + |(f, v) - (f, u_0(c_n))| \leq \frac{1}{\gamma} \|f\| |v_n - v|_A + |(f, v) - (f, u_0(c_n))|, \end{aligned}$$

учитывая, что последовательность $u_0(c_n)$, слабо сходящаяся к $\bar{u}$ в энергетическом пространстве H_A , будет также слабо сходиться к $\bar{u}$ в пространстве H , получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f, v_n - u_0(c_n)) = (f, v - \bar{u}). \quad (17)$$

Кроме того, из полунепрерывности нормы относительно слабой сходимости следует, что

$$|\bar{u}|_A^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |u_0(c_n)|_A^2. \quad (18)$$

Из (16)–(18) находим

$$|\bar{u}|_A^2 \leq [\bar{u}, v]_A - (f, v - \bar{u}),$$

т.е.

$$[\bar{u}, v - \bar{u}]_A \geq (f, v - \bar{u}), \quad v \in S(c).$$

В совокупности с условием $\bar{u} \in S(c)$ это означает, что $\bar{u} = u_0(c)$.

Для доказательства сильной сходимости последовательности $\{u_0(c_n)\}$ к $u_0(c)$ введём элемент $u_n \in S(c_n)$, для которого $u_n \rightarrow u_0(c)$. Полагая в неравенстве (15) $c = c_n$, $u = u_0(c_n)$, $v = u_n$, получаем

$$[u_0(c_n), u_n - u_0(c_n)]_A \geq (f, u_n - u_0(c_n)),$$

откуда

$$|u_0(c_n)|_A^2 \leq [u_0(c_n), u_n]_A - (f, u_n - u_0(c_n)).$$

Тогда

$$|u_0(c_n) - u_n|_A^2 = |u_0(c_n)|_A^2 - 2[u_0(c_n), u_n]_A + |u_n|_A^2 \leq |u_n|_A^2 - [u_0(c_n), u_n]_A - (f, u_n) + (f, u_0(c_n)).$$

Из сильной сходимости $\{u_n\}$ к $u_0(c)$ и слабой сходимости $\{u_0(c_n)\}$ к $u_0(c)$ в пространствах H_A и H следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_0(c_n) - u_n|_A^2 = 0.$$

Учитывая неравенство

$$|u_0(c_n) - u_0(c)| \leq |u_0(c_n) - u_n| + |u_n - u_0(c)|,$$

получаем сильную сходимость последовательности $\{u_0(c_n)\}$ к $u_0(c)$. Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть метрическое пространство C — компакт и пусть многозначное отображение S секвенциально слабо полунепрерывно извне и полунепрерывно изнутри на пространстве C . Тогда рассматриваемая задача минимизации имеет решение.

Доказательство теоремы 3 почти дословно повторяет доказательство теоремы 1.

Теорема 4. Решение $u_0(c)$ неравенства (15) является проекцией в энергетическом пространстве H_A на множество $S(c)$ решения u_0 уравнения (2): $u_0(c) = P(c)(u_0)$, где $P(c)$ — оператор проектирования пространства H_A на множество $S(c)$.

Доказательство. Для произвольного элемента $v \in S(c)$ имеют место соотношения

$$[u_0(c), v - u_0(c)]_A \geq (f, v - u_0(c)) = [u_0, v - u_0(c)]_A,$$

т.е.

$$[u_0 - u_0(c), v - u_0(c)]_A \leq 0, \quad v \in S(c).$$

Тогда

$$|u_0(c) - u_0|_A^2 - |v - u_0|_A^2 = 2[u_0 - u_0(c), v - u_0(c)]_A - |u_0(c) - v|_A^2 \leq 0,$$

откуда следует, что

$$|u_0(c) - u_0|_A = \min_{v \in S(c)} |v - u_0| = \text{dist}(u_0, H_A(c)),$$

а, значит,

$$u_0(c) = P(c)(u_0).$$

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены достаточные условия существования решения задачи оптимального управления, в которой управляемый процесс описывается линейным функциональным уравнением в абстрактном гильбертовом пространстве, а управляющим воздействием является изменение пространства. Рассмотрен пример, показывающий, что задача оптимизации формы области, в которой управляемый процесс описывается задачей Дирихле для эллиптического уравнения с однородным краевым условием, является частным случаем рассматриваемой задачи оптимизации, и подробно иллюстрирующий проверку достаточных условий разрешимости в этом частном случае. Полученные результаты обобщены на случай, когда управляемый процесс описывается линейным вариационным неравенством.

