ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 6, с. 750–763

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957+517.958

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ, РЕДУКЦИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ МОНЖА–АМПЕРА МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

© **А. В. Аксенов[1], А. Д. Полянин[2]**

[1]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*
[2]*Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва*
e-mail: [1]aksenov@mech.math.msu.su, [2]polyanin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 04.12.2023 г., после доработки 16.01.2024 г.; принята к публикации 13.02.2024 г.

Исследовано уравнение Монжа–Ампера с тремя независимыми переменными, встречающееся в электронной магнитной гидродинамике. Проведён групповой анализ этого сильно нелинейного уравнения с частными производными. Найдено одиннадцатипараметрическое преобразование, сохраняющее вид уравнения. Получена формула, дающая возможность строить многопараметрические семейства решений исходя из более простых решений. Рассмотрены двумерные редукции, приводящие к более простым уравнениям в частных производных с двумя независимыми переменными. Описаны одномерные редукции, позволяющие получать автомодельные и другие инвариантные решения, которые удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям. Построены точные решения с аддитивным, мультипликативным и обобщённым разделением переменных, многие из которых допускают представление в элементарных функциях. Полученные результаты и точные решения могут быть использованы для оценки точности и анализа адекватности численных методов решения начально-краевых задач, описываемых сильно нелинейными уравнениями с частными производными.

Ключевые слова: уравнение Монжа–Ампера, групповой анализ, редукция, точное решение.

DOI: 10.31857/S0374064124060032, EDN: KWLDDX

ВВЕДЕНИЕ

В плазменной электронной магнитной гидродинамике разработан подход, в котором электронная составляющая плазмы представлена в виде набора случайных или регулярно распределённых точечных электронных вихрей. Локальные нестационарные движения в соответствующей двумерной вихревой системе описываются нелинейным уравнением [1, 2]

$$u_t = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2, \tag{1}$$

в правой части которого опущен несущественный постоянный множитель.

Впервые нестационарные уравнения с нелинейностью типа Монжа–Ампера по пространственным переменным появились в работе [3], в которой, в частности, было приведено уравнение

$$u_t = \det H - f(\mathbf{x}, t), \tag{2}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $H = (u_{x_i x_j})$ — матрица вторых производных Гессе.

В случае двух пространственных переменных $x_1=x$ и $x_2=y$ в уравнении (2) следует положить $\mathbf{x}=(x,y)$ и $\det H=u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2$. При $n=2$ и $f\equiv 0$ уравнение (2) переходит в уравнение (1).

Уравнения (1) и (2) и более сложные родственные нелинейные уравнения, содержащие первую производную по времени u_t и комбинацию вторых производных по пространственным координатам вида $\det H$, называются авторами статей [4–8] *параболическими уравнениями Монжа–Ампера*. В указанных работах в основном исследовались вопросы существования и единственности решений различных внутренних и внешних начально-краевых задач для таких уравнений, а также обсуждались геометрические приложения.

В случае двух пространственных переменных параболические уравнения Монжа–Ампера имеют вид

$$u_t=F(x,y,t,u,u_x,u_y,u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2). \tag{3}$$

При $u_t=F_t=0$ уравнения вида (3) сводятся к стационарным уравнениям Монжа–Ампера, которые принято записывать в разрешённом относительно комбинации старших производных виде

$$u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=\Phi(x,y,u,u_x,u_y). \tag{4}$$

Весьма полную информацию о стационарных уравнениях Монжа–Ампера, часто встречающихся в дифференциальной геометрии, можно найти в книге [9, гл. 8]. В частных случаях, при $\Phi=0$ (однородное уравнение Монжа–Ампера) и $\Phi=a=\mathrm{const}<0$, общее решение уравнения (4) можно представить в параметрической форме [10, с. 776]. Различные преобразования и обширный список точных решений уравнений вида (4) приведены в работах [10, с. 774–793; 11].

Уравнение (4) является сильно нелинейным (квадратичным относительно старших производных) и имеет свойства, необычные для квазилинейных уравнений — линейных относительно старших производных. В частности, даже для простейшей правой части $\Phi=a=\mathrm{const}$ качественные особенности этого уравнения зависят от знака постоянной a, поскольку при $a>0$ уравнение (4) является уравнением “эллиптического типа”, а при $a<0$ — уравнением “гиперболического типа” [10, с. 1393].

Указанные выше качественные особенности стационарных уравнений Монжа–Ампера значительно усложняют процедуру их численного интегрирования. Поэтому для численного решения стационарных уравнений Монжа–Ампера (4) применяются различные модификации метода установления по времени с использованием параболического уравнения Монжа–Ампера, которое получается добавлением нестационарной первой производной u_t в правую часть (4). Указанный подход с привлечением параболических уравнений Монжа–Ампера (1) и (2) использовался в [12, 13] для численного интегрирования краевых задач, описываемых соответствующими стационарными уравнениями Монжа–Ампера.

В статьях [14, 15] с помощью метода разделения переменных были получены точные решения уравнения (1) в виде произведения и суммы функций разных аргументов.

В данной работе под *точными решениями* нелинейных уравнений с частными производными понимаются решения, которые выражаются:

— с помощью элементарных функций и неопределённых интегралов;

— через решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или систем ОДУ;

— через решения линейных уравнений математической физики.

