

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА, УПРАВЛЯЕМЫХ ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ С ИНДЕКСАМИ ХЕРСТА $H > 1/4$ © М. М. Васьковский¹, П. П. Стрюк²^{1,2}Белорусский государственный университет, г. Минскe-mail: ¹vaskovskii@bsu.by, ²pavel.stryouk@gmail.com

Поступила в редакцию 07.02.2024 г., после доработки 23.04.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Исследована проблема однозначной разрешимости задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения смешанного типа, управляемого стандартными и дробными броуновскими движениями с показателем Херста $H > 1/4$. Доказана теорема существования и единственности сильных решений таких уравнений.

Ключевые слова: броуновское движение, грубая траектория, стохастическое дифференциальное уравнение, задача Коши, сильное решение.

DOI: 10.31857/S0374064124060017, EDN: KWWAAK

ВВЕДЕНИЕ

На заданном полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ рассмотрим многомерное стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = b(X_t)dt + h(X_t)dW_t + \sigma(X_t)dB_t^H, \quad t \in [0, 1], \quad (1)$$

где $b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ — детерминированные функции; W_t и B_t^H — независимые n -мерные стандартное броуновское движение и дробное броуновское движение с показателем Херста $H \in (1/4, 1)$.

Так как траектории процессов W_t , B_t^H с вероятностью, равной единице, нигде не дифференцируемы, то для придания смысла уравнению (1) необходимо перейти к соответствующему интегральному уравнению

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t h(X_s) dW_s + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s^H,$$

где третье слагаемое в правой части — интеграл Ито, а четвёртое — некоторый потраекторный интеграл, при этом соответствующее уравнение (1) называют *стохастическим дифференциальным уравнением смешанного типа*. Если интеграл Ито понимается в смысле Стратоновича, то соответствующее стохастическое дифференциальное уравнение называют *уравнением Стратоновича*.

Отметим, что стохастические дифференциальные уравнения смешанного типа, управляемые одновременно стандартными и дробными броуновскими движениями, вызывают повышенный интерес, поскольку охватывают как стохастические дифференциальные уравнения

Ито, так и классы стохастических уравнений, подверженных воздействию фрактальных шумов. Тем самым уравнение (1) представляет гибкий инструмент для моделирования физических и химических явлений, финансово-экономических процессов [1, 2].

К настоящему времени построена достаточно обширная теория стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых персистентными дробными броуновскими движениями, т.е. имеющими показатели Херста большие $1/2$ [3–10]. Для таких уравнений интеграл по B_t^H понимается как потраекторный интеграл Римана–Стилтьеса.

Если уравнение (1) управляется антиперсистентными дробными броуновскими движениями, что соответствует случаю $H < 1/2$, то отсутствие достаточной гладкости не позволяет использовать теорию, основанную на потраекторных интегралах Римана–Стилтьеса. Однако такие уравнения могут исследоваться в контексте теории грубых траекторий, разработанной авторами [11–13] и др.

Оригинальная теория грубых траекторий, разработанная Т. Лайонсом [11], основана на теории аппроксимаций (аналог теоремы Вонга–Закаи) и позволяет рассматривать лишь уравнения (1) типа Стратоновича. Стоит отметить, что исследование стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа с показателями Херста большими $1/3$ стало возможным благодаря тому, что М. Губинелли предложил альтернативный аналог теории грубых траекторий [12] на основе введённой им *производной Губинелли*, который позволил исследовать негеометрические грубые траектории и стохастические дифференциальные уравнения, отличные от уравнений Стратоновича. С использованием методов теории грубых траекторий М. Губинелли была построена общая теория стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых дробными броуновскими движениями с показателем Херста $H > 1/3$ [14, 15].

Несмотря на то, что связь между стохастическими дифференциальными уравнениями Ито и Стратоновича хорошо известна в случае когда $H > 1/3$ (см., например, [13, с. 59]), установление аналогичной связи при $H > 1/4$ значительно усложняется из-за необходимости перестраивать все компоненты грубой траектории, соответствующей уравнению Стратоновича.

До настоящего времени исследования уравнений (1) смешанного типа с показателями Херста меньшими $1/3$ не обнаружены в литературе, хотя аналогичные уравнения Стратоновича с показателями Херста $H > 1/4$ исследовались в статье [16] на основе теории грубых траекторий Т. Лайонса [11]. Кроме того, известны недавние работы [17–19], в которых исследовались одномерные уравнения (1), управляемые одномерными геометрическими грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера.

Также стоит отметить, что понятия решения уравнения (1), вообще говоря, различаются в зависимости от того применяется теория Лайонса или теория Губинелли, что связано с различиями в определении потраекторных интегралов и функциональных пространств для решений.

Настоящая статья посвящена исследованию проблемы существования и единственности сильного решения задачи Коши уравнения (1) смешанного типа, управляемого дробными броуновскими движениями с показателями Херста $H > 1/4$. Данная задача решается в два этапа. На первом этапе мы доказываем, что решение уравнения (1) Стратоновича с достаточно гладкими коэффициентами является сильным, при этом решение понимается в смысле Губинелли. Существование и единственность сильного решения в смысле Лайонса уравнения Стратоновича немедленно вытекает из теоремы Лайонса (предложение 2). Основная сложность состоит в доказательстве того, что построенное решение является элементом пространства слабо управляемых грубых траекторий D_B^α , определённого в п. 1, и в последующем предельном переходе под знаком потраекторного интеграла Губинелли, из чего,

в свою очередь, следует, что найденное решение является решением в смысле Губинелли. Для доказательства данного факта используется метод из [13, гл. 7], а также оценки слабо управляемых грубых траекторий, полученных в [20, гл. 3, 4].

Казалось бы, более естественный и простой способ заключается в использовании результатов работы [20, гл. 5], в которой доказывается существование и единственность решений в смысле Губинелли уравнения (1) Стратоновича. Однако методы работы [20] не позволяют доказать, что построенное решение является неупреждающим функционалом от процессов W_t , B_t^H , и, следовательно, такое решение может не являться сильным.