Теорема существования решения — первый шаг в исследовании рассматриваемой задачи. Требуют изучения условия на исходные данные, обеспечивающие уменьшение значения минимизируемого функционала; необходимо получить условия оптимальности, а также разработать алгоритмы, порождающие минимизирующие последовательности. Перспективным направлением исследований является изучение задачи, в которой управляемый процесс описывается операторным уравнением с непотенциальным оператором, с применением полученных в этом случае результатов к исследованию задач оптимизации.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Замураев, В.Г. Существование оптимальных пространств для линейных функциональных уравнений / В.Г. Замураев // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 7. — С. 982–985.
2. Лионс, Ж.-Л. Об оптимальном управлении распределенными системами / Ж.-Л. Лионс // Успехи мат. наук. — 1973. — Т. 28, № 4. — С. 15–46.
3. Begis, D. Application de la méthode des éléments finis à l'approximation d'un problème de domaine optimal. Méthodes de résolution des problèmes approchés / D. Begis, R. Glowinski // Appl. Math. and Optim. — 1975. — V. 2, № 2. — P. 130–169.
4. Chenais, D. On the existence of a solution in a domain identification problem / D. Chenais // J. Math. Anal. Appl. — 1975. — № 52. — P. 189–219.
5. Hlaváček, I. Optimization of the domain in elliptic unilateral boundary value problems by finite element method / I. Hlaváček, J. Nečas // Analyse Numérique. — 1982. — V. 16, № 4. — P. 351–373.

6. Осипов, Ю.С. Об одной задаче Ж.-Л. Лионса / Ю.С. Осипов, А.П. Суетов // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 276, № 2. — С. 288–291.
7. Pironneau, O. Optimal Shape Design for Elliptic Systems / O. Pironneau. — New York : Springer-Verlag, 1984. — 168 p.
8. Haslinger, J. Introduction to Shape Optimization: Theory, Approximation, and Computation / J. Haslinger, R.A.E. Mäkinen. — Philadelphia : SIAM, 2003. — 273 p.
9. Neittaanmaki, P. Optimization of Elliptic Systems: Theory and Applications / P. Neittaanmaki, J. Sprekels, D. Tiba. — New York : Springer, 2006. — 507 p.
10. Burachik, R.S. Set-Valued Mappings and Enlargements of Monotone Operators / R.S. Burachik, A.N. Iusem. — New York : Springer, 2008. — 293 p.
11. Михлин, С.Г. Курс математической физики / С.Г. Михлин. — М. : Наука, 1968. — 576 с.
12. Brezis, H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations / H. Brezis. — New York : Springer, 2011. — 599 p.

THE EXISTENCE OF OPTIMAL SETS FOR LINEAR VARIATIONAL EQUATIONS AND INEQUALITIES

V. G. Zamuraev

Belarusian-Russian University, Mogilev, Belarus
e-mail: vhz@tut.by

This paper considers an optimal control problem in which the controlled process is described by a linear functional equation in a Hilbert space, and the control action is a change of space. Sufficient conditions for the existence of a solution are obtained. The results are generalized to the case when the controlled process is described by a linear variational inequality.

Keywords: problem of optimal control, optimal set, partial differential equation, variational inequality, Hilbert space.

REFERENCES

1. Zamuraev, V.G., The existence of optimal spaces for linear functional equations, *Differ. Equat.*, 2002, vol. 38, no. 7, pp. 1046–1049.
2. Lions, J., The optimal control of distributed systems, *Russ. Math. Surv.*, 1973, vol. 28, no. 4, pp. 13–46.
3. Begis, D. and Glowinski, R., Application de la méthode des éléments finis à l'approximation d'un problème de domaine optimal. Méthodes de résolution des problèmes approchés, *Appl. Math. and Optim.*, 1975, vol. 2, no. 2, pp. 130–169.
4. Chenaïs, D., On the existence of a solution in a domain identification problem, *J. Math. Anal. Appl.*, 1975, no. 52, pp. 189–219.
5. Hlaváček, I. and Nečas, J., Optimization of the domain in elliptic unilateral boundary value problems by finite element method, *Analyse Numérique*, 1982, vol. 16, no. 4, pp. 351–373.
6. Osipov, Yu.S. and Suetov, A.P., A problem of J.-L. Lions, *Dokl. AN SSSR*, 1984, vol. 276, no. 2, pp. 288–291.
7. Pironneau, O., *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*, New York: Springer-Verlag, 1984.
8. Haslinger, J. and Mäkinen, R.A.E., *Introduction to Shape Optimization: Theory, Approximation, and Computation*, Philadelphia: SIAM, 2003.
9. Neittaanmaki, P., Sprekels, J., and Tiba, D., *Optimization of Elliptic Systems: Theory and Applications*, New York: Springer, 2006.
10. Burachik, R.S. and Iusem, A.N., *Set-Valued Mappings and Enlargements of Monotone Operators*, New York: Springer, 2008.
11. Mikhlin, S.G., *Kurs matematicheskoy fiziki* (Mathematical Physics Course), Moscow: Nauka, 1968.
12. Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York: Springer, 2011.