Важно отметить, что точные решения нелинейных уравнений математической физики с частными производными играют важную роль стандартных “математических эталонов”, широко использующихся для оценки точности, верификации и разработки различных численных, асимптотических и приближённых аналитических методов.

Редукциями рассматриваемого уравнения называют уравнения с меньшим числом независимых переменных или уравнения более низкого порядка, все решения которых являются решениями данного уравнения. Редукции играют ключевую роль для построения точных решений дифференциальных уравнений. Наиболее важными для нелинейных уравнений с частными производными являются одномерные редукции, используя которые удаётся представить их решения в терминах решений гораздо более простых ОДУ.

Отметим характерную качественную особенность уравнения (1), отличающую его от подавляющего большинства других уравнений математической физики, не зависящих явно от независимых переменных — оно не имеет простых решений типа бегущей волны $u = U(ax+by+ct)$ и более сложных решений вида $u=V(ax+by,t)$, где a, b, c — некоторые постоянные, $U'\neq 0$ и $V_t\neq 0$.

В данной работе для поиска точных решений нелинейного уравнения магнитной гидродинамики (1) использованы различные модификации метода обобщённого разделения переменных [10, гл. 29; 16, гл. 1], а также приведённые в [10, гл. 11] точные решения более простых, чем исходное, промежуточных редуцированных уравнений с меньшим числом независимых переменных. Особое внимание уделяется построению простых точных решений, которые выражаются через элементарные функции. Такие решения удобно использовать в качестве тестовых задач для оценки точности и проверки адекватности численных методов решения сильно нелинейных уравнений с частными производными.

1. СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ МОНЖА–АМПЕРА (1)

Операторы симметрии уравнения (1) ищем в виде

$$X=\xi^1(x,y,t,u)\frac{\partial}{\partial x}+\xi^2(x,y,t,u)\frac{\partial}{\partial y}+\xi^3(x,y,t,u)\frac{\partial}{\partial t}+\eta(x,y,t,u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Применяя критерий инвариантности [17, гл. 2], получаем следующую переопределённую линейную однородную систему определяющих уравнений:

$$\begin{gathered}\xi^1_t=0,\quad \xi^1_u=0,\quad \xi^2_t=0,\quad \xi^2_u=0,\quad \xi^3_x=0,\quad \xi^3_y=0,\quad \xi^3_u=0,\\ \eta_t=0,\quad \eta_u-2\xi^1_x-2\xi^2_y+\xi^3_t=0,\quad \xi^1_{xx}=0,\quad \xi^1_{xy}=0,\quad \xi^1_{yy}=0,\\ \xi^2_{xx}=0,\quad \xi^2_{xy}=0,\quad \xi^2_{yy}=0,\quad \xi^3_{tt}=0,\quad \eta_{xx}=0,\quad \eta_{xy}=0,\quad \eta_{yy}=0.\end{gathered}\tag{5}$$

Нетрудно показать, что совместное решение переопределённой системы уравнений (5) даётся формулами

$$\xi^1=c_1x+c_2y+c_3,\quad \xi^2=c_4x+c_5y+c_6,\quad \xi^3=c_7t+c_8,\quad \eta=(2c_1+2c_5-c_7)u+c_9x+c_{10}y+c_{11},$$

где c_j $(j=\overline{1,11})$ — произвольные постоянные. Отсюда следуют два утверждения.

Предложение 1. *Базис алгебры Ли операторов симметрии уравнения (1) имеет вид*

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial y},\quad X_3=\frac{\partial}{\partial t},\quad X_4=\frac{\partial}{\partial u},\quad X_5=y\frac{\partial}{\partial x},\quad X_6=x\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_7=x\frac{\partial}{\partial u},\quad X_8=y\frac{\partial}{\partial u},\quad X_9=x\frac{\partial}{\partial x}+2u\frac{\partial}{\partial u},\quad X_{10}=y\frac{\partial}{\partial y}+2u\frac{\partial}{\partial u},\quad X_{11}=t\frac{\partial}{\partial t}-u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Предложение 2. *Преобразование*

$$\begin{gathered}\bar{x}=a_1x+b_1y+c_1,\quad \bar{y}=a_2x+b_2y+c_2,\quad \bar{t}=d_1t+d_2,\\ \bar{u}=\frac{(a_1b_2-a_2b_1)^2}{d_1}u+a_3x+b_3y+c_3\quad (a_1b_2-a_2b_1\neq 0,\quad d_1\neq 0)\end{gathered}\tag{6}$$

переводит любое решение $u=\varphi(x,y,t)$ *уравнения (1) в одиннадцатипараметрическое семейство решений*

$$u=\frac{d_1}{(a_1b_2-a_2b_1)^2}\big[\varphi(a_1x+b_1y+c_1,a_2x+b_2y+c_2,d_1t+d_2)-a_3x-b_3y-c_3\big], \tag{7}$$

где a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2 *— произвольные постоянные.*

Важно отметить, что в формуле (7) свободные параметры могут быть комплексными числами, если полученное таким способом решение будет действительным (подробности см. в [18]). В п. 3 статьи приведён конкретный пример использования такого подхода.

Замечание 1. Преобразование (6) оставляет инвариантным вид уравнения (1). Формула (7) даёт возможность получать многопараметрические семейства решений исходя из более простых решений.