Второй этап заключается в перестроении грубой траектории, соответствующей уравнению (1) Стратоновича, таким образом, чтобы полученная грубая траектория соответствовала уравнению смешанного типа и при этом решение в смысле Губинелли уравнения смешанного типа являлось решением в смысле Губинелли соответствующего уравнения Стратоновича. Отметим, что полученная грубая траектория не является геометрической в случае когда функция h отлична от нуля, а следовательно, к таким грубым траекториям неприменимы методы работ [11, 13, 20], что определяет новизну основного результата настоящей статьи, сформулированного в теореме 1.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ГРУБЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Пусть $d = 1 + 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Определим d -мерный случайный процесс $B_t = (t, W_t, B_t^H)$, обозначив через H_i показатели Херста его компонент $B_t^{(i)}$, т.е. $H_1 = 1$, $H_2 = \dots = H_{n+1} = 1/2$, $H_{n+2} = \dots = H_d = H$.

Полагая $f = \text{col}(b, h, \sigma)$, рассмотрим уравнение

$$dX_t = f(X_t)dB_t, \quad t \in [0, 1]. \quad (2)$$

Далее будем придерживаться обозначений, введённых в [16].

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРУБЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Зафиксируем произвольные $T > 0$ и $\alpha \in (0, 1]$. Через $C^\alpha([0, T], V)$ и $C_2^\alpha([0, T], V)$, где V — конечномерное евклидово пространство, обозначим соответственно множества функций $f: [0, T] \rightarrow V$, $g: [0, T]^2 \rightarrow V$ таких, что гёльдеровские полунормы

$$\|f\|_\alpha := \sup_{s, t \in [0, T], s \neq t} \frac{|f_t - f_s|}{|t - s|^\alpha}, \quad \|g\|_{\alpha, 2} := \sup_{s, t \in [0, T], s \neq t} \frac{|g_{s, t}|}{|t - s|^\alpha}$$

конечны. Далее для функции двух переменных $g_{s, t}$ будем писать $\|g\|_\alpha$ вместо $\|g\|_{\alpha, 2}$. Для функции одной переменной f_t через $f_{s, t}$ будем обозначать приращение $f_t - f_s$.

Через $C_b^k(V, W)$, где V , W — конечномерные евклидовы пространства, обозначим множество функций $h: V \rightarrow W$ таких, что норма

$$\|h\|_{C_b^k} := \sum_{i=0}^k \|D^i h\|_\infty$$

конечна, $\|D^i h\|_\infty = \sup_{X \in V} |D^i h(X)|$.

Положим $n = [1/\alpha]$. Обозначим через $\mathcal{C}^\alpha([0, T], V)$ множество α -непрерывных по Гёльдеру грубых траекторий, т.е. множество элементов $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n)$ таких, что $\mathbf{X}^i \in C_2^{i\alpha}([0, T], V^{\otimes i})$ для любого $i = \overline{1, n}$ и для любых $s, u, t \in [0, T]$ выполняется следующее тождество Чена:

$$\mathbf{X}_{s, t} = \mathbf{X}_{s, u} \boxplus \mathbf{X}_{u, t},$$

где

$$(\mathbf{X}_{s,u} \boxplus \mathbf{X}_{u,t})^i = \sum_{j=0}^i \mathbf{X}_{s,u}^j \otimes \mathbf{X}_{u,t}^{i-j}.$$

Здесь $\boxplus$ задаёт умножение на тензорной алгебре $T^{(n)}(V) = \bigoplus_{i=0}^n V^{\otimes i}$, где $V^{\otimes 0} = \mathbb{R}$. Таким образом, элемент $\mathbf{X}: [0, T]^2 \rightarrow T^{(n)}(V)$ однозначно определяется значениями $\mathbf{X}_{0,t}$, $t \in [0, T]$, так как $\mathbf{X}_{s,t} = (\mathbf{X}_{0,s})^{-1} \boxplus \mathbf{X}_{0,t}$. Далее будем писать $\mathbf{X}_t$ вместо $\mathbf{X}_{0,t}$.

Грубая траектория $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n)$ называется *геометрической*, если

$$\text{Sym}(\mathbf{X}_{s,t}^i) = \frac{1}{i!} (\mathbf{X}_{s,t}^1)^{\otimes i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Множество геометрических грубых траекторий будем обозначать через $\mathcal{C}_g^\alpha([0, T], V)$.

Будем говорить, что элемент $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], V)$ является грубой траекторией над $X \in C^\alpha([0, T], V)$, если $\mathbf{X}_{0,t}^1 = X_t$ для любых $t \in [0, T]$.

Если отображение X_t липшицево, то можно определить каноническую геометрическую грубую траекторию $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \dots, \mathbf{X}^n)$ над X следующим образом:

$$\mathbf{X}_{s,t}^i = \int_{s < t_1 < \dots < t_i < t} dX_{t_1} \otimes \dots \otimes dX_{t_i}, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1,$$

где интегралы в правой части понимаются как интегралы Римана–Стилтьеса. В дальнейшем для липшицевых отображений X_t будем рассматривать только канонические геометрические грубые траектории.

Пусть $p = 1/\alpha$. Обозначим через $\Omega_p^\infty(\mathbb{R}^d)$ множество грубых траекторий $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^\alpha([0, 1], \mathbb{R}^d)$, таких что $\mathbf{X}_{0,t}^1$ — липшицево отображение, с метрикой

$$d_p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sup_{1 \leq k \leq [p]} \left(\sup_D \sum_l |\mathbf{X}_{t_{l-1}, t_l}^k - \mathbf{Y}_{t_{l-1}, t_l}^k|^{p/k} \right)^{k/p} + \sup_{t \in [0, 1]} |\mathbf{X}_{0,t}^1 - \mathbf{Y}_{0,t}^1|,$$

где супремум берётся по всем конечным разбиениям D точками t_l отрезка $[0, 1]$. Обозначим через $\Omega_p(\mathbb{R}^d)$ замыкание множества $\Omega_p^\infty(\mathbb{R}^d)$ относительно метрики d_p .

