

УДК 517.977

ФИНИТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ И НАЗНАЧЕНИЕ КОНЕЧНОГО СПЕКТРА ЕДИНЫМ РЕГУЛЯТОРОМ ПО НЕПОЛНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

© В. Е. Хартовский

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Беларусь

e-mail: hartovskij@grsu.by, hartows@mail.ru

Поступила в редакцию 08.12.2023 г., после доработки 08.12.2023 г.; принята к публикации 22.03.2024 г.

Для линейной автономной дифференциально-разностной системы нейтрального типа доказан критерий существования и предложен метод проектирования регулятора с обратной связью по наблюдаемому выходу, обеспечивающего замкнутой системе одновременно финитную стабилизацию (решение задачи полной 0-управляемости) и конечный наперёд заданный спектр, что позволяет сделать замкнутую систему экспоненциально устойчивой. Конструктивность представленных результатов проиллюстрирована примером.

Ключевые слова: линейная система нейтрального типа, регулятор, наблюдаемый выходной сигнал, финитная стабилизация, конечный спектр.

DOI: 10.31857/S0374064124050093, EDN: LBELGX

ВВЕДЕНИЕ

В отличие от конечномерных линейных автономных систем, стабилизируемость которых заключается в управлении всеми её неустойчивыми собственными движениями, для бесконечномерных систем вопрос стабилизируемости достаточно сложен [1–7] и на сегодняшний день до конца не изучен. Один из возможных подходов к его решению заключается в вычислении неустойчивых собственных значений спектра с последующей их заменой подходящим спектральным набором. Однако даже поиск таких значений является нетривиальной задачей. Кроме того, в случае некоторых бесконечномерных объектов, например систем нейтрального типа, из асимптотической устойчивости не следует экспоненциальная устойчивость, что обуславливает необходимость привлечения других методов. Поэтому более универсальным является подход, основанный на решении задачи назначения замкнутой системе конечного спектра [8–10], как правило состоящего из чисел с отрицательными действительными частями. Более слабый вариант этой задачи заключается в приведении системы к конечному, в общем случае не произвольному, спектру. Решение такой задачи для систем нейтрального типа [11] упрощает с вычислительной точки зрения исследование задачи стабилизации. Кроме того, при наличии конечного спектра отрицательность действительных частей всех собственных значений влечёт не только асимптотическую, но и экспоненциальную устойчивость.

В случае системы, функционирующей в различных режимах, возникает задача одновременной стабилизации семейства объектов с запаздыванием при помощи единого регулятора.

В статье [12] даётся общий подход выбора требуемого регулятора в виде некоторой линейной комбинации регуляторов, построенных для отдельных систем.

Множество собственных значений линейной системы с последствием в общем случае бесконечно, поэтому вопрос управления всеми собственными значениями такой системы естественно рассматривать как управление коэффициентами характеристического квазиполинома — задача модального управления [13–16]. Другое направление исследований, связанное с проблемой стабилизации, заключается [10, 17–19] в решении задачи построения регулятора с обратной связью, успокаивающего решение исходной системы, т.е. обеспечивающего финитную стабилизацию [20, 21] (другими словами, решение задачи полной 0-управляемости регулятором с обратной связью). Одна из оригинальных идей решения задачи финитной стабилизации заключается [17] в замыкании системы обратной связью так, чтобы замкнутая система стала системой с конечным спектром, точно вырожденной в направлениях, соответствующих компонентам вектора-решения исходной системы. Системное изложение результатов [11, 14, 18, 19] и более полное обсуждение затронутых здесь вопросов содержится в монографии [22].