2. ДВУМЕРНЫЕ СИММЕТРИЙНЫЕ РЕДУКЦИИ

Регулярная процедура построения двумерных симметрийных редукций уравнений с частными производными описана в книге [17, гл. 5]. В данной работе мы ограничимся наиболее содержательными примерами построения двумерных редукций уравнения Монжа–Ампера (1) на основе использования симметрий, описанных выше.

1°. Переходя в уравнении (1) к переменным типа бегущей волны

$$u=U(\xi,\eta),\qquad \xi=x-a_1t,\qquad \eta=y-a_2t, \tag{8}$$

где a_1 и a_2 — произвольные постоянные, приходим к двумерному уравнению типа Монжа–Ампера с постоянными коэффициентами

$$U_{\xi\xi}U_{\eta\eta}-U_{\xi\eta}^2+a_1U_\xi+a_2U_\eta=0. \tag{9}$$

Решение вида (8) является инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований, задаваемой оператором симметрии

$$Y=a_1X_1+a_2X_2+X_3=a_1\frac{\partial}{\partial x}+a_2\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial t}.$$

Уравнение (9) допускает точные решения, квадратичные по любой независимой переменной, вида

$$U_1=f_1(\xi)\eta^2+g_1(\xi)\eta+h_1(\xi),\quad U_2=f_2(\eta)\xi^2+g_2(\eta)\xi+h_2(\eta), \tag{10}$$

где функции f_i, g_i, h_i $(i=1,2)$ описываются соответствующими системами ОДУ второго порядка, которые здесь не приводятся.

Замечание 2. Решения аналогичные (10), квадратичные по одной или нескольким переменным, нередко используются для построения точных решений нелинейных уравнений реакционно-диффузионного типа (см., например, [10, 17–19]).

2°. Переходя в уравнении (1) к автомодельным переменным

$$u=t^{-2\alpha-2\beta-1}U(\xi,\eta),\quad \xi=xt^\alpha,\quad \eta=yt^\beta, \tag{11}$$

где α и β — произвольные постоянные, получаем двумерное уравнение типа Монжа–Ампера с переменными коэффициентами при младших производных

$$U_{\xi\xi}U_{\eta\eta}-U_{\xi\eta}^2-\alpha\xi U_\xi-\beta\eta U_\eta+(2\alpha+2\beta+1)U=0. \tag{12}$$

Решение вида (11) является инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований, задаваемой оператором симметрии

$$Y = \alpha X_9 + \beta X_{10} - X_{11} = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \beta y \frac{\partial}{\partial y} - t \frac{\partial}{\partial t} + (2\alpha + 2\beta + 1) u \frac{\partial}{\partial u}. \tag{13}$$

Уравнение (12) допускает квадратичные по любой независимой переменной точные решения вида (10). Значениям $\alpha = \beta = 0$ в (11) соответствует решение с мультипликативным разделением переменных.

Замечание 3. Эквивалентную форму представления решения вида (11) можно получить, взяв вместо второго аргумента комбинацию обоих аргументов $\zeta = \xi^{-\beta}\eta^{\alpha} = x^{-\beta}y^{\alpha}$, что приведёт к решению вида

$$u = t^{-2\alpha-2\beta-1} V(\xi, \zeta), \quad \xi = xt^{\alpha}, \quad \zeta = x^{-\beta}y^{\alpha}. \tag{14}$$

Решение вида (14) также является инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований, задаваемой оператором симметрии (13). Уравнение на функцию $V(\xi, \zeta)$ (или двумерная редукция) здесь не приводится ввиду его громоздкости.

3°. Переходя в уравнении (1) к инвариантным переменным

$$u = e^{-2(\alpha+\beta)t} U(\xi, \eta), \quad \xi = xe^{\alpha t}, \quad \eta = ye^{\beta t}, \tag{15}$$

где α и β — произвольные постоянные, получаем другое двумерное уравнение типа Монжа–Ампера с переменными коэффициентами при младших производных

$$U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2 - \alpha\xi U_{\xi} - \beta\eta U_{\eta} + 2(\alpha+\beta)U = 0. \tag{16}$$

Решение вида (15) является инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований, задаваемой оператором симметрии

$$Y = \alpha X_9 + \beta X_{10} - X_3 = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \beta y \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} + 2(\alpha+\beta) u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Уравнение (16) допускает квадратичные по любой независимой переменной точные решения вида (10).

4°. Переходя в уравнении (1) к инвариантным переменным

$$u = \frac{1}{t} U(\xi, \eta), \quad \xi = x + \lambda_1 \ln t, \quad \eta = y + \lambda_2 \ln t, \tag{17}$$

где λ_1 и λ_2 — произвольные постоянные, получаем двумерное уравнение типа Монжа–Ампера с постоянными коэффициентами

$$U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2 - \lambda_1 U_{\xi} - \lambda_2 U_{\eta} + U = 0. \tag{18}$$

Решение вида (17) является инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований, задаваемой оператором симметрии

$$Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 - X_{11} = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y} - t \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Уравнение (18) допускает точные решения типа бегущей волны, а также квадратичные по любой независимой переменной решения вида (10). Значениям $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ в (17) соответствует решение с мультипликативным разделением переменных.

5°. Уравнение (1) с использованием инвариантных переменных

$$u = x^2 U(\xi, \eta), \quad \xi = t + \alpha \ln x, \quad \eta = y + \beta \ln x, \tag{19}$$

где α и β — произвольные постоянные, редуцируется к двумерному уравнению, которое здесь опускается. Значениям $\alpha = \beta = 0$ в (19) соответствует решение с мультипликативным разделением переменных.