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛАБО УПРАВЛЯЕМЫХ ГРУБЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Пусть $X \in C^\alpha([0, T], V)$, а $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n)$ — грубая траектория над X . Пусть W — конечномерное евклидово пространство. Будем говорить, что функция $Y_t \in C^\alpha([0, T], W)$ слабо управляется грубой траекторией $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], V)$, если существуют функции $Y^{(1)}: [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$, ..., $Y^{(n-1)}: [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V^{\otimes(n-1)}, W)$ такие, что

$$\begin{aligned} Y_{s,t} &= Y_s^{(1)} \mathbf{X}_{s,t}^1 + \dots + Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s,t}^{n-1} + R_{s,t}^{Y,n}, & Y_{s,t}^{(1)} &= Y_s^{(2)} \mathbf{X}_{s,t}^1 + \dots + Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s,t}^{n-2} + R_{s,t}^{Y,n-1}, & \dots \\ \dots, & & Y_{s,t}^{(n-2)} &= Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s,t}^1 + R_{s,t}^{Y,2}, & Y_{s,t}^{(n-1)} &= R_{s,t}^{Y,1}, \end{aligned}$$

а каждый из остаточных членов $R^{Y,i}$ имеет конечную гёльдеровскую полунорму $\|R^{Y,i}\|_{i\alpha}$, $i = \overline{1, n}$. Функцию $Y^{(i)}$ будем называть *производной Губинелли* порядка i от Y .

Определим банахово пространство

$$\mathcal{D}_\mathbf{X}^\alpha([0, T], W) = \left\{ (Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)}): Y \in C^\alpha([0, T], W), \sum_{i=1}^n \|R^{Y,i}\|_{i\alpha} < \infty \right\}$$

с нормой

$$\|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}} := \sum_{i=0}^{n-1} |Y_0^{(i)}| + \sum_{i=1}^n \|R^{Y,i}\|_{i\alpha},$$

где $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], W)$, $Y_t^{(0)} = Y_t$.

1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ПО ГРУБЫМ ТРАЕКТОРИЯМ

Пусть V, W — некоторые конечномерные евклидовы пространства, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}^{\alpha}([0, T], V)$, $Y \in C^{\alpha}([0, T], \mathcal{L}(V, W))$, $(Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], \mathcal{L}(V, W))$. Возьмём некоторые $s, t \in [0, T]$, $s < t$, через $\mathcal{P}$ обозначим произвольное конечное разбиение отрезка $[s, t]$ точками.

Потраекторным интегралом $\int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r$ будем называть следующий предел интегральных сумм (если этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[s, t]$ точками):

$$\int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r := \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} \sum_{i=0}^{n-1} Y_u^{(i)} \mathbf{X}_{u,v}^{i+1}.$$

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определим кусочно-линейные аппроксимации процесса B_t соотношением

$$B_{m,t} = B_{t_{l-1}^m} + (t - t_{l-1}^m) B_{t_{l-1}^m, t_l^m}, \quad t \in [t_{l-1}^m, t_l^m], \quad l = \overline{1, 2^m}, \quad t_l^m = l/2^m.$$

Для каждого $i = 1, 2, 3$ определим так называемый процесс порядка i над $B_{m,t}$ следующим образом:

$$\mathbf{B}_{m;s,t}^i = \int_{s < t_1 < \dots < t_i < t} dB_{m,t_1} \otimes \dots \otimes dB_{m,t_i}, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1,$$

пусть $\mathbf{B}_{m;s,t} = (1, \mathbf{B}_{m;s,t}^1, \mathbf{B}_{m;s,t}^2, \mathbf{B}_{m;s,t}^3)$.

Так как существуют постоянные $C > 0$ и $\rho > 1/4$ такие, что для любых $s, t \in [0, 1]$, $\tau > 0$ выполняются неравенства

$$\mathbb{E}(|B_t - B_s|^2) \leq C|t - s|^{2\rho}, \quad \mathbb{E}((B_t - B_s)(B_{t+\tau} - B_{s+\tau})) \leq C\tau^{2\rho} \left| \frac{t-s}{\tau} \right|^2, \quad |t-s| \leq \tau,$$

то согласно теореме 2 из [16] для любого $p > 1/H$ существует п.н. предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d_p(\mathbf{B}_m, \mathbf{B}) = 0$$

для некоторого процесса $\mathbf{B}_{s,t} = (1, \mathbf{B}_{s,t}^1, \mathbf{B}_{s,t}^2, \mathbf{B}_{s,t}^3)$ со значениями в $T^{(3)}(\mathbb{R}^d)$ и $\mathbf{B}_{0,t}^1 = B_t$.

В силу теоремы 2 из [16] процесс $\mathbf{B}$ удовлетворяет тождеству Чена

$$\mathbf{B}_{s,u} \boxplus \mathbf{B}_{u,t} = \mathbf{B}_{s,t}, \quad s \leq u \leq t.$$

Возьмём некоторое значение $\alpha \in (1/4, H)$ и зафиксируем его. Так как для любого $p > 1/H$ сглаженные грубые траектории $\mathbf{B}_m = (1, \mathbf{B}_m^1, \mathbf{B}_m^2, \mathbf{B}_m^3)$ сходятся п.н. по метрике p -вариации к $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}_m \in \mathcal{C}_g^{\alpha}([0, 1], \mathbb{R}^d)$ п.н., то $\mathbf{B} \in \mathcal{C}_g^{\alpha}([0, 1], \mathbb{R}^d)$ п.н.

Определим процесс $\tilde{\mathbf{B}}_{s,t} = (1, \tilde{\mathbf{B}}_{s,t}^1, \tilde{\mathbf{B}}_{s,t}^2, \tilde{\mathbf{B}}_{s,t}^3)$ следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{B}}_{s,t}^1 = \mathbf{B}_{s,t}^1, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{s,t}^2 = \mathbf{B}_{s,t}^2 + A_{s,t}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{s,t}^3 = \mathbf{B}_{s,t}^3 + \int_s^t A_{s,r} \otimes d\mathbf{B}_r + \int_s^t B_{s,r} \otimes dA_r,$$

где A_t — диагональная $d \times d$ -матрица с ненулевыми элементами $A_t^{(i,i)} = -1/2t$, $i = \overline{2, n+1}$.

Предложение 1. $\tilde{\mathbf{B}} \in \mathcal{C}^\alpha([0, 1], \mathbb{R}^d)$ п.н.