В настоящей статье для линейных автономных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями предложено решение задачи синтеза регулятора полной стабилизации по выходу, под которым понимается регулятор в виде линейной обратной связи по измерениям наблюдаемого выходного сигнала, одновременно обеспечивающий финитную стабилизацию и приведение замкнутой системы к конечному наперёд заданному спектру. Последнее позволяет обеспечить замкнутой системе не только асимптотическую, но и экспоненциальную устойчивость. Подобная задача в случае системы запаздывающего типа со скалярными входным и выходным сигналами изучена в [21]. В настоящей статье, в отличие от [21], регулятор полной стабилизации по выходу представляет собой модификацию регуляторов из [18, 19], которая заключается в том, что во внутренний контур нового регулятора дополнительно встраивается система оценки решения в виде финитного наблюдателя [23] (т.е. наблюдателя, ошибка оценки решения которого является финитной функцией). Параметры регулятора выбираются таким образом, чтобы замкнутая система стала точно вырожденной в направлениях, соответствующих компонентам решения исходной (разомкнутой) системы и компонентам оценки этого решения контуром финитного наблюдателя.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть исследуемый объект управления описывается линейной автономной дифференциально-разностной системой нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - \sum_{i=1}^m D_i \dot{x}(t-ih) &= \sum_{i=0}^m \left(A_i x(t-ih) + B_i u(t-ih) \right), \quad t > 0, \\ y(t) &= \sum_{i=0}^m C_i x(t-ih), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

где x — решение этой системы, u — управление, y — наблюдаемый выходной сигнал (выход), $h > 0$ — постоянная; $D_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C_i \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $n, r \in \mathbb{N}$.

Обозначим: $I_i \in \mathbb{R}^{i \times i}$ — единичная матрица, λ_h — оператор сдвига, определяемый для заданного числа $h > 0$ правилом $(\lambda_h)^k f(t) = f(t - kh)$, $k \in \mathbb{N}$ (для произвольной функции f). Введём полиномиальные матрицы

$$D(\lambda) = \sum_{i=1}^m \lambda^i D_i, \quad A(\lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda^i A_i, \quad C(\lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda^i C_i, \quad B(\lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda^i B_i$$

и перепишем исходный объект управления в операторном виде

$$(I_n - D(\lambda_h))\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + B(\lambda_h)u(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

В дальнейшем будем использовать исходную систему в виде (1), (2).

Решение уравнения (1) однозначно задаётся начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), \quad u(t) \equiv 0, \quad t \in [-mh, 0]. \quad (3)$$

Считаем, что начальная функция φ в (3) принадлежит классу непрерывных функций, имеющих кусочно-непрерывную производную, и является неизвестной. Управление u выбирается из класса кусочно-непрерывных функций.

Цель настоящей работы — построить регулятор с линейной обратной связью по наблюдаемому выходу (2) в виде

$$u(t) = \mathcal{U}_1(y, x_1), \quad \dot{x}_1(t) = \mathcal{U}_2(y, x_1), \quad (4)$$

который обеспечит выполнение следующих условий: а) какова бы ни была начальная функция φ в (3), существует число $t_1 > 0$ такое, что компонента x вектора-решения $\text{col}[x, x_1]$ замкнутой системы (1), (4) равна нулю, начиная с момента времени t_1 : $x(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$; б) замкнутая система является асимптотически устойчивой линейной автономной системой нейтрального типа с соизмеримыми сосредоточенными и распределёнными запаздываниями и с наперёд заданным конечным спектром. Здесь x_1 — вспомогательная переменная, $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ — некоторые операторы, обеспечивающие условие б), подробное описание $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ не приводится, поскольку ниже они будут выписаны в явном виде.

Регулятор, обеспечивающий реализацию условий а), б), будем называть *регулятором полной стабилизации по выходу*.

Таким образом, регулятор полной стабилизации по выходу обеспечивает одновременное решение трёх задач: задачу финитной стабилизации, задачу приведения к конечному спектру, задачу стабилизации. При этом, в отличие от [18; 19; 22, с. 358], решение указанных задач осуществляется по неполным измерениям, которые определяются выходом y при неизвестной начальной функции φ .

