

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925

УТОЧНЁННОЕ ГЛОБАЛЬНОЕ КОЛЬЦО
ПУАНКАРЕ–БЕНДИКСОНА С ПРЕДЕЛЬНЫМ ЦИКЛОМ
СИСТЕМЫ РЭЛЕЯ© Ю. Ли¹, А. А. Гринь², А. В. Кузьмич³¹Ланьчжоуский городской университет, Китай^{2,3}Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Беларусьe-mail: ¹li_liyong120@163.com, ²grin@grsu.by, ³kuzmich_av@grsu.by

Поступила в редакцию 21.02.2024 г., после доработки 21.02.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Для системы Рэля разработаны новые способы построения двух функций Дюлака–Черкаса, с помощью которых находится лучшая в зависимости от параметра $\lambda > 0$ внутренняя граница кольца Пуанкаре–Бендиксона $A(\lambda)$. Предложена процедура непосредственного нахождения многочлена, множество нулевого уровня которого содержит трансверсальный овал, используемый в качестве внешней границы $A(\lambda)$. Указан промежуток для λ , при котором лучшей внешней границей кольца $A(\lambda)$ является замкнутый контур, составленный из двух дуг построенного овала и двух дуг незамкнутых кривых множества нулевого уровня одной из функций Дюлака–Черкаса. Таким образом, представлено уточнённое глобальное кольцо Пуанкаре–Бендиксона для предельного цикла системы Рэля.

Ключевые слова: кольцо Пуанкаре–Бендиксона, система Рэля, предельный цикл, функция Дюлака–Черкаса, топологически эквивалентные системы.

DOI: 10.31857/S0374064124060023, EDN: KWOKWN

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предельные циклы играют центральную роль при описании фазового портрета всех траекторий автономных систем

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (1)$$

а также при моделировании с их помощью автоколебаний в различных областях естествознания. Существование предельных циклов можно установить как с помощью теории бифуркаций, так и применяя метод Дюлака или теорему Пуанкаре–Бендиксона [1, с. 113; 2, с. 405; 3, с. 244; 4, с. 64]. Общий подход к доказательству существования хотя бы одного предельного цикла системы (1) с помощью теоремы Пуанкаре–Бендиксона состоит в построении на фазовой плоскости кольца (кольцеобразной области) A , не содержащего состояний равновесия, границы которого представляют собой простые замкнутые кривые (далее называемые овалами), такие что в любой их точке касательный вектор и вектор поля X системы не коллинеарны. Их принято называть *трансверсальными кривыми* [3, с. 212; 5, с. 172] или *кривыми без контакта* (прикосновения) [1, с. 40; 2, с. 406].

Ключевая проблема в этом подходе заключается в отсутствии общей процедуры построения трансверсальных овалов, так как их вид существенно зависит от рассматриваемой системы (1). Ранее кольца Пуанкаре–Бендиксона были найдены специально для систем типа Лъенара, в которых трансверсальные овалы состоят из кусочно-гладких кривых, построен-

ных сложным образом (см., например, [3, с. 255; 4, с. 129; 5, с. 233; 6; 7]). В работах [8, 9], посвящённых построению гладких трансверсальных овалов как границ кольца Пуанкаре–Бендиксона для полиномиальных систем (1), каждый такой овал строится с помощью аппроксимации траекторий системы (1). В статье [8] для построения внутренней и внешней границ A требуется аппроксимация двух разных траекторий; в [9] нужна аппроксимация только одной траектории, но предполагается, что эта траектория является предельным циклом.

В работе [10] для системы Ван дер Поля

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x - \lambda(x^2 - 1)y \quad (2)$$

и линейно топологически эквивалентных ей систем был разработан чисто аналитический подход к построению трансверсальных овалов, зависящих от параметра λ и образующих глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре–Бендиксона $A(\lambda)$, который не требует аппроксимации какой-либо траектории. Особенности этого подхода заключаются в следующем: внутренняя и внешняя границы кольца Пуанкаре–Бендиксона состоят из алгебраических замкнутых кривых на фазовой плоскости, обладающих тем свойством, что любая траектория системы (2) сразу после попадания в некоторый момент времени на границу кольца A входит в него либо при увеличении, либо при уменьшении времени t . В этом случае они представляют собой трансверсальные кривые в более общем смысле, чем было сказано ранее. Таким свойством трансверсальности обладают кривые из множества нулевого уровня функции Дюлака–Черкаса [11], способы построения которых уже разработаны для некоторых классов системы (1) [12]. Поэтому в работе [10] внутренняя граница кольца A состоит из овала множества нулевого уровня функции Дюлака–Черкаса для системы Ван дер Поля. Это свойство означает, что система Ван дер Поля имеет не более одного предельного цикла $\Gamma(\lambda)$, и если $\Gamma(\lambda)$ существует, то он является грубым. Также в [10] предложена процедура нахождения многочлена, множество нулевого уровня которого содержит трансверсальный овал, используемый в качестве внешней границы. Полученное таким образом кольцо A представляет собой глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре–Бендиксона, поскольку при его построении не накладываются никакие ограничения на значения параметра λ и локализацию содержащегося в нём предельного цикла, а его границы являются алгебраическими кривыми.

Затем в работе [13] для системы (2) был предложен способ построения второй полиномиальной функции Дюлака–Черкаса, зависящей от параметра λ , множество нулевого уровня которой состоит из овала и двух незамкнутых кривых. Используя полученные трансверсальные кривые вместе с результатами предыдущей статьи [10], авторы построили в фазовой плоскости системы (2) более узкое глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре–Бендиксона для предельного цикла.

Далее в работе [14] подход из статей [10, 13] частично был применён к системе Рэлея [1, с. 109; 15]

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x + \lambda y - \lambda \frac{y^3}{3}, \quad (3)$$

что позволило найти глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре–Бендиксона $A(\lambda)$ для её предельного цикла. Здесь был предложен способ построения функции Дюлака–Черкаса, зависящей от параметра λ , множество нулевого уровня которой содержит овал, используемый в качестве внутренней границы. Овал же внешней границы построен с помощью внешнего овала для системы Ван дер Поля из работы [10], учитывая топологическую эквивалентность систем (2) и (3).