Доказательство. Достаточно проверить тождество Чена для $\tilde{\mathbf{B}}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}_{s,u} \boxplus \tilde{\mathbf{B}}_{u,t} &= (1, \tilde{\mathbf{B}}_{s,u}^1 + \tilde{\mathbf{B}}_{u,t}^1, \tilde{\mathbf{B}}_{s,u}^2 + \tilde{\mathbf{B}}_{u,t}^2 + \tilde{\mathbf{B}}_{s,u}^1 \otimes \tilde{\mathbf{B}}_{u,t}^1, \tilde{\mathbf{B}}_{s,u}^3 + \tilde{\mathbf{B}}_{u,t}^3 + \tilde{\mathbf{B}}_{s,u}^1 \otimes \tilde{\mathbf{B}}_{u,t}^2 + \tilde{\mathbf{B}}_{s,u}^2 \otimes \tilde{\mathbf{B}}_{u,t}^1) = \\ &= \left(1, \mathbf{B}_{s,t}^1, \mathbf{B}_{s,u}^2 + \mathbf{B}_{u,t}^2 + A_{s,t} + \mathbf{B}_{s,u}^1 \otimes \mathbf{B}_{u,t}^1, \mathbf{B}_{s,u}^3 + \mathbf{B}_{u,t}^3 + \int_s^u A_{s,r} \otimes d\mathbf{B}_r + \int_s^u B_{s,r} \otimes dA_r + \right. \\ &\quad \left. + \int_u^t A_{u,r} \otimes d\mathbf{B}_r + \int_u^t B_{u,r} \otimes dA_r + \mathbf{B}_{s,u}^1 \otimes \mathbf{B}_{u,t}^2 + \mathbf{B}_{s,u}^2 \otimes \mathbf{B}_{u,t}^1 + \mathbf{B}_{s,u}^1 \otimes A_{u,t} + A_{s,u} \otimes \mathbf{B}_{u,t}^1 \right) = \\ &= \left(1, \tilde{\mathbf{B}}_{s,t}^1, \mathbf{B}_{s,t}^2 + A_{s,t}, \mathbf{B}_{s,t}^3 + \int_s^t A_{s,r} \otimes d\mathbf{B}_r + \int_s^t B_{s,r} \otimes dA_r \right) = \tilde{\mathbf{B}}_{s,t}. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Наряду с уравнением (2) рассмотрим следующие уравнения в грубых траекториях:

$$dX_t = f(X_t)d\tilde{\mathbf{B}}_t, \quad t \in [0, 1], \quad (3)$$

$$dX_t = \tilde{f}(X_t)d\mathbf{B}_t, \quad t \in [0, 1], \quad (4)$$

где

$$\tilde{f} = \text{col}(\tilde{b}, h, \sigma), \quad \tilde{b}_j = b_j - \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial h_{ji}}{\partial X_k} h_{ki}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Определение 1. Решением уравнения (4) будем называть случайный процесс X_t , заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, такой, что п.н. выполняются условия:

- 1) $X \in C^\alpha([0, 1], \mathbb{R}^n)$;
- 2) процессы X_t , $f(X_t)$ слабо управляются грубой траекторией $\mathbf{B}$;
- 3) для любого $t \in [0, 1]$ имеет место равенство

$$X_t = X_0 + \int_0^t \tilde{f}(X_s) d\mathbf{B}_s,$$

где интеграл в правой части — потраекторный интеграл, при этом $X_t' = \tilde{f}(X_t)$, $X_t'' = (\tilde{f}(X_t))' = D\tilde{f}(X_t)X_t'$, $(\tilde{f}(X_t))'' = D\tilde{f}(X_t)X_t'' + D^2\tilde{f}(X_t)(X_t')^{\otimes 2}$. Пусть $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина. Решение X_t уравнения (4) с начальным условием $X_0 = \xi$ называется *единственным*, если для любого решения Y_t уравнения (4) с начальным условием $Y_0 = \xi$ выполняется равенство $P(X_t = Y_t, t \in [0, 1]) = 1$. Решение X_t уравнения (4) с начальным условием $X_0 = \xi$ будем называть *сильным*, если процесс X_t согласован с потоком σ -алгебр, порождённым случайной величиной ξ и процессом B_t .

Определение 2. Сильным решением уравнения (1) будем называть случайный процесс X_t , заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и согласованный с потоком σ -алгебр, порождённым начальным условием X_0 и процессом B_t , такой, что п.н. выполняются условия:

- 1) $X \in C^\alpha([0, 1], \mathbb{R}^n)$;
- 2) процессы X_t , $f(X_t)$ слабо управляются грубой траекторией $\tilde{\mathbf{B}}$;

3) для любого $t \in [0, 1]$ имеет место равенство

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s) d\tilde{\mathbf{B}}_s.$$

Справедливы следующие утверждения.

Предложение 2 [11, с. 298]. Пусть $p \geq 1$; $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$ — функция, имеющая непрерывные и ограниченные частные производные любого порядка k , $k = 0, [p] + 1$; $x \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $F: \Omega_p^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow \Omega_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ отображение Ито, действующее по правилу: $F(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$, где $\mathbf{Y}$ — грубая траектория над единственным решением Y_t дифференциального уравнения $dY_t = f(t, Y_t) dX_t$, $t \in [0, 1]$, управляемого липшицевым отображением $\mathbf{X}_{0,t}^1 = X_t$, с начальным условием $Y_0 = x$. Тогда отображение F является непрерывным и существует единственное продолжение $\hat{F}$ отображения F на $(\Omega_p(\mathbb{R}^d), d_p)$, которое также является непрерывным.

Предложение 3. Пусть $\tilde{f} \in C_b^4(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times d})$. Тогда для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует единственное сильное решение X_t уравнения (4) с начальным условием $X_0 = x_0$.