Решение вида (19) является инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований, задаваемой оператором симметрии

$$Y = -\beta X_2 - \alpha X_3 + X_9 = x\frac{\partial}{\partial x} - \beta\frac{\partial}{\partial y} - \alpha\frac{\partial}{\partial t} + 2u\frac{\partial}{\partial u}.$$

6°. Уравнение (1) с использованием инвариантных переменных

$$u = e^{-2\alpha x} U(\xi, \eta), \quad \xi = x + \beta t, \quad \eta = y e^{\alpha x} \tag{20}$$

редуцируется к двумерному уравнению типа Монжа–Ампера, которое здесь опускается.

Решение вида (20) является решением, инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований, задаваемой оператором симметрии

$$Y = \beta X_1 - X_3 - \alpha\beta X_{10} + X_9 = \beta\frac{\partial}{\partial x} - \alpha\beta y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} - 2\alpha\beta u\frac{\partial}{\partial u}.$$

7°. Уравнение (1) с использованием инвариантных переменных

$$u = e^{(\alpha - 2\beta)x} U(\xi, \eta), \quad \xi = t e^{\alpha x}, \quad \eta = y e^{\beta x} \tag{21}$$

сводится к двумерному уравнению, которое здесь опускается.

Решение вида (21) является инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований, задаваемой оператором симметрии

$$Y = X_1 - \beta X_{10} - \alpha X_{11} = \frac{\partial}{\partial x} - \beta y\frac{\partial}{\partial y} - \alpha t\frac{\partial}{\partial t} + (\alpha - 2\beta)u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Замечание 4. Более сложные двумерные симметрийные редукции уравнения (1) можно получить, применив к решениям (8), (11), (14), (15), (17), (19)–(21) формулу размножения решений (7).

3. ОДНОМЕРНЫЕ СИММЕТРИЙНЫЕ РЕДУКЦИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Регулярная процедура построения одномерных редукций уравнений с частными производными описана в [17, гл. 5]. В данной работе мы ограничимся характерными примерами построения одномерных редукций и инвариантных точных решений путём использования симметрий параболического уравнения Монжа–Ампера (1).

1°. Простейшим инвариантным решением уравнения (1), допускающим преобразование масштабирования, является решение в виде произведения соответствующих степеней независимых переменных

$$u = \frac{x^2 y^2}{12t}. \tag{22}$$

Ниже рассмотрено несколько инвариантных решений, которые обобщают решение (22) и могут быть получены с помощью простых методов, описанных в статье [20].

Решение (22) является частным случаем более широкого семейства инвариантных решений вида

$$u=\frac{x^2}{t}f(z),\qquad z=y+\beta\ln t,\tag{23}$$

где β — произвольная постоянная, а функция $f=f(z)$ описывается нелинейным ОДУ

$$2ff''_{zz}-4(f'_z)^2=-f+\beta f'_z.$$

Решение (22) является частным случаем и другого, более широкого семейства инвариантных решений вида

$$u=\frac{x^2}{t}g(\xi),\qquad \xi=y+\lambda\ln x,\tag{24}$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $g=g(z)$ удовлетворяет ОДУ

$$\lambda g'_\xi g''_{\xi\xi}-2gg''_{\xi\xi}+4(g'_\xi)^2=g.$$

Решение (22) также является частным случаем другого, более широкого семейства инвариантных решений вида

$$u=x^2y^2\varphi(\eta),\quad \eta=t+\gamma\ln y,\tag{25}$$

где γ — произвольная постоянная, а функция $\varphi=\varphi(\eta)$ удовлетворяет ОДУ

$$2\gamma^2\varphi\varphi''_{\eta\eta}-4\gamma^2(\varphi'_\eta)^2-10\gamma\varphi\varphi'_\eta-12\varphi^2=\varphi'_\eta.$$

В решениях (23)–(25) пространственные переменные x и y можно поменять местами или воспользоваться формулой (7).

Применив формулу (7) при $a_1=a_2=b_2=d_1=1$, $b_1=-1$, $a_3=b_3=c_1=c_2=c_3=d_2=0$ к решению (22), получим решение более сложного вида

$$u=\frac{(x^2-y^2)^2}{48t}.\tag{26}$$

Уравнение (1) не изменится, если сделать преобразование $\bar u=-u$, $\bar x=ix$, где $i^2=-1$ (это эквивалентно выбору комплексного параметра $a_1=i$ в формуле (7)). Сделав аналогичное преобразование в (26), приходим к простому решению с осевой симметрией

$$u=-\frac{(x^2+y^2)^2}{48t}.$$

2°. Уравнение (1) с использованием инвариантных переменных

$$u=x^{2-2\beta}t^{-2\alpha-1}V(\zeta),\quad \zeta=x^\beta t^\alpha y\tag{27}$$

редуцируется к нелинейному ОДУ второго порядка

$$\big[\beta(\beta+1)\zeta V'_\zeta-2(\beta-1)(2\beta-1)V\big]V''_{\zeta\zeta}+(\beta-2)^2(V'_\zeta)^2+\alpha\zeta V'_\zeta-(2\alpha+1)V=0.$$