В настоящей работе, развивая результаты статей [10, 13, 14], предложены новые способы построения трансверсальных кривых, ограничивающих кольцо Пуанкаре–Бендиксона

$A(\lambda)$ для системы Рэля (3). Построенные границы составлены из алгебраических кривых, имеющих конечное число точек, в которых траектории системы могут их касаться. Затем, используя полученные трансверсальные кривые вместе с результатами статьи [14], находится уточнённое, т.е. более узкое на фазовой плоскости по сравнению с найденным в [14], глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре–Бендиксона без ограничений на значения параметра λ и локализацию содержащегося в нём предельного цикла системы Рэля (3).

Статья структурирована следующим образом: в п. 2 содержатся необходимые в дальнейшем сведения о системе Рэля и функции Дюлака–Черкаса; в п. 3 приводятся способы построения двух функций Дюлака–Черкаса, с помощью которых в п. 4 находится наилучшая в зависимости от параметра $\lambda > 0$ внутренняя граница кольца Пуанкаре–Бендиксона $A(\lambda)$; в п. 5 для системы Рэля описывается способ построения внешней границы кольца $A(\lambda)$ в виде алгебраического овала.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМЕ РЭЛЕЯ И ФУНКЦИИ ДЮЛАКА–ЧЕРКАСА

Британский физик и лауреат Нобелевской премии Дж.В. Струтт, более известный как лорд Рэлей, в своей монографии [16] использовал линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + n^2x = 0$$

для описания звуковых колебаний кларнета. Нелинейная модификация этого уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \left[\frac{1}{3} \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 - 1 \right] \frac{dx}{dt} + x = 0,$$

где λ — вещественный параметр, известна как *уравнение Рэля*. Соответствующая ему система (3) инвариантна относительно преобразования $t \rightarrow -t$, $y \rightarrow -y$, $\lambda \rightarrow -\lambda$ и с помощью различных методов изучалась во многих работах [1, 17–22], где, в частности, доказано существование и единственность предельного цикла. Однако границы областей локализации цикла на фазовой плоскости в таких работах указываются приближённо или только для значений параметра, близких к бифуркационному. Поэтому задача установления наиболее узкой двусвязной области локализации предельного цикла с точными границами является по-прежнему актуальной для системы Рэля (3).

Наш подход для построения внутренней границы кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы (3) основан на использовании функции Дюлака–Черкаса, поэтому напомним основные факты о ней, необходимые для такого построения.

Рассмотрим дифференциальную систему на плоскости

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, \lambda), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, \lambda) \quad (4)$$

в предположении, что выполняется следующее

Условие А. Пусть G — открытое подмножество множества $\mathbb{R}^2$, Λ — некоторый открытый интервал, а $P, Q \in C_{(x,y)}^1 \stackrel{0}{\lambda}(G \times \Lambda, \mathbb{R})$.

Обозначим через $X(\lambda)$ векторное поле системы (4).

Определение 1. Пусть условие А верно. Функция $B \in C_{(x,y)}^1 \stackrel{0}{\lambda}(G \times \Lambda, \mathbb{R})$ называется *функцией Дюлака* системы (4) в области G для $\lambda \in \Lambda$, если выражение

$$\operatorname{div}(BX) \equiv \frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} \equiv (\operatorname{grad} B, X) + B \operatorname{div} X$$

не меняет знак в области G и может принимать значение нуль лишь на множестве $N_\lambda \subset G$ меры нуль для $\lambda \in \Lambda$.

Класс функций Дюлака был обобщён Л.А. Черкасом в работе [11]. Соответствующая обобщённая функция Дюлака, называемая сегодня функцией Дюлака–Черкаса, определяется следующим образом.

Определение 2. Пусть условие А верно. Функция $\Psi \in C^1_{(x,y)}{}^0(G \times \Lambda, \mathbb{R})$ называется *функцией Дюлака–Черкаса* системы (4) в области G для $\lambda \in \Lambda$, если существует действительное число $\kappa \neq 0$ такое, что

$$\Phi := (\text{grad } \Psi, X) + \kappa \Psi \text{div } X > 0 \quad (< 0) \quad \text{в } G \quad \text{для } \lambda \in \Lambda. \quad (5)$$

Замечание 1. Условие (5) может быть ослаблено, если предположить, что Φ может принимать нулевое значение в области G на множестве N_λ меры нуль, а также что ни один овал этого множества не является предельным циклом.

Замечание 2. Если $\kappa = 1$, то Ψ является функцией Дюлака.

Введём подмножество W_λ области G как множество нулевого уровня функции Дюлака–Черкаса

$$W_\lambda := \{(x, y) \in G : \Psi(x, y, \lambda) = 0\}.$$

Из определения 1 сразу вытекает

Лемма 1. Пусть условие А верно и Ψ — функция Дюлака–Черкаса для системы (4) в G для $\lambda \in \Lambda$. Тогда любой овал W_λ , имеющий только конечное число точек, в которых $(\text{grad } \Psi, X)$ обращается в нуль, является трансверсальным овалом для траекторий системы (4) и может использоваться как граница кольца Пуанкаре–Бендиксона.

Следующая теорема является частным случаем более общего результата, установленного в статье [23].

Теорема 1. Пусть условие А верно и Ψ — функция Дюлака–Черкаса системы (4) в односвязной области G для $\lambda \in \Lambda$ такая, что W_λ содержит только один овал I_λ в G . Тогда при $\kappa < 0$ система (4) имеет не более одного предельного цикла в области G при $\lambda \in \Lambda$, и если он существует, то окружает I_λ и является грубым.

В условиях теоремы 1 овал I_λ удобно использовать в качестве внутренней границы кольца Пуанкаре–Бендиксона системы (4).

3. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ДЮЛАКА–ЧЕРКАСА ДЛЯ СИСТЕМЫ РЭЛЕЯ (3)

Теперь представим три способа построения функции Дюлака–Черкаса во всей фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$ системы Рэля (3) при всех значениях $\lambda > 0$.

1 способ. Будем искать функцию Дюлака–Черкаса в виде

$$\Psi(x, y, \lambda) := \Psi_0(y, \lambda) + \Psi_1(y, \lambda)x + \Psi_2(y, \lambda)x^2 \quad (6)$$

в предположении, что для всех $\lambda > 0$ функция Ψ_2 не обращается тождественно в нуль.