Доказательство. В доказательстве этого предложения все соотношения, содержащие случайные процессы, понимаются в смысле п.н. Так как процессы $B_{m,t}$ кусочно-линейные, то для любого натурального m уравнение

$$dX_t = \tilde{f}(X_t) d\mathbf{B}_{m,t}, \quad t \in [0, 1],$$

имеет единственное сильное решение $X_{m,t}$ с начальным условием $X_{m,0} = x_0$, которое совпадает с единственным сильным решением интегрального уравнения

$$X_t = x_0 + \int_0^t \tilde{f}(X_s) dB_{m,s}, \quad t \in [0, 1].$$

По предложению 2 существует непрерывное детерминированное отображение $G: \Omega_p(\mathbb{R}^d) \rightarrow \Omega_p(\mathbb{R}^n)$ такое, что

$$\mathbf{X}_m = G(\mathbf{B}_m),$$

где $\mathbf{X}_m = (1, \mathbf{X}_m^1, \mathbf{X}_m^2, \mathbf{X}_m^3)$ — каноническая геометрическая грубая траектория над X_m .

Так как для любого $p' > 1/H$ последовательность грубых траекторий $\mathbf{B}_m$, $m \in \mathbb{N}$, сходится к $\mathbf{B}$ в $(\Omega_{p'}(\mathbb{R}^d), d_{p'})$, то согласно предложению 2 последовательность $\mathbf{X}_m$, $m \in \mathbb{N}$, сходится к некоторой грубой траектории $\mathbf{X}$ в $(\Omega_{p'}(\mathbb{R}^n), d_{p'})$.

Докажем, что $X_t = \mathbf{X}_{0,t}^1$ является сильным решением уравнения (4) с начальным условием $X_0 = x_0$.

Для любого натурального m имеем

$$X_{m,t} = x_0 + \int_0^t \tilde{f}(X_{m,s}) d\mathbf{B}_{m,s}, \quad t \in [0, 1]. \quad (5)$$

Обозначим $Y_{m,s} = \tilde{f}(X_{m,s})$, $Y_s = \tilde{f}(X_s)$. Покажем, что (X_m, X'_m, X''_m) , $(Y_m, Y'_m, Y''_m) \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}_m}^\alpha$, (X, X', X'') , $(Y, Y', Y'') \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}}^\alpha$, где $X'_m = \tilde{f}(X_m)$, $X''_m = D\tilde{f}(X_m)X'_m$, и аналогично определяются Y'_m , Y''_m , X' , X'' , Y' , Y'' .

Докажем, что $\mathbf{X}_m = (X_m, X'_m, X''_m) \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}_m}^\alpha$. Очевидно, что $\|R^{X_m,1}\|_\alpha = \|X''_m\|_\alpha \leq C$ для любых m . Оценим

$$\|R^{X_m,2}\|_{2\alpha} = \sup_{s < t} \frac{|X'_{m,s,t} - X''_{m,s} \mathbf{B}_{m,s,t}^1|}{|t-s|^{2\alpha}} \leq \|X'_m\|_{2\alpha} + \|X''_m\|_\infty \|\mathbf{B}_m^1\|_{2\alpha} \leq C_m,$$

$$\begin{aligned} \|R^{X_m,3}\|_{3\alpha} &= \sup_{s < t} \frac{|X_{m,s,t} - X'_{m,s} \mathbf{B}_{s,t}^1 - X''_{m,s} \mathbf{B}_{s,t}^2|}{|t-s|^{3\alpha}} \leq \\ &\leq \|X_m\|_{3\alpha} + \|X'_m\|_{\infty} \|\mathbf{B}_m^1\|_{3\alpha} + \|X''_m\|_{\infty} \|\mathbf{B}_m^2\|_{3\alpha} \leq C_m. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathbf{X}_m = (X_m, X'_m, X''_m) \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}^m}^{\alpha}$ для любого m .

Покажем, что $\mathbf{X} = (X, X', X'') \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}}^{\alpha}$. Согласно [11] существует единственная грубая траектория $\hat{\mathbf{X}} = (1, \hat{\mathbf{X}}^1, \hat{\mathbf{X}}^2, \hat{\mathbf{X}}^3) \in \mathcal{C}^{\alpha}([0, 1], \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\hat{\mathbf{X}}_t^1 = \hat{\mathbf{X}}_0^1 + \int_0^t F(\hat{\mathbf{X}}_s^1) d\hat{\mathbf{X}}_s, \quad t \in [0, 1], \quad (6)$$

где $F: \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^n)$ определена следующим образом:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \tilde{f}(y) & 0 \end{pmatrix},$$

проекция $\hat{\mathbf{X}}$ на $\mathcal{C}^{\alpha}([0, 1], \mathbb{R}^d)$ совпадает с $\mathbf{B}$, а проекция $\hat{\mathbf{X}}$ на $\mathcal{C}^{\alpha}([0, 1], \mathbb{R}^n)$ совпадает с $\mathbf{X}$, интеграл в правой части соотношения (6) понимается в смысле определения интеграла по грубым траекториям настоящей статьи, при этом $(F(\hat{\mathbf{X}}^1))^{(i)} = D^i F(\hat{\mathbf{X}}^1)$. Отсюда вытекает [13, с. 145], что $\mathbf{X} \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}}^{\alpha}$.

Так как $\tilde{f} \in C_b^4$, $\mathbf{X}_m \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}_m}^{\alpha}$, $\mathbf{X} \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}}^{\alpha}$, $\mathbf{B}_m \in \mathcal{C}_g^{\alpha}([0, 1], \mathbb{R}^d)$, $\mathbf{B} \in \mathcal{C}_g^{\alpha}([0, 1], \mathbb{R}^d)$, то согласно теореме 4.1 [20] $Y_m \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}_m}^{\alpha}$, $Y \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}}^{\alpha}$.