Решение вида (27) является инвариантным решением относительно двухпараметрической группы преобразований, задаваемой операторами симметрии

$$Y_1=\alpha X_9-\beta X_{11}=\alpha x\frac{\partial}{\partial x}-\beta t\frac{\partial}{\partial t}+(2\alpha+\beta)u\frac{\partial}{\partial u},\quad Y_2=\alpha X_{10}-X_{11}=\alpha y\frac{\partial}{\partial y}-t\frac{\partial}{\partial t}+(2\alpha+1)u\frac{\partial}{\partial u}.$$

3°. Уравнение (1) с использованием инвариантных переменных

$$u = e^{-2\alpha t} x^{2-2\beta} V(\zeta), \quad \zeta = e^{\alpha t} x^\beta y \tag{28}$$

редуцируется к ОДУ второго порядка

$$\big[\beta(\beta+1)\zeta V'_\zeta - 2(\beta-1)(2\beta-1)V\big] V''_{\zeta\zeta} + (\beta-2)^2 (V'_\zeta)^2 + \alpha\zeta V'_\zeta - 2\alpha V = 0.$$

Решение вида (28) инвариантно относительно двухпараметрической группы преобразований, задаваемой операторами симметрии

$$Y_1 = -X_3 + \alpha X_{10} = \alpha y \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} + 2\alpha u \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_2 = X_9 - \beta X_{10} = x\frac{\partial}{\partial x} - \beta y \frac{\partial}{\partial y} - 2(\beta-1)u\frac{\partial}{\partial u}.$$

4°. Уравнение (1) с использованием инвариантных переменных

$$u = t^{-2\alpha-1} e^{-2\beta x} V(\zeta), \qquad \zeta = t^\alpha e^{\beta x} y \tag{29}$$

сводится к ОДУ второго порядка

$$\beta^2(\zeta V'_\zeta - 4V)V''_{\zeta\zeta} + \beta^2 (V'_\zeta)^2 + \alpha\zeta V'_\zeta - (2\alpha+1)V = 0.$$

Решение вида (29) является инвариантным относительно двухпараметрической группы преобразований, задаваемой операторами симметрии

$$Y_1 = X_1 - \beta X_{10} = \frac{\partial}{\partial x} - \beta y\frac{\partial}{\partial y} - 2\beta u \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_2 = \alpha X_{10} - X_{11} = \alpha y \frac{\partial}{\partial y} - t\frac{\partial}{\partial t} + (2\alpha+1)u\frac{\partial}{\partial u}.$$

5°. Уравнение (1) с использованием инвариантных переменных

$$u = e^{-2\alpha t - 2\beta x} V(\zeta), \qquad \zeta = e^{\alpha t + \beta x} y \tag{30}$$

редуцируется к ОДУ второго порядка

$$\beta^2(\zeta V'_\zeta - 4V)V''_{\zeta\zeta} + \beta^2 (V'_\zeta)^2 + \alpha\zeta V'_\zeta - 2\alpha V = 0.$$

Решение вида (30) является инвариантным относительно двухпараметрической группы преобразований, задаваемой операторами симметрии

$$Y_1 = X_1 - \beta X_{10} = \frac{\partial}{\partial x} - \beta y\frac{\partial}{\partial y} - 2\beta u \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_2 = X_3 - \alpha X_{10} = \frac{\partial}{\partial t} - \alpha y\frac{\partial}{\partial y} - 2\alpha u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Замечание 5. Более сложные одномерные симметрийные редукции уравнения (1) можно получить, применив к решениям (24), (25), (27)–(30) формулу размножения решений (7).

4. РЕДУКЦИИ С ОБОБЩЁННЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ, ПРИВОДЯЩИЕ К НЕОДНОРОДНЫМ УРАВНЕНИЯМ МОНЖА–АМПЕРА

1°. Уравнение (1) имеет решения с аддитивным разделением переменных вида

$$u = -At + w(x,y), \tag{31}$$

где A — произвольная постоянная, а функция w описывается неоднородным уравнением Монжа–Ампера с постоянной правой частью

$$w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2 = -A. \tag{32}$$

2°. Нетрудно проверить, что уравнение (1) допускает точное решение с аддитивным разделением переменных вида (31), которое выражается в элементарных функциях

$$u = C_1x^2 + C_2xy + C_3y^2 + C_4x + C_5y + (4C_1C_3 - C_2^2)t + C_6,$$

где C_i $(i = \overline{1,6})$ — произвольные постоянные.

3°. Используя результаты [10], можно получить, например, следующие точные решения вида (31) уравнения (1):

$$u = -At \pm \frac{\sqrt{A}}{C_2} x(C_1x + C_2y) + \varphi(C_1x + C_2y) + C_3x + C_4y + C_5,$$

$$u = -At + \frac{1}{x + C_1}\left(C_2y^2 + C_3y + \frac{C_3^2}{4C_2}\right) - \frac{A}{12C_2}(x^3 + 3C_1x^2) + C_4y + C_5x + C_6,$$

$$u = -At \pm \frac{2\sqrt{A}}{3C_1C_2}(C_1x - C_2^2y^2 + C_3)^{3/2} + C_4x + C_5y + C_6,$$

где C_i $(i = \overline{1,6})$ — произвольные постоянные, $\varphi = \varphi(z)$ — произвольная функция.

Замечание 6. При $A > 0$ общее решение неоднородного уравнения Монжа–Ампера (32) можно представить в параметрическом виде [10].