Используя (6), получаем вспомогательную функцию Φ из (5) в виде

$$\Phi(x, y, \lambda, \kappa) = \sum_{k=0}^3 \Phi_k(y, \lambda, \kappa)x^k, \quad (7)$$

где функции Φ_k определяются как

$$\Phi_0 := -\Psi_1 y + \Psi'_0 \lambda (y - y^3/3) + \kappa \lambda \Psi_0 (1 - y^2), \quad (8)$$

$$\Phi_1 := -2\Psi_2 y + \Psi'_0 + \Psi'_1 \lambda (y - y^3/3) + \kappa \lambda \Psi_1 (1 - y^2), \quad (9)$$

$$\Phi_2 := \Psi'_1 + \Psi'_2 \lambda (y - y^3/3) + \kappa \lambda \Psi_2 (1 - y^2), \quad (10)$$

$$\Phi_3 := \Psi'_2, \quad (11)$$

здесь штрих означает производную по переменной y . Один из способов гарантировать знакоопределённость функции Φ в $\mathbb{R}^2$ для $\lambda > 0$ заключается в требовании, чтобы функции Φ_k , $k = \overline{1, 3}$, были тождественно равны нулю, а Φ_0 была знакоопределённой. Применяя этот подход, получим из (11) линейное дифференциальное уравнение

$$\Psi'_2 = 0 \quad (12)$$

с решением

$$\Psi_2(y, \lambda, \kappa) \equiv c_2 \neq 0. \quad (13)$$

Подставив (12) и (13) в (10), получим уравнение

$$\Psi'_1 + \kappa c_2 \lambda (1 - y^2) = 0, \quad (14)$$

решение которого имеет вид

$$\Psi_1(y, \lambda) = -\kappa c_2 \lambda (y - y^3/3) + c_1. \quad (15)$$

Подставляя (13)–(15) в (9), будем иметь

$$\Psi'_0 = 2c_2 y + (1 + \kappa) \kappa c_2 \lambda^2 (1 - y^2) (y - y^3/3) - \kappa c_1 \lambda (1 - y^2). \quad (16)$$

Выбирая значения

$$\kappa = -1, \quad c_1 = 0, \quad (17)$$

из (15) находим

$$\Psi_1(y, \lambda) = c_2 \lambda (y - y^3/3), \quad (18)$$

а дифференциальное уравнение (16) запишем в виде

$$\Psi'_0 = 2c_2 y, \quad (19)$$

его решение определим по формуле

$$\Psi_0(y, \lambda) = c_2 y^2 + c_0. \quad (20)$$

Используя (17)–(20), из (8) получаем

$$\Phi_0(y, \lambda, -1) = \frac{2}{3} \lambda c_2 \left(y^4 + \frac{3c_0}{2c_2} y^2 - \frac{3c_0}{2c_2} \right).$$

Теперь необходимо подобрать c_0 и c_2 так, чтобы функция $\Phi_0(y, \lambda, -1)$ была знакоопределённой и соответствующая функция Дюлака–Черкаса Ψ обладала следующим свойством: её множество нулевого уровня W_λ содержит овал, окружающий начало координат.

Выбрав $c_0 = -8c_2/3$, которое согласно (13) отлично от нуля, получим функцию $\Phi_0(y, \lambda, -1)$ в виде

$$\Phi_0(y, \lambda, -1) = \frac{2}{3} \lambda c_2 (y^2 - 2)^2,$$

она не меняет знак при $\lambda > 0$ и при всех y , а принимает нулевое значение лишь при $y = \pm\sqrt{2}$. Таким образом, справедлива

Лемма 2. *Полином*

$$\Psi(x, y, \lambda) := c_2 (x^2 + y^2 - 8/3 + \lambda x (y - y^3/3)) \quad (21)$$

является функцией Дюлака–Черкаса для системы (3) в $\mathbb{R}^2$ при $\lambda > 0$.

2 способ. Будем искать функцию Дюлака–Черкаса в виде

$$\Psi(x, y, \lambda) := \Psi_0(y, \lambda) + \Psi_1(y, \lambda)x + \Psi_2(y, \lambda)x^2,$$

где предполагаем, что для всех $\lambda > 0$ функция Ψ_2 не обращается тождественно в нуль, и выполняем все шаги с (7) по (16). Но далее вместо значений (17) выберем

$$\kappa = -2, \quad c_1 = 0, \quad (22)$$

тогда из (15) получим

$$\Psi_1(y, \lambda) = 2c_2\lambda(y - y^3/3). \quad (23)$$

Дифференциальное уравнение (16) запишется в виде

$$\Psi'_0 = 2c_2y + 2c_2\lambda^2(1 - y^2)(y - y^3/3), \quad (24)$$

а его решение определяется по формуле

$$\Psi_0(y, \lambda) = c_2(y^2 + \lambda^2(y^2 - 2y^4/3 + 1/9y^6)) + c_0. \quad (25)$$

Используя (22)–(25), из (8) находим

$$\Phi_0(y, \lambda, -2) = -2\lambda c_2 \left(\left(1 - \frac{c_0}{c_2} \right) y^2 - y^4 + \frac{c_0}{c_2} \right).$$

Добиться знакоопределённости функции $\Phi_0(y, \lambda, -2)$, а также существования овала, окружающего начало координат и содержащегося в множестве нулевого уровня W_λ соответствующей функции Дюлака–Черкаса Ψ , можно за счёт выбора $c_0 = -c_2$. Тогда имеем функцию

$$\Phi_0(y, \lambda, -2) = 2\lambda c_2(y^2 - 1)^2, \quad (26)$$

она не меняет знак при $\lambda > 0$ и при всех y , а принимает нулевое значение лишь при $y = \pm 1$. Таким образом, имеет место

Лемма 3. *Полином*

$$\Psi(x, y, \lambda) := c_2((x + \lambda(y - y^3/3))^2 + y^2 - 1) \quad (27)$$

является функцией Дюлака–Черкаса для системы (3) в $\mathbb{R}^2$ при $\lambda > 0$.

3 способ. Теперь будем искать функцию Дюлака–Черкаса в виде

$$\Psi(x, y, \lambda) := \Psi_0(y, \lambda) + \Psi_1(y, \lambda)(x + \lambda(y - y^3/3)) + \Psi_2(y, \lambda)(x + \lambda(y - y^3/3))^2, \quad (28)$$

по-прежнему предполагая, что для всех $\lambda > 0$ функция Ψ_2 не обращается тождественно в нуль.