Пусть

$$Z_m = \int_0^{\cdot} Y_{m,s} d\mathbf{B}_{m,s}, \quad Z = \int_0^{\cdot} Y_s d\mathbf{B}_s,$$

докажем, что для любого $t \in [0, 1]$ справедливо равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Z_{m,t} = Z_t. \quad (7)$$

Имеем

$$\begin{aligned} Z_t &= (\mathcal{I}\Xi)_{0,t} - \Xi_{0,t} + Y_0 \mathbf{B}_{0,t}^1 + Y'_0 \mathbf{B}_{0,t}^2 + Y''_0 \mathbf{B}_{0,t}^3, \\ Z_{m,t} &= (\mathcal{I}\Xi_m)_{0,t} - \Xi_{m,0,t} + Y_{m,0} \mathbf{B}_{m,0,t}^1 + Y'_{m,0} \mathbf{B}_{m,0,t}^2 + Y''_{m,0} \mathbf{B}_{m,0,t}^3, \end{aligned}$$

где

$$\Xi_{0,t} = Y_0 \mathbf{B}_{0,t}^1 + Y'_0 \mathbf{B}_{0,t}^2 + Y''_0 \mathbf{B}_{0,t}^3, \quad \Xi_{m,0,t} = Y_{m,0} \mathbf{B}_{m,0,t}^1 + Y'_{m,0} \mathbf{B}_{m,0,t}^2 + Y''_{m,0} \mathbf{B}_{m,0,t}^3,$$

а $\mathcal{I}$ — единственное непрерывное линейное отображение из $C_2^{\alpha,4\alpha}([0, 1], \mathbb{R}^n)$ в $C^{\alpha}([0, 1], \mathbb{R}^n)$ такое, что $(\mathcal{I}\Theta)_0 = 0$ и $|(\mathcal{I}\Theta)_{s,t} - \Theta_{s,t}| \leq C|t-s|^{4\alpha}$, здесь $C_2^{\alpha,4\alpha}([0, 1], \mathbb{R}^n)$ — пространство функций Θ от переменных $s, t \in [0, 1]$, $s \leq t$, со значениями в $\mathbb{R}^n$ таких, что

$$\|\Theta\|_{\alpha,4\alpha} = \sup_{s < \tau} \frac{|\Theta_{s,\tau}|}{|\tau-s|^{\alpha}} + \sup_{s < u < \tau} \frac{|\Theta_{s,\tau} - \Theta_{s,u} - \Theta_{u,\tau}|}{|\tau-s|^{4\alpha}} < \infty.$$

Существование и единственность такого отображения доказана в [13, лемма 4.2].

Положим $\Delta_m = \Xi - \Xi_m$, тогда

$$|Z_t - Z_{m,t}| \leq |(\mathcal{I}\Delta_m)_{0,t} - \Delta_{m,0,t}| + |Y_0 \mathbf{B}_{0,t}^1 - Y_{m,0} \mathbf{B}_{m,0,t}^1| + |Y'_0 \mathbf{B}_{0,t}^2 - Y'_{m,0} \mathbf{B}_{m,0,t}^2| + |Y''_0 \mathbf{B}_{0,t}^3 - Y''_{m,0} \mathbf{B}_{m,0,t}^3|.$$

Так как $Y_0 = Y_{m,0}$, $Y'_0 = Y'_{m,0}$, $Y''_0 = Y''_{m,0}$, то для доказательства соотношения (7) достаточно показать, что для любого $t \in [0, 1]$ справедливо равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [(\mathcal{I}\Delta_m)_{0,t} - \Delta_{m,0,t}] = 0.$$

Используя соотношение (4.11) из доказательства леммы 4.2 [13] при $\beta = 4\alpha$ и соотношение (2) из доказательства предложения 1 [17], мы получаем

$$|(\mathcal{I}\Delta_m)_{0,t} - \Delta_{m,0,t}| \leq C \|\delta\Delta_m\|_{4\alpha} t^{4\alpha},$$

где

$$\delta\Delta_{m,s,u,\tau} = - \sum_{i=1}^3 R_{s,u}^{Y,i} \mathbf{B}_{u,\tau}^{4-i} + \sum_{i=1}^3 R_{s,u}^{Y_m,i} \mathbf{B}_{m,u,\tau}^{4-i}, \quad \|\delta\Delta_m\|_{4\alpha} = \sup_{s < u < \tau} \frac{|\delta\Delta_{m,s,u,\tau}|}{|\tau - s|^{4\alpha}},$$

C — некоторая универсальная постоянная, не зависящая от m , ω , t .

Имеем

$$\|\delta\Delta_m\|_{4\alpha} \leq \sum_{i=1}^3 \sup_{s < u < \tau} \left(\frac{|R_{s,u}^{Y,i}|}{|\tau - s|^{i\alpha}} \frac{|\mathbf{B}_{u,\tau}^{4-i} - \mathbf{B}_{m,u,\tau}^{4-i}|}{|\tau - s|^{(4-i)\alpha}} + \frac{|R_{s,u}^{Y_m,i} - R_{s,u}^{Y,i}|}{|\tau - s|^{i\alpha}} \frac{|\mathbf{B}_{m,u,\tau}^{4-i}|}{|\tau - s|^{(4-i)\alpha}} \right). \quad (8)$$

Так как $\tilde{f} \in C_b^4$, $\mathbf{Y}_m \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}_m}^\alpha$, $\mathbf{Y} \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}}^\alpha$, то согласно лемме 4.2 [20] получим

$$\sum_{i=1}^3 \|R^{Y_m,i} - R^{Y,i}\|_{i\alpha} \leq C \left(d_{1/\alpha}(\mathbf{B}_m, \mathbf{B}) + \sum_{i=1}^3 \|R^{X_m,i} - R^{X,i}\|_{i\alpha} \right). \quad (9)$$

Из соотношения (5) и теоремы 5.3 [20] заключаем, что для любых натуральных m_1, m_2 выполняются оценки

$$\sum_{i=1}^3 \|R^{X_{m_1},i} - R^{X_{m_2},i}\|_{i\alpha} \leq C d_{1/\alpha}(\mathbf{B}_{m_1}, \mathbf{B}_{m_2}),$$

откуда следует, что для любых $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3$, $s, \tau \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$|R_{s,\tau}^{X_{m_1},i} - R_{s,\tau}^{X_{m_2},i}| \leq C d_{1/\alpha}(\mathbf{B}_{m_1}, \mathbf{B}_{m_2}) |\tau - s|^{i\alpha}.$$

Переходя к пределу в данном неравенстве при $m_2 \rightarrow \infty$ при фиксированных s, τ, m_1, i , получаем

$$|R_{s,\tau}^{X_{m_1},i} - R_{s,\tau}^{X,i}| \leq C d_{1/\alpha}(\mathbf{B}_{m_1}, \mathbf{B}) |\tau - s|^{i\alpha}.$$

Таким образом, имеем

$$\sum_{i=1}^3 \|R^{X_m,i} - R^{X,i}\|_{i\alpha} \leq C d_{1/\alpha}(\mathbf{B}_m, \mathbf{B}). \quad (10)$$

Из соотношений (8)–(10) вытекает, что $\|\delta\Delta_m\|_{4\alpha} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ и, как следствие, требуемое соотношение (7). Переход к пределу в равенстве (5) даёт

$$X_t = x_0 + \int_0^t \tilde{f}(X_s) d\mathbf{B}_s, \quad t \in [0, 1].$$

Из определения кусочно-линейных аппроксимаций $B_{m,t}$ следует, что при каждом натуральном m процесс $X_{m,t}$ является $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -согласованным, где $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{t+1/2^m}$. В силу непрерывности справа семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_t$ заключаем, что при каждом $t \in [0, 1]$ случайная величина X_t является $\mathcal{F}_t$ -измеримой. Таким образом, процесс X_t является сильным решением уравнения (4) с начальным условием $X_0 = x_0$.