4°. Уравнение (1) допускает более сложные, чем (31), решения с обобщённым разделением переменных вида

$$u = -(ax + by + c)t + w(x,y),$$

где a, b, c — произвольные постоянные, а функция w описывается неоднородным уравнением Монжа–Ампера с переменной правой частью

$$w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2 = -ax - by - c. \tag{33}$$

При $b = c = 0$ уравнение (33) имеет, например, следующие точные решения с обобщённым разделением переменных:

$$w = \pm\frac{2}{3a} y(ax)^{3/2} + C_1y + \varphi(x), \quad w = C_1y^2 + C_2xy + C_3y - \frac{a}{12C_1}x^3 + \frac{C_2^2}{4C_1}x^2 + C_4x + C_5,$$

$$w = C_1\frac{y^2}{x} + C_2y - \frac{a}{24C_1}x^4 + C_3x + C_4,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C_i $(i = \overline{1,5})$ — произвольные постоянные.

5. РЕДУКЦИИ С ОБОБЩЁННЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ, ПРИВОДЯЩИЕ К ЛИНЕЙНОМУ УРАВНЕНИЮ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

1°. Уравнение (1) допускает решения с обобщённым разделением переменных вида

$$u = \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2 + dy + (ac - b^2)t + U(x,t), \tag{34}$$

где c, b, c, d — произвольные постоянные, функция $U = U(x,t)$ описывается линейным уравнением теплопроводности

$$U_t = cU_{xx}. \tag{35}$$

2°. Приведём несколько простых решений уравнения (35), которые содержат экспоненциальные и тригонометрические функции:

$$U = C_1\exp\{c\mu^2 t \pm \mu x\} + C_2, \quad U = C_1\exp\{-c\mu^2 t\}\cos(\mu x) + C_2,$$
$$U = C_1\exp\{-c\mu^2 t\}\sin(\mu x) + C_2, \quad U = C_1\exp\{-\mu x\}\cos(\mu x - 2c\mu^2 t) + C_2,$$
$$U = C_1\exp\{-\mu x\}\sin(\mu x - 2c\mu^2 t) + C_2,$$

где C_1, C_2, μ — произвольные постоянные.

3°. Решение (34) является частным случаем решения с обобщённым разделением переменных, квадратичного относительно пространственной переменной y, вида

$$u = y^2 f(x,t) + y g(x,t) + h(x,t),$$

где функции $f = f(x,t)$, $g = g(x,t)$, $h = h(x,t)$ описываются системой уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными:

$$f_t = 2ff_{xx} - 4f_x^2, \quad g_t = 2fg_{xx} - 4f_x g_x, \quad h_t = 2fh_{xx} - g_x^2. \tag{36}$$

Здесь первое уравнение для f нелинейно и не зависит от других уравнений, а два последних уравнения линейны относительно искомых функций g и h и имеют очевидное решение $g = C_1$, $h = C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

6. РЕДУКЦИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В ПОЛЯРНЫХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

1°. В полярных координатах r, φ, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, исходное уравнение принимает вид

$$u_t = r^{-2}u_{rr}(u_{\varphi\varphi} + ru_r) - [(r^{-1}u_\varphi)_r]^2, \tag{37}$$

который будет использован далее для построения точных решений рассматриваемого уравнения.

2°. В эллиптических координатах r, φ, где $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$ (a и b — положительные константы), уравнение (1) записывается как

$$u_t = (ab)^{-2}\big\{r^{-2}u_{rr}(u_{\varphi\varphi} + ru_r) - [(r^{-1}u_\varphi)_r]^2\big\}.$$

С помощью элементарной замены $t = (ab)^2\tau$ оно сводится к уравнению (37).

3°. Уравнение (37) допускает не зависящие от угловой переменной радиально-симметричные решения, которые описываются двумерным уравнением

$$u_t = r^{-1}u_r u_{rr}. \tag{38}$$

4°. Уравнение (38) имеет точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u = \frac{1}{2}C_1C_2^2 t + C_2\int\sqrt{C_1r^2 + C_3}\,dr + C_4,$$

где C_i $(i = \overline{1,4})$ — произвольные постоянные (при различных знаках константы C_1 интеграл в правой части выражается через разные элементарные функции).

5°. Уравнение (38) допускает автомодельное решение

$$u = t^{-4\beta-1}F(z), \qquad z = rt^\beta,$$

где β — произвольная постоянная, а функция $F=F(z)$ описывается ОДУ

$$-(4\beta+1)F+\beta zF'_z=z^{-1}F'_zF''_{zz}. \tag{39}$$

Общим решением уравнения (39) при $\beta=-1/4$ является многочлен

$$F=-\frac{1}{48}z^4+C_1z+C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

6°. Уравнение (37) имеет также точные решения с разделением переменных вида

$$u=r^4v(\varphi,t),$$

где функция $v=v(\varphi,t)$ описывается двумерным уравнением

$$v_t=12v(v_{\varphi\varphi}+4v)-9v_\varphi^2. \tag{40}$$

7°. Так как уравнение (40) не зависит явно от независимых переменных, то оно имеет решение типа бегущей волны

$$v=v(Z),\qquad Z=\varphi-\lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, функция $v=v(Z)$ описывается автономным ОДУ