Используя (28), получаем вспомогательную функцию Φ из (5):

$$\Phi(x, y, \lambda, \kappa) = \sum_{k=0}^3 \Phi_k(y, \lambda, \kappa)(x + \lambda(y - y^3/3))^k,$$

где функции Φ_k имеют вид

$$\Phi_0 := -\Psi_1 y + \kappa \lambda \Psi_0(1 - y^2), \quad (29)$$

$$\Phi_1 := -2\Psi_2 y + \Psi'_0 + \kappa \lambda \Psi_1(1 - y^2) + \lambda \Psi_1(1 - y^2), \quad (30)$$

$$\Phi_2 := \Psi'_1 + \kappa \lambda \Psi_2(1 - y^2) + 2\lambda \Psi_2(1 - y^2), \quad (31)$$

$$\Phi_3 := \Psi'_2, \quad (32)$$

здесь штрих снова означает производную по переменной y . Как и ранее, для знакоопределённости функции Φ в $\mathbb{R}^2$ при $\lambda > 0$ будем требовать, чтобы функции Φ_k , $k = \overline{1, 3}$, были тождественно равны нулю, а Φ_0 была знакоопределённой. Тогда из (32) получим линейное дифференциальное уравнение

$$\Psi'_2 = 0$$

с решением

$$\Psi_2(y, \lambda, \kappa) \equiv c_2 \neq 0. \quad (33)$$

Подставив (33) в (31), получим уравнение

$$\Psi'_1 + \kappa c_2 \lambda (1 - y^2) + 2c_2 \lambda (1 - y^2) = 0. \quad (34)$$

Выбирая

$$\kappa = -2, \quad (35)$$

найдем решение уравнения (34):

$$\Psi_1(y, \lambda) = c_1. \quad (36)$$

Подставляя (33), (35) и (36) в (30), будем иметь

$$\Psi'_0 = 2c_2 y - c_1 \lambda (1 - y^2). \quad (37)$$

Выбирая $c_1 = 0$, из (36) получаем

$$\Psi_1(y, \lambda) = 0, \quad (38)$$

и дифференциальное уравнение (37) записывается в виде

$$\Psi'_0 = 2c_2 y,$$

а его решение определяется формулой

$$\Psi_0(y, \lambda) = c_2 y^2 + c_0. \quad (39)$$

Используя (35), (38) и (39), из (29) имеем

$$\Phi_0(y, \lambda, -2) = -2\lambda(c_2 y^2 + c_0)(1 - y^2).$$

Выбрав $c_0 = -c_2$, получим знакоопределённую функцию $\Phi_0(y, \lambda, -2)$ вида (26) и функцию Дюлака–Черкаса вида (27).

Отметим, что только первый из предложенных способов уже применялся в работе [1].

4. ПОСТРОЕНИЕ ВНУТРЕННЕЙ ГРАНИЦЫ КОЛЬЦА ПУАНКАРЕ–БЕНДИКСОНА СИСТЕМЫ (3)

Рассмотрим множества W_λ и $\widetilde{W}_\lambda$ функций Дюлака–Черкаса Ψ , представленных формулами (21) и (27) соответственно. Множество W_λ функций Дюлака–Черкаса Ψ из (21) определяется равенством

$$W_\lambda := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 - 8/3 + \lambda x(y - y^3/3) = 0\} \quad (40)$$

и представляет собой окружность $x^2 + y^2 = 8/3$ при $\lambda = 0$. Из (40) вытекает, что для всех $\lambda > 0$ множество W_λ симметрично относительно начала координат и не пересекается с прямыми $y = \pm\sqrt{3}$. Обозначая через $S_{2\sqrt{3}}$ полосу в фазовой плоскости, ограниченную этими прямыми, в работе [14] получен следующий результат.

Лемма 4. Множество W_λ , определённое в (40), состоит в $\mathbb{R}^2$ при $\lambda > 0$ из трёх различных компонент: овал I_λ , окружающий начало координат и расположенный в полосе $S_{2\sqrt{3}}$; неограниченная ветвь W_λ^1 , расположенная в первом квадранте в области $y > \sqrt{3}$; симметричная ей ветвь W_λ^3 в третьем квадранте в области $y < -\sqrt{3}$.

Поэтому в [14] овал I_λ представлял собой внутреннюю границу кольца Пуанкаре–Бендиксона системы (3) при $\lambda > 0$.

Теперь проанализируем множество

$$\widetilde{W}_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + \lambda(y - y^3/3))^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

второй функции Дюлака–Черкаса. Для всех $\lambda > 0$ это множество симметрично относительно начала координат и состоит из единственной компоненты в виде овала, окружающего начало координат и расположенного в полосе между прямыми $y = \pm 1$. Поэтому овал $\widetilde{W}_\lambda$ также может использоваться как внутренняя граница кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы Рэлея. При $\lambda = 0$ этот овал представляет собой окружность $x^2 + y^2 = 1$, очевидно, что при достаточно малых значениях λ овал I_λ окружает овал $\widetilde{W}_\lambda$ и является лучшей внутренней границей кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы (3), чем $\widetilde{W}_\lambda$. На рис. 1 показано взаимное расположение овалов I_λ , $\widetilde{W}_\lambda$ и предельного цикла LC системы (3), а также кривых W_λ^1 и W_λ^3 при $\lambda = 1$. При возрастании λ у овалов I_λ и $\widetilde{W}_\lambda$ появляются общие точки. Задача их нахождения эквивалентна существованию корней уравнения $f(y) = -5/(3\lambda)$ при $y \in (0, 1)$, где $f(y) = (y - y^3/3)\sqrt{1 - y^2}$. Поскольку функция f принимает максимум при $y \in (0, 1)$ в точке $y_m = \sqrt{(9 - \sqrt{33})/8}$, получаем, что овалы I_λ и $\widetilde{W}_\lambda$ касаются друг друга при $\lambda = 5/(3f(y_m)) = \lambda_1 \approx 3.925$ в двух точках, симметричных друг другу относительно начала координат. При $\lambda > \lambda_1$ эти овалы пересекаются в четырех точках A_1, A_2 и B_1, B_2 . Таким образом, при $0 < \lambda \leq \lambda_1$ овал I_λ является лучшей внутренней границей кольца Пуанкаре–Бендиксона, чем овал $\widetilde{W}_\lambda$. При $\lambda > \lambda_1$ лучшей внутренней границей кольца Пуанкаре–Бендиксона будет замкнутый контур $A_1A_2B_1B_2$, составленный из дуг A_1A_2, B_1B_2 овала $\widetilde{W}_\lambda$ и дуг A_2B_1, B_2A_1 овала I_λ . На рис. 2 показано взаимное расположение контура $A_1A_2B_1B_2$ и предельного цикла LC системы (3) при $\lambda = 10$.