Докажем единственность сильного решения уравнения (4) с начальным условием $X_0 = x_0$. Предположим, что существует другое сильное решение $\tilde{X}_t$ рассматриваемой задачи Коши. Пусть $\tilde{\mathbf{X}}$ — соответствующая грубая траектория над $\tilde{X}$ (в смысле определения 1). Согласно [13, с. 145] $\tilde{\mathbf{X}}$ является проекцией на $\mathcal{C}^\alpha([0, 1], \mathbb{R}^n)$ грубой траектории $\hat{\mathbf{X}} \in \mathcal{C}^\alpha([0, 1], \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^n)$. Но тогда $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X}$ и, следовательно, $X_t = \tilde{X}_t$ для любого $t \in [0, 1]$. Предложение доказано.

Предложение 4. Пусть X_t — сильное решение уравнения (4) с начальным условием $X_0 = x_0$. Тогда

$$\int_0^t \tilde{f}(X_s) d\mathbf{B}_s = \int_0^t f(X_s) d\tilde{\mathbf{B}}_s,$$

т.е. сильное решение уравнения (4) является сильным решением уравнения (3), где

$$(f(X_s))' = (\tilde{f}(X_s))', \quad (f(X_s))'' = (\tilde{f}(X_s))''.$$

Доказательство. Пусть X_t — сильное решение уравнения (4) с начальным условием $X_0 = x_0$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t f(X_s) d\tilde{\mathbf{B}}_s &= \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} (f(X_u) \tilde{\mathbf{B}}_{u,v}^1 + (f(X_u))' \tilde{\mathbf{B}}_{u,v}^2 + (f(X_u))'' \tilde{\mathbf{B}}_{u,v}^3) = \\ &= \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} (f(X_u) \mathbf{B}_{u,v}^1 + (f(X_u))' (\mathbf{B}_{u,v}^2 + A_{u,v}) + (f(X_u))'' \mathbf{B}_{u,v}^3) = \\ &= \int_0^t f(X_s) d\mathbf{B}_s + \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} (f(X_u))' A_{u,v} = \int_0^t f(X_s) d\mathbf{B}_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial h_{ji}(X_s)}{\partial X_k} h_{ki}(X_s) e_j ds = \\ &= \int_0^t f(X_s) d\mathbf{B}_s - \int_0^t (b(X_s) - \tilde{b}(X_s)) ds = \int_0^t \tilde{f}(X_s) d\mathbf{B}_s, \end{aligned}$$

где $\{e_j\}_{j=1}^n$ — канонический базис пространства $\mathbb{R}^n$. Отметим, что в последнем равенстве мы воспользовались тем, что функция $t \rightarrow t$ непрерывна по Гёльдеру с показателем 1, и следовательно, определение производных Губинелли $(f(X_s))' := (\tilde{f}(X_s))'$, $(f(X_s))'' := (\tilde{f}(X_s))''$ корректно. Предложение доказано.

Замечание 1. Если $\sigma = 0$, то предложение 4 является известным фактом, связывающим решения соответствующих уравнений Ито и Стратоновича [9, гл. 4].

Из предложений 3 и 4 вытекает следующая

Теорема. Пусть $b \in C_b^4(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $h \in C_b^5(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n})$, $\sigma \in C_b^4(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n})$. Тогда для любой случайной величины $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ уравнение (1) с начальным условием $X_0 = \xi$ имеет единственное сильное решение.

Замечание 2. В уравнении (1) отрезок $[0, 1]$ может быть заменён на любой отрезок вида $[0, T]$. Если в сформулированной теореме отказаться от условия ограниченности функций b , h , σ и их частных производных, то решение уравнения (1) будет существовать лишь при $t \in [0, \tau)$, где τ — некоторая случайная величина со значениями из промежутка $(0, 1]$.

Замечание 3. Условие $H > 1/4$ является существенным в рамках подхода, основанного на теории грубых траекторий, поскольку согласно работе [16] последовательность $\mathbf{B}_m^2$, $m \in \mathbb{N}$, не содержит сходящихся по вероятности подпоследовательностей.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications / F. Biagini, Y. Hu, B. Oksendal, T. Zhang. — London : Springer-Verlag, 2008.
2. Mishura, Yu.S. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes / Yu.S. Mishura. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2008.
3. Guerra, J. Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion / J. Guerra, D. Nualart // Stochastic Anal. Appl. — 2008. — V. 26, № 5. — P. 1053–1075.
4. Mishura, Y.S. Existence and uniqueness of the solution of stochastic differential equation involving Wiener process and fractional Brownian motion with Hurst index $H > 1/2$ / Y.S. Mishura, G.M. Shevchenko // Communications in Statistics. Theory and Methods. — 2011. — V. 40, № 19–20. — P. 3492–3508.
5. Леваков, А.А. Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями и с разрывными коэффициентами / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 2. — С. 187–200.
6. Леваков, А.А. Существование решений стохастических дифференциальных включений со стандартным и дробным броуновскими движениями / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 8. — С. 997–1003.
7. Леваков, А.А. Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 8. — С. 1011–1019.
8. Васьковский, М.М. Устойчивость и притяжение решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями / М.М. Васьковский // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 2. — С. 160–173.
9. Леваков, А.А. Стохастические дифференциальные уравнения и включения / А.А. Леваков, М.М. Васьковский. — Минск : БГУ, 2019.
10. Nualart, D. Differential equations driven by fractional Brownian motion / D. Nualart, A. Rascanu // Collectanea Mathematica. — 2002. — V. 53, № 1. — P. 55–81.
11. Lyons, T. Differential equations driven by rough signals / T. Lyons // Revista Matematica Iberoamericana. — 1998. — V. 14, № 2. — P. 215–310.
12. Gubinelli, M. Controlling rough paths / M. Gubinelli // J. Funct. Anal. — 2004. — V. 216, № 1. — P. 86–140.
13. Friz, P. A Course on Rough Paths with an Introduction to Regularity Structures / P. Friz, M. Hairer. — Cham : Springer, 2014.
14. Vaskouski, M. Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than $1/3$ / M. Vaskouski, I. Kachan // Stochastic Anal. Appl. — 2018. — V. 36, № 6. — P. 909–931.
15. Васьковский, М.М. О конечности моментов решений стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых стандартными и дробными броуновскими движениями / М.М. Васьковский, А.А. Карпович // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 2. — С. 162–168.
16. Coutin, L. Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions / L. Coutin, Z. Qian // Probability Theory Related Fields. — 2002. — V. 122, № 1. — P. 108–140.
17. Васьковский, М.М. Существование и единственность решений дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера / М.М. Васьковский // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 10. — С. 1305–1317.