$$12v(v''_{ZZ}+4v)-9(v'_Z)^2+\lambda v'_Z=0.$$

8°. Уравнение (40) допускает также решение с простым разделением переменных вида

$$v=(t+C)^{-1}V(\varphi),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $V=V(\varphi)$ описывается автономным ОДУ

$$12V(V''_{\varphi\varphi}+4V)-9(V'_\varphi)^2+V=0.$$

9°. Уравнение (37), записанное в полярных координатах r и φ, допускает точные решения с неполным разделением переменных вида

$$u=\frac{1}{t+C}W(r,\varphi),$$

где функция W описывается двумерным уравнением

$$r^{-2}W_{rr}(W_{\varphi\varphi}+rW_r)-[(r^{-1}W_\varphi)_r]^2+W=0.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано нелинейное уравнение в частных производных с тремя независимыми переменными вида $u_t=u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2$, которое описывает локальные нестационарные движения плазмы в электронной магнитной гидродинамике. Рассмотрены инвариантные многопараметрические преобразования, сохраняющие вид этого уравнения. Описаны двумерные и одномерные редукции, приводящие его к более простым уравнениям с частными производными с двумя независимыми переменными (в том числе к стационарным уравнениям типа Монжа–Ампера и линейным или нелинейным нестационарным уравнениям теплопроводности) или обыкновенным дифференциальным уравнениям. Получен ряд решений с обобщённым разделением переменных, которые выражаются в элементарных функциях, а также некоторые другие точные решения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ 124012500440-9).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smirnov, V.V. “Phonons” in two-dimensional vortex lattices / V.V. Smirnov, K.V. Chukbar // J. Experiment. Theor. Phys. — 2001. — V. 93, № 1. — P. 126–135.
2. Zaburdaev, V.Yu. Nonlinear dynamics of electron vortex lattices / V.Yu Zaburdaev, V.V. Smirnov, K.V. Chukbar // Plasma Physics Reports. — 2014. — V. 30, № 3. — P. 214–217.
3. Крылов Н.В. Последовательности выпуклых функций и оценки максимума решения параболического уравнения / Н.В. Крылов // Сиб. мат. журн. — 1976. — Т. 17, № 2. — С. 290–303.
4. Chen, L. Convex-monotone functions and generalized solution of parabolic Monge–Ampère equation / L. Chen, G. Wang, S. Lian // J. Differ. Equat. — 2002. — V. 186, № 2. — P. 558–571.
5. Xiong, J. On Jorgens, Calabi, and Pogorelov type theorem and isolated singularities of parabolic Monge–Ampère equations / J. Xiong, J. Bao // J. Differ. Equat. — 2011. — V. 250, № 1. — P. 367–385.
6. Tang, L. Regularity results on the parabolic Monge–Ampère equation with VMO type data / L. Tang // J. Differ. Equat. — 2013. — V. 255, № 7. — P. 1646–1656.
7. Dai, L. Exterior problems for a parabolic Monge–Ampère equation / L. Dai // Nonlin. Anal. Theory, Methods & Appl. — 2014. — V. 100. — P. 99–110.
8. Tang, L. Boundary regularity on the parabolic Monge–Ampère equation / L. Tang // J. Differ. Equat. — 2015. — V. 259. — P. 6399–6431.
9. Погорелов, А.В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей / А.В. Погорелов. — М. : Наука, 1969. — 760 с.
10. Polyanin, A.D. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations / A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev. — 2nd ed. — Boca Raton : CRC Press, 2012. — 1876 p.
11. Хабиров, С.В. Неизэнтропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы неоднородного уравнения Монжа–Ампера / С.В. Хабиров // Мат. сб. — 1990. — Т. 181, № 12. — С. 1607–1622.
12. Sulman, M.M. An efficient approach for the numerical solution of the Monge–Ampère equation / M.M. Sulman, J.F. Williams, R.D. Russell // Appl. Numer. Math. — 2011. — V. 61, № 3. — P. 298–307.
13. Feng, X. Nonstandard local discontinuous Galerkin methods for fully nonlinear second order elliptic and parabolic equations in high dimensions / X. Feng, T. Lewis // J. Scient. Comput. — 2018. — V. 77, № 3. — P. 1534–1565.
14. Dubinov, A.E. New exact solutions of the equation of non-linear dynamics of a lattice of electronic vortices in plasma in the framework of electron magnetohydrodynamics / A.E. Dubinov, I.N. Kitayev // Magnetohydrodynamics. — 2020. — V. 56, № 4. — P. 369–375.
15. Рахмелевич, И.В. Неавтономное эволюционное уравнение типа Монжа–Ампера с двумя пространственными переменными / И.В. Рахмелевич // Изв. вузов. Математика. — 2023. — № 2. — С. 66–80.
16. Polyanin, A.D. Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs / A.D. Polyanin, A.I. Zhurov. — Boca Raton ; London : CRC Press, 2022. — 401 p.
17. Овсянников, Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 400 с.
18. Косов, А.А. Метод редукции и новые точные решения многомерного уравнения нелинейной теплопроводности / А.А. Косов, Э.И. Семенов // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 2. — С. 185–191.

19. Косов, А.А. О точных решениях обобщённого уравнения Ричардса со степенными нелинейностями / А.А. Косов, Э.И. Семенов // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 9. — С. 1153–1163.
20. Аксенов, А.В. Обзор методов построения точных решений уравнений математической физики, основанных на использовании более простых решений / А.В. Аксенов, А.Д. Полянин // Теор. мат. физика. — 2022. — Т. 211, № 2. — С. 567–594.