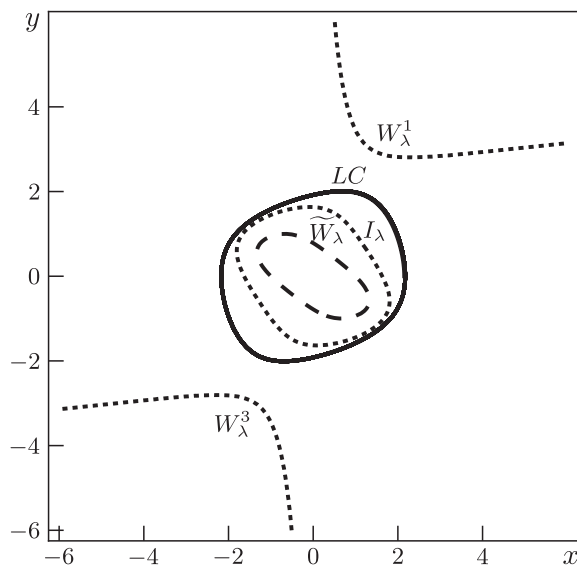


Рис. 1. Расположение кривых I_λ , $\widetilde{W}_\lambda$, W_λ^1 , W_λ^3 и предельного цикла LC системы (3) при $\lambda = 1$.

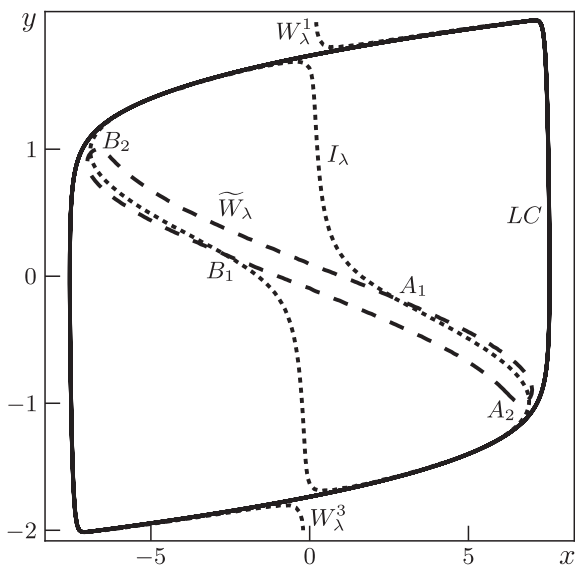


Рис. 2. Расположение контура $A_1A_2B_1B_2$ и предельного цикла LC системы (3) при $\lambda = 10$.

5. ПОСТРОЕНИЕ ВНЕШНЕЙ ГРАНИЦЫ КОЛЬЦА ПУАНКАРЕ–БЕНДИКСОНА СИСТЕМЫ (3)

В работе [10] для системы Ван дер Поля (2) был предложен подход к нахождению внешней границы на основе построения функции $\tilde{\Psi}(x, y, \lambda)$, удовлетворяющей следующим условиям:

- 1) множество H_λ , на котором производная функции $\tilde{\Psi}(x, y, \lambda)$ в силу системы (2) принимает нулевые значения и меняет знак, состоит из овала C_λ ;
- 2) множество нулевого уровня многочлена $\tilde{\Psi}(x, y, \lambda)$ содержит при всех $\lambda > 0$ овал O_λ , окружающий как овал C_λ , так и уже найденную внутреннюю границу I_λ .

Учитывая полиномиальный вид системы (2), требуемая функция $\tilde{\Psi}(x, y, \lambda)$ в указанной работе была построена в виде полинома второй степени по переменной y , коэффициенты которого зависят от x и λ . Для системы же Рэля (3) построить таким образом $\tilde{\Psi}(x, y, \lambda)$ в виде аналогичного полинома не удалось, поэтому с учётом её правых частей наш способ заключается в построении многочлена $\tilde{\Psi}(x, y, \lambda)$ вида

$$\tilde{\Psi}(x, y, \lambda) = \tilde{\Psi}_2(y)(x + \lambda(y - y^3/3))^2 + \tilde{\Psi}_1(y)(x + \lambda(y - y^3/3)) + \tilde{\Psi}_0(y).$$

Дифференцируя $\tilde{\Psi}(x, y, \lambda)$ в силу системы (3), получаем

$$\left. \frac{d\tilde{\Psi}(x, y, \lambda)}{dt} \right|_{(3)} = \sum_{i=0}^3 \tilde{\Phi}_i(y)(x + \lambda(y - y^3/3))^i,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_3(y) &= \tilde{\Psi}_2'(y), \\ \tilde{\Phi}_2(y) &= \tilde{\Psi}_1'(y) + 2\lambda\tilde{\Psi}_2(y)(1 - y^2), \\ \tilde{\Phi}_1(y) &= -2y\tilde{\Psi}_2(y) + \tilde{\Psi}_0'(y) + \lambda\tilde{\Psi}_1(y)(1 - y^2), \\ \tilde{\Phi}_0(y) &= -y\tilde{\Psi}_1(y). \end{aligned}$$

Для того чтобы множество H_λ в фазовой плоскости содержало овал C_λ , на котором производная меняет знак, потребуем выполнения условий

$$\tilde{\Psi}_2'(y) = 0, \tag{41}$$

$$\tilde{\Psi}_1'(y) + 2\lambda\tilde{\Psi}_2(y)(1 - y^2) = -\lambda\tilde{\Psi}_2(y)y^2, \tag{42}$$

$$-2y\tilde{\Psi}_2(y) + \tilde{\Psi}_0'(y) + \lambda\tilde{\Psi}_1(y)(1 - y^2) = 0. \tag{43}$$

Из соотношения (41) получаем

$$\tilde{\Psi}_2(y) = \tilde{c}_2. \tag{44}$$

С учётом (44) из соотношения (42) найдём

$$\tilde{\Psi}_1'(y) = -2\lambda\tilde{c}_2 + \lambda\tilde{c}_2y^2,$$

откуда имеем

$$\tilde{\Psi}_1(y) = -2\lambda\tilde{c}_2y + \lambda\tilde{c}_2y^3/3. \tag{45}$$

Из соотношения (43) с учётом (44) и (45) получим

$$\tilde{\Psi}_0'(y) = 2\tilde{c}_2y + \lambda^2\tilde{c}_2(2y - 7y^3/3 + y^5/3),$$

откуда

$$\tilde{\Psi}_0(y) = \tilde{c}_2 y^2 + \lambda^2 \tilde{c}_2 \left(y^2 - \frac{7}{12} y^4 + \frac{y^6}{18} \right) + \tilde{c}_0. \quad (46)$$