18. Васьковский, М.М. Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера / М.М. Васьковский // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 11. — С. 1443–1449.
19. Васьковский, М.М. Аналог уравнений Колмогорова для одномерных стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробным броуновским движением с показателем Херста $H \in (0, 1)$ / М.М. Васьковский // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 1. — С. 11–16.
20. Harang, F.A. On the theory of rough paths, fractional and multifractional Brownian motion with applications to finance : dissertation ... master of mathematics / F.A. Harang. — Oslo, 2015. — 83 p.

**EXISTENCE AND UNIQUENESS OF STRONG SOLUTIONS
TO MIXED-TYPE STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS DRIVEN
BY THE FRACTIONAL BROWNIAN MOTIONS WITH HURST INDICES $H > 1/4$**

M. M. Vaskouski¹, P. P. Stryuk²

^{1,2}Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: ¹vaskovskii@bsu.by, ²pavel.stryouk@gmail.com

In this paper there is investigated the problem of unique solvability of the Cauchy problem for the mixed type stochastic differential equation driven by the standard Brownian motion and fractional Brownian motions with Hurst indices $H > 1/4$. We prove a theorem on the existence and uniqueness of strong solutions to the mentioned mixed type stochastic differential equations.

Keywords: fractional Brownian motion, rough path, stochastic differential equation, Cauchy problem, strong solution.

REFERENCES

1. Biagini, F., Hu, Y., Oksendal, B., and Zhang, T., *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*, London: Springer-Verlag, 2008.
2. Mishura, Y.S., *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*, Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
3. Guerra, J. and Nualart, D., Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion, *Stochastic Anal. Appl.*, 2008, vol. 26, no. 5, pp. 1053–1075.
4. Mishura, Y.S. and Shevchenko, G.M., Existence and uniqueness of the solution of stochastic differential equation involving Wiener process and fractional Brownian motion with Hurst index $H > 1/2$, *Communications in Statistics. Theory and Methods*, 2011, vol. 40, no. 19–20, pp. 3492–3508.
5. Levakov, A.A. and Vas'kovskii, M.M., Existence of weak solutions of stochastic differential equations with standard and fractional Brownian motions and with discontinuous coefficients, *Differ. Equat.*, 2014, vol. 50, no. 2, pp. 189–202.
6. Levakov, A.A. and Vas'kovskii, M.M., Existence of solutions of stochastic differential inclusions with standard and fractional Brownian motions, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 8, pp. 991–997.
7. Levakov, A.A. and Vas'kovskii, M.M., Properties of solutions of stochastic differential equations with standard and fractional Brownian motions, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 8, pp. 972–980.
8. Vas'kovskii, M.M., Stability and attraction of solutions of nonlinear stochastic differential equations with standard and fractional Brownian motions, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 2, pp. 157–170.
9. Levakov, A.A. and Vas'kovskii, M.M., *Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya i vklucheniya* (Stochastic Differential Equations and Inclusions), Minsk: Bel. Gos. Univ., 2019.
10. Nualart, D. and Rascanu, A., Differential equations driven by fractional Brownian motion, *Collectanea Mathematica*, 2002, vol. 53, no. 1, pp. 55–81.
11. Lyons, T., Differential equations driven by rough signals, *Revista Matematica Iberoamericana*, 1998, vol. 14, no. 2, pp. 215–310.
12. Gubinelli, M., Controlling rough paths, *J. Funct. Anal.*, 2004, vol. 216, no. 1, pp. 86–140.
13. Friz, P. and Hairer, M., *A Course on Rough Paths with an Introduction to Regularity Structures*, Cham: Springer, 2014.

14. Vaskouski, M. and Kachan, I., Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than $1/3$, *Stochastic Anal. Appl.*, 2018, vol. 36, no. 6, pp. 909–931.
15. Vas'kovskii, M.M. and Karpovich, A.A., Finiteness of moments of solutions to mixed-type stochastic differential equations driven by standard and fractional Brownian motions, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 148–154.
16. Coutin, L. and Qian, Z., Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions, *Probability Theory Related Fields*, 2002, vol. 122, no. 1, pp. 108–140.
17. Vas'kovskii, M.M., Existence and uniqueness of solutions of differential equations weakly controlled by rough paths with an arbitrary positive Holder exponent, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 10, pp. 1279–1291.
18. Vas'kovskii, M.M., Stability of solutions of stochastic differential equations weakly controlled by rough paths with arbitrary positive Holder exponent, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 11, pp. 1419–1425.
19. Vas'kovskii, M.M., Analog of the Kolmogorov equations for one-dimensional stochastic differential equations controlled by fractional Brownian motion with Hurst exponent $H \in (0, 1)$, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 1, pp. 9–14.
20. Harang, F.A., On the theory of rough paths, fractional and multifractional Brownian motion with applications to finance: dissertation ... master of mathematics. Oslo, 2015.