GROUP ANALYSES, REDUCTIONS AND EXACT SOLUTIONS OF MONGE–AMPÈRE EQUATION OF MAGNETIC HYDRODYNAMICS

A. V. Aksenov[1], A. D. Polyanin[2]

[1]*Lomonosov Moscow State University, Russia*
[2]*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*
e-mail: [1]aksenov@mech.math.msu.su, [2]polyanin@ipmnet.ru

We study the Monge–Ampère equation with three independent variables which occurs in electron magnetohydrodynamics. A group analysis of this strongly nonlinear partial derivative equation is carried out. An eleven-parameter transformation preserving the form of the equation is found. A formula is obtained that makes it possible to construct multiparametric families of solutions based on simpler solutions. Two-dimensional reductions leading to simpler partial differential equations with two independent variables. One-dimensional reductions are described, which make it possible to obtain self-similar and other invariant solutions that satisfy ordinary differential equations. Exact solutions with additive, multiplicative and generalized separation of variables are constructed, many of which admit representation in elementary functions. The obtained results and exact solutions can be used to evaluate the accuracy and analyze the adequacy of numerical methods for solving initial boundary value problems described by strongly nonlinear partial differential equations.

Keywords: Monge–Ampère equation, group analysis, reduction, exact solution.

FUNDING

The work was carried out on the topic of the state assignment (state registration no. 124012500440-9).

REFERENCES

1. Smirnov, V.V. and Chukbar, K.V., “Phonons” in two-dimensional vortex lattices, *J. Experiment. Theor. Phys.*, 2001, vol. 93, no. 1, pp. 126–135.
2. Zaburdaev, V.Yu., Smirnov, V.V., and Chukbar, K.V., Nonlinear dynamics of electron vortex lattices, *Plasma Physics Reports*, 2014, vol. 30, no. 3, pp. 214–217.
3. Krylov, N.V., Sequences of convex functions, and estimates of the maximum of the solution of a parabolic equation, *Siberian Math. J.*, 1976, vol. 17, no. 2, pp. 226–236.
4. Chen, L., Wang, G., and Lian, S., Convex-monotone functions and generalized solution of parabolic Monge–Ampère equation, *J. Differ. Equat.*, 2002, vol. 186, no. 2, pp. 558–571.
5. Xiong, J. and Bao, J., On Jorgens, Calabi, and Pogorelov type theorem and isolated singularities of parabolic Monge–Ampère equations, *J. Differ. Equat.*, 2011, vol. 250, no. 1, pp. 367–385.
6. Tang, L., Regularity results on the parabolic Monge–Ampère equation with VMO type data, *J. Differ. Equat.*, 2013, vol. 255, no. 7, pp. 1646–1656.
7. Dai, L., Exterior problems for a parabolic Monge–Ampère equation, *Nonlin. Anal. Theory, Methods & Appl.*, 2014, vol. 100, pp. 99–110.
8. Tang, L., Boundary regularity on the parabolic Monge–Ampère equation, *J. Differ. Equat.*, 2015, vol. 259, pp. 6399–6431.
9. Pogorelov, A.V., *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces*, Amer. Math. Soc., 1973.
10. Polyanin, A.D. and Zaitsev, V.F., Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed., Boca Raton: CRC Press, 2012.

11. Khabirov, S.V., Nonisentropic one-dimensional gas motions constructed by means of the contact group of the nonhomogeneous Monge–Ampère equation, *Math. USSR-Sb.*, 1992, vol. 71, no. 2, pp. 447–462.
12. Sulman, M.M., Williams, J.F., and Russell, R.D., An efficient approach for the numerical solution of the Monge–Ampère equation, *Appl. Numer. Math.*, 2011, vol. 61, no. 3, pp. 298–307.
13. Feng, X. and Lewis, T., Nonstandard local discontinuous Galerkin methods for fully nonlinear second order elliptic and parabolic equations in high dimensions, *J. Scient. Comput.*, 2018, vol. 77, no. 3, pp. 1534–1565.
14. Dubinov, A.E. and Kitayev, I.N., New exact solutions of the equation of non-linear dynamics of a lattice of electronic vortices in plasma in the framework of electron magnetohydrodynamics, *Magnetohydrodynamics*, 2020, vol. 56, no. 4, pp. 369–375.
15. Rakhmelevich, I.V., Non-autonomous evolutionary equation of Monge–Ampère type with two space variables, *Russ. Math.*, 2023, vol. 67, no. 2, pp. 52–64.
16. Polyanin, A.D. and Zhurov, A.I., *Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs*, Boca Raton–London: CRC Press, 2022.
17. Ovsiannikov, L.V., *Group Analysis of Differential Equations*, New York: Academic Press, 1982.
18. Kosov, A.A. and Semenov, E.I., Reduction method and new exact solutions of the multidimensional nonlinear heat equation, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 2, pp. 187–194.
19. Kosov, A.A. and Semenov, E.I., Exact solutions of the generalized Richards equation with power-law nonlinearities, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 9, pp. 1119–1129.
20. Aksenov, A.V. and Polyanin, A.D., Review of methods for constructing exact solutions of equations of mathematical physics based on simpler solutions, *Theor. Math. Phys.*, 2022, vol. 211, no. 2, pp. 567–594.