В результате имеем

$$\left. \frac{d\tilde{\Psi}(x, y, \lambda)}{dt} \right|_{(3)} = -\lambda \tilde{c}_2 y^2 ((x + \lambda(y - y^3/3))^2 + y^2/3 - 2).$$

Таким образом, доказана

Лемма 5. Производная $d\tilde{\Psi}(x, y, \lambda)/dt$ с учётом системы (3) при $\lambda > 0$ меняет знак только на овале

$$C_\lambda = \{(x, y) \in R^2 : (x + \lambda(y - y^3/3))^2 + y^2/3 = 2\}.$$

С учётом выражений (44)–(46) получаем представление

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(x, y, \lambda) = & \tilde{c}_2(x + \lambda(y - y^3/3))^2 - \lambda \tilde{c}_2(2y - y^3/3)(x + \lambda(y - y^3/3)) + \\ & + \tilde{c}_2 y^2(1 + \lambda^2) - 7\lambda^2 \tilde{c}_2 y^4/12 + \lambda^2 \tilde{c}_2 y^6/18 + \tilde{c}_0. \end{aligned}$$

Справедливость следующего утверждения доказывается аналогично лемме 7 из работы [10].

Лемма 6. При

$$\tilde{c}_0 = -8\tilde{c}_2 - 3\lambda\tilde{c}_2 - 18\lambda^2\tilde{c}_2$$

уравнение $\tilde{\Psi}(x, y, \lambda) = 0$ с учётом условия $\tilde{c}_2 \neq 0$ определяет овал

$$\begin{aligned} O_\lambda = \{(x, y) \in R^2 : & (x + \lambda(y - y^3/3))^2 - \lambda(2y - y^3/3)(x + \lambda(y - y^3/3)) + \\ & + y^2(1 + \lambda^2) - 7\lambda^2 y^4/12 + \lambda^2 y^6/18 - 8 - 3\lambda - 18\lambda^2 = 0\}, \end{aligned} \quad (47)$$

который является центрально симметричным и окружает овал C_λ .

Таким образом, овал O_λ может использоваться как внешняя граница кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы (3). Взаимное расположение овалов O_λ , C_λ , I_λ и предельного цикла LC системы (3) при $\lambda = 4.1$ показано на рис. 3.

Овал O_λ был построен в работе [1] с помощью овала внешней границы кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы Ван дер Поля из статьи [10] с использованием диффеоморфизма, отображающего систему (2) на систему (3).

Далее покажем, что внешняя граница O_λ при $\lambda > 0$ может быть улучшена с помощью трансверсальных кривых W_λ^1 и W_λ^3 , принадлежащих множеству нулевого уровня W_λ функции Дюлака–Черкаса $\Psi(x, y, \lambda)$. Для этого рассмотрим взаимное расположение овала O_λ и кривых W_λ^1 , W_λ^3 . Из соотношений (47) и (40) следует, что при достаточно малых значениях λ у этих кривых нет общих точек. Если λ увеличивается, то существует единственное значение $\lambda_2 \approx 0.6012$, при котором кривая W_λ^1 касается овала O_λ в одной точке C первой координатной четверти, а кривая W_λ^3 касается овала O_λ в точке D третьей координатной четверти. Далее при $\lambda > \lambda_2$ каждая из кривых W_λ^1 и W_λ^3 пересекает овал O_λ в двух точках C_1 , C_2 и D_1 , D_2 соответственно. Дугу C_1C_2 кривой W_λ^1 и дугу D_1D_2 кривой W_λ^3 можно использовать для улучшения овала O_λ в качестве внешней границы кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы Рэлея, а именно из указанных дуг вместе с дугами C_2D_1 и D_2C_1 овала O_λ можно составить контур $C_1C_2D_1D_2$, который при $\lambda > \lambda_2$ является лучшей внешней границей кольца

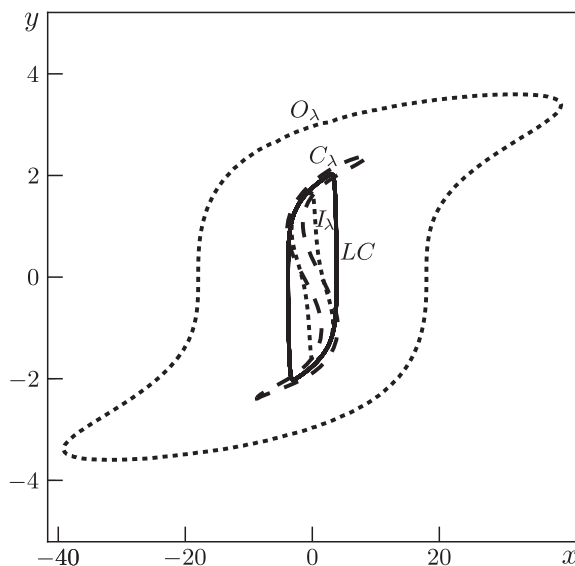


Рис. 3. Расположение овалов O_λ , C_λ , I_λ и предельного цикла LC системы (3) при $\lambda = 4.1$.

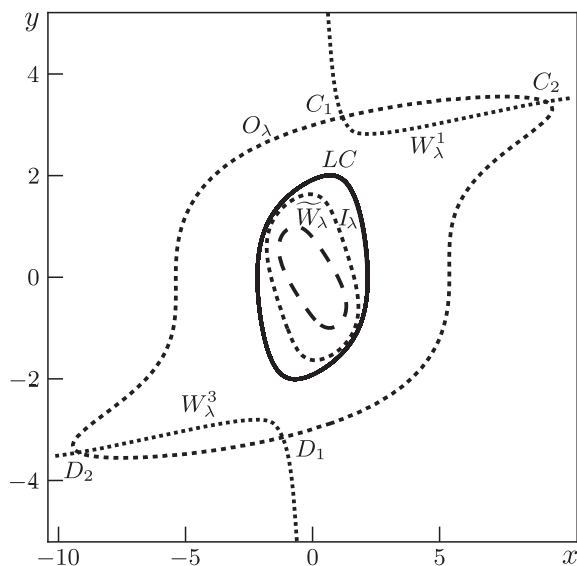


Рис. 4. Расположение контура $C_1C_2D_1D_2$ и предельного цикла LC системы (3) при $\lambda = 1$.

Пуанкаре–Бендиксона, чем овал O_λ . На рис. 4 показано взаимное расположение контура $C_1C_2D_1D_2$ и предельного цикла LC системы (3) при $\lambda = 1$.

Таким образом, нами получен следующий основной результат.

Теорема 2. Единственный предельный цикл системы Рэлея (3) на фазовой плоскости расположен в кольце Пуанкаре–Бендиксона $A(\lambda)$, внутренней и внешней границами которого соответственно являются:

- 1) овалы I_λ и O_λ при $0 < \lambda < \lambda_2$,
- 2) овал I_λ и контур $C_1C_2D_1D_2$ при $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$,
- 3) контуры $A_1A_2B_1B_2$ и $C_1C_2D_1D_2$ при $\lambda > \lambda_1$.

Для более детального изучения предельного цикла при $\lambda \rightarrow \infty$ систему Рэлея (3) с помощью линейного диффеоморфизма $u = x$, $v = \lambda y$, $\tau = t/\lambda$ удобно преобразовать к топологически эквивалентной системе

$$\frac{du}{d\tau} = -v, \quad \varepsilon \frac{dv}{d\tau} = u + v - \frac{v^3}{3}, \quad (48)$$

где $\varepsilon = 1/\lambda^2$. При малых значениях параметра ε система (48) является сингулярно возмущённой, а её единственный предельный цикл $\hat{\Gamma}_\varepsilon$ представляет собой релаксационные колебания. В работе [14] были построены алгебраические овалы

$$\hat{I}_\varepsilon := \{(u, v) \in S_{2\sqrt{3}} : u^2 + \varepsilon v^2 + uv(1 - v^2/3) - 8\varepsilon/3 = 0\}$$

и

$$\hat{O}_\varepsilon := \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \left(-u + v \left(\frac{v^2}{3} - 1 \right) \right) (-u + v) + (1 + \varepsilon)v^2 - \frac{7}{12}v^4 + \frac{1}{18}v^6 - 8\varepsilon - 3\sqrt{\varepsilon} - 18 = 0 \right\},$$

которые образуют соответственно внутреннюю и внешнюю границы глобального алгебраического кольца Пуанкаре–Бендиксона $\hat{A}_\varepsilon$, содержащего единственный предельный цикл $\hat{\Gamma}_\varepsilon$ системы (48). Уточнение границ кольца $\hat{A}_\varepsilon$ проводится аналогично кольцу $A(\lambda)$ системы (3).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование Ли Ю. выполнено при поддержке Ланьчжоуского городского университета (проект по конструированию дисциплин). Исследование Гриня А.А. и Кузьмича А.В. выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф23У-008).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин, Н.П. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.П. Баутин, Е.А. Леонтович. — 2-е изд., доп. — М. : Букинист, 1990. — 488 с.
2. Андронов, А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. — 2-е изд. — М. : Физматгиз, 1959. — 915 с.
3. Perko, L. Differential Equations and Dynamical Systems / L. Perko. — New York ; Berlin ; Heidelberg : Springer, 2001. — 555 p.
4. Рейссиг, Г. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений / Г. Рейссиг, Г. Сансоне, Р. Конти. — М. : Наука, 1974. — 319 с.
5. Lynch, S. Dynamical systems with Applications using Mathematica / S. Lynch. — Boston : Birkhäuser, 2007. — 585 p.
6. Flanders, D.A. The limit case of relaxation oscillations / D.A. Flanders, J.J. Stoker // Studies in Nonlinear Vibration Theory ; ed. Howard J. Eckweiler. — New York : New York University, 1946. — P. 51–64.
7. Schneider, K.R. New approach to study the Van der Pol equation for large damping / K.R. Schneider // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equat. — 2018. — V. 8. — P. 1–10.
8. Gasull, A. Effective construction of Poincaré–Bendixson regions / A. Gasull, H. Giacomini, M. Grau // J. Appl. Anal. Comp. — 2017. — V. 7. — P. 1549–1569.
9. Giacomini, H. Transversal conics and the existence of limit cycles / H. Giacomini, M. Grau // J. Math. Anal. Appl. — 2015. — V. 428. — P. 563–586.
10. Гринь, А.А. Глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре–Бендиксона для системы Ван дер Поля / А.А. Гринь, К.Р. Шнайдер. — Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 3. — С. 291–300.
11. Черкас, Л.А. Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости // Л.А. Черкас // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т. 33, № 5. — С. 689–699.
12. Черкас, Л.А. Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход) / Л.А. Черкас, А.А. Гринь, В.И. Булгаков. — Гродно : Гроднен. гос. ун-т им. Янки Купалы, 2013. — 489 с.
13. Grin, A.A. Location of the limit cycle for a class of Lienard systems by means of Dulac–Cherkas functions / A.A. Grin, K.R. Schneider // Memoirs on Differ. Equat. and Math. Phys. — 2023. — V. 90. — P. 1–11.
14. Grin, A.A. Global algebraic Poincaré–Bendixson annulus for the Rayleigh equation / A.A. Grin, K.R. Schneider // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equat. — 2023. — V. 35. — P. 1–12.
15. Birkhoff, G. Ordinary Differential Equations / G. Birkhoff, G.-C. Rota. — New York : John Wiley & Sons, 1989. — 416 p.
16. Rayleigh, J. The Theory of Sound / J. Rayleigh. — New York, 1945. — 520 p.
17. Georgescu, A. Approximate limit cycles for the Rayleigh model / A. Georgescu, P. Bazavan, M. Sterpu // ROMAI J. — 2008. — V. 4, № 2. — P. 73–80.
18. Ghaffari, A. On Rayleigh’s nonlinear vibration equation / A. Ghaffari // Proc. Int. Sympos. Non-linear Vibrations. Kiev, 1963. — V. 2. — P. 131–133.
19. Lopez, M.A. A note on the generalized Rayleigh equation: limit cycles and stability / M.A. Lopez, R. Martinez // J. Math. Chem. — 2013. — V. 51. — P. 1164–1169.

20. Palit, A. Comparative study of homotopy analysis and renormalization group methods on Rayleigh and Van der Pol equations / A. Palit, D.P. Datta // *Differ. Equat. Dynan. Syst.* — 2016. — V. 24. — P. 417–443.
21. Saha, S. Systematic designing of bi-rhythmic and tri-rhythmic models in families of Van der Pol and Rayleigh oscillators / S. Saha, G. Gangopadhyay, R.D. Shankar // *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* — 2020. — V. 85. — P. 12.
22. Тлячев, В.Б. О периодических решениях уравнения Рэлея / В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика.* — 2021. — Т. 21, № 2. — С. 173–181.
23. Grin, A.A. On some classes of limit cycles of planar dynamical systems / A.A. Grin, K.R. Schneider // *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A. Math. Anal.* — 2007. — V. 14. — P. 641–656.

SPECIFIED GLOBAL POINCARÉ–BENDIXSON ANNULUS WITH THE LIMIT CYCLE OF THE RAYLEIGH SYSTEM

Y. Li¹, A. A. Grin², A. V. Kuzmich³

¹*Lanzhou City University, China*

^{2,3}*Yanka Kupala State University of Grodno, Belarus*

e-mail: ¹li_liyong120@163.com, ²grin@grsu.by, ³kuzmich_av@grsu.by

In the work of A. Grin and K. Schneider [1] two algebraic transversal ovals, which form the Poincaré–Bendixson annulus $A(\lambda)$, are analytically constructed. This annulus contains the unique limit cycle of the Rayleigh equation $\ddot{x} + \lambda(\dot{x}^2/3 - 1)\dot{x} + x = 0$ for all values of the parameter $\lambda > 0$. In the constructed annulus $A(\lambda)$ inner boundary consists of zero-level set of the Dulac–Cherkas function and outer boundary represents the diffeomorphic image corresponding boundary of such an annulus for the van der Pol system. In this paper new methods of construction two Dulac–Cherkas functions are worked out. With help of these functions a better inner boundary of the Poincaré–Bendixson annulus $A(\lambda)$ depending on the parameter is found. Also, for the Rayleigh system, a procedure for direct finding a polynomial whose zero-level set contains a transversal oval used as the outer boundary $A(\lambda)$ is proposed. Then we determine the interval for λ where the better outer boundary of the annulus is a closed contour, which composed from two arcs of the constructed oval and two arcs of non-closed curves belonging to zero-level set of one from Dulac–Cherkas functions. Thus, finally the specified global Poincaré–Bendixson annulus for the limit cycle of the Rayleigh system is presented.

Keywords: Poincaré–Bendixson annulus, Rayleigh system, limit cycle, Dulac–Cherkas function, topologically equivalent systems.

FUNDING

The first author was supported by the discipline construction project of Lanzhou City University. The work by the second and third authors was carried out with financial support of the Belarusian Republican Foundation for Basic Research (project no. F23U-008).

REFERENCES

1. Bautin, N.P. and Leontovich, E.A., *Metody i priemy kachestvennogo issledovaniia dinamicheskikh sistem na ploskosti* (Methods and techniques for qualitative research of dynamic systems on a plane), Moscow: Bukinist, 1990.
2. Andronov, A.A., Vitt, A.A., and Hajkin, S.E., *Teoriia kolebaniï* (Oscillation theory), Moscow: Fizmatgiz, 1959.
3. Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, New York; Berlin; Heidelberg: Springer, 2001.
4. Rejssig, R., Sansone, G., and Conti, R., *Non-Linear Differential Equations of Higher Order*, Dordrecht: Springer, 1974.
5. Lynch, S., *Dynamical Systems with Applications using Mathematica*, Boston: Birkhäuser, 2007.
6. Flanders, D.A. and Stoker, J.J., The limit case of relaxation oscillations, in *Studies in Nonlinear Vibration Theory*, New York: New York University, 1946, pp. 51–64.

7. Schneider, K.R., New approach to study the Van der Pol equation for large damping, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equat.*, 2018, vol. 8, pp. 1–10.
8. Gasull, A., Giacomini, H., and Grau, M., Effective construction of Poincaré–Bendixson regions, *J. Appl. Anal. Comp.*, 2017, vol. 7, pp. 1549–1569.
9. Giacomini, H. and Grau, M., Transversal conics and the existence of limit cycles, *J. Math. Anal. Appl.*, 2015, vol. 428, pp. 563–586.
10. Grin, A.A. and Schneider, K.R., Global algebraic Poincaré–Bendixson annulus for the Van der Pol equation, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 3, pp. 285–295.
11. Cherkas, L.A., Dulac function for polynomial autonomous systems on a plane, *Differ. Equat.*, 1997, vol. 33, pp. 692–701.
12. Cherkas, L.A., Grin, A.A., and Bulgakov, V.I., *Konstruktivnye metody issledovaniia predel'nykh tsiklov avtonomnykh sistem vtorogo poriadka (chislenno-algebraicheskii podkhod)* (Constructive methods for studying limit cycles of second-order autonomous systems (numerical-algebraic approach)), Grodno: Grodnen. gos. un-t im. Yanki Kupaly, 2013.
13. Grin, A.A. and Schneider, K.R., Location of the limit cycle for a class of Lienard systems by means of Dulac–Cherkas functions, *Memoirs on Differ. Equat. and Math. Phys.*, 2023, vol. 90, pp. 1–11.
14. Grin, A.A. and Schneider, K.R., Global algebraic Poincaré–Bendixson annulus for the Rayleigh equation, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equat.*, 2023, vol. 35, pp. 1–12.
15. Birkhoff, G. and Rota, G.-C., *Ordinary Differential Equations*, New York: John Wiley & Sons, 1989.
16. Rayleigh, J., *The Theory of Sound*, New York, 1945.
17. Georgescu, A., Bazavan, P., and Sterpu, M., Approximate limit cycles for the Rayleigh model, *ROMAI J.*, 2008, vol. 4, no. 2, pp. 73–80.
18. Ghaffari, A., On Rayleigh’s nonlinear vibration equation, *Proc. Int. Sympos. Non-linear Vibrations. Kiev*, 1963, vol. 2, pp. 131–133.
19. Lopez, M.A. and Martinez, R., A note on the generalized Rayleigh equation: limit cycles and stability, *J. Math. Chem.*, 2013, vol. 51, pp. 1164–1169.
20. Palit, A. and Datta, D.P., Comparative study of homotopy analysis and renormalization group methods on Rayleigh and Van der Pol equations, *Differ. Equat. Dynam. Syst.*, 2016, vol. 24, pp. 417–443.
21. Saha, S., Gangopadhyay, G. and Shankar, R.D., Systematic designing of bi-rhythmic and tri-rhythmic models in families of Van der Pol and Rayleigh oscillators, *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.*, 2020, vol. 85, pp. 12.
22. Tliachev, V.B., Usho, A.D., and Usho, D.S., On periodic solutions of the Rayleigh equation, *Izvestiia Saratovskogo universiteta. Novaia seriia. Seriia: Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2021, vol. 21, no. 2, pp. 173–181.
23. Grin, A.A. and Schneider, K.R., On some classes of limit cycles of planar dynamical systems, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A. Math. Anal.*, 2007, vol. 14, pp. 641–656.