Обозначим $W(p, \lambda) = p(I_n - D(\lambda)) - A(\lambda)$. Пусть для системы (1) существует регулятор полной стабилизации по выходу, а замкнутая этим регулятором система является системой нейтрального типа. В этом случае система (1) является полностью 0-управляемой. Кроме того, возможность обеспечить любой наперёд заданный конечный спектр предполагает наличие у системы (1) свойства модальной управляемости. Критерии полной 0-управляемости [24] и модальной управляемости [14] совпадают по форме и представляют собой одновременное выполнение следующих условий:

$$\text{rank} [W(p, e^{-ph}), B(e^{-ph})] = n, \quad p \in \mathbb{C}; \quad (5)$$

$$\text{rank} [I_n - D(\lambda), B(\lambda)] = n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

Замечание 1. Требование того, чтобы замкнутая система (1), (2), (4) была системой нейтрального типа, отмеченное в условии б), является существенным. Действительно, обеспечить для любой начальной функции φ из (3) тождество $x(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$, регулятором в виде обратной связи, зависящей от $x(t)$, возможно [18; 19; 22, с. 358] и для более широкого класса систем нейтрального типа (1) (класс 0-управляемых систем [22, с. 358]). Кроме того, в [14;

22, с. 321] предложен подход, основанный на свойстве слабой модальной управляемости и позволяющий управлять коэффициентами характеристического квазиполинома в случае отсутствия у исходной системы (1) свойства модальной управляемости. Однако в обоих случаях замкнутая система будет дифференциально-алгебраической системой с запаздыванием.

Возможность восстановить “отрезок” решения $x(t)$, $t \in [t_0 - mh, t_0]$, при помощи непрерывного оператора, определённого на множестве всех выходов (2) системы (1), называют [22, с. 182] *финальной наблюдаемостью*. Критерий финальной наблюдаемости системы (1) представляет собой одновременное выполнение двух условий [22, с. 204; 24]:

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}; \quad (7)$$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ C(\lambda) \end{bmatrix} = n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (8)$$

Условие (7) необходимо и достаточно для взаимно-однозначного соответствия между множеством “отрезков” $x(t)$, $t \in [t_0 - mh, t_0]$, решений системы (1) и множеством выходов $y(t)$, $[0, t_0]$ (при достаточно большом $t_0 > 0$). Условие (8) необходимо для того, чтобы такое взаимно-однозначное соответствие было непрерывным, в частности, не содержало операцию дифференцирования выхода. При проектировании регулятора полной стабилизации по выходу будет доказано (теорема 2), что для его существования условия полной 0-управляемости (5), (6) и финальной наблюдаемости (7), (8) являются необходимыми.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Приведём ряд обозначений, которые будем использовать ниже для описания распределённых запаздываний в регуляторе полной стабилизации по выходу.

Введём [22, с. 252] множество $\mathbf{J}^{r \times n}$, состоящее из операторов $\mathfrak{J}$, характеризующихся следующим условием: если $\mathfrak{J} \in \mathbf{J}^{r \times n}$, то $\mathfrak{J}: \mathbf{PC}^{(1)}(\Delta_{\mathfrak{J}}, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^r$ и $\mathfrak{J}$ имеет вид

$$\mathfrak{J}[\varphi] = J_0(\lambda_h)\varphi(0) + J_1(\lambda_h)\dot{\varphi}(0) + \sum_{k=0}^{\tilde{m}} \int_0^h J_0^{(k)}(s)\varphi(-kh-s)ds. \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{PC}^{(1)}(\Delta, \mathbb{R}^n)$ — множество кусочно-непрерывных на отрезке $\Delta \subset \mathbb{R}$ функций, имеющих на этом отрезке кусочно-непрерывную производную; $J_0(\lambda), J_1(\lambda) \in \mathbb{R}^{r \times n}[\lambda]$; $\mathbb{R}^{r \times n}[\lambda]$ — множество матриц размерности $r \times n$, элементами которых являются полиномы переменной λ ; $\tilde{m} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ — любое число;

$$J_0^{(k)}(s) = \sum_{\rho=0}^{\tilde{m}_k} e^{\alpha_{k\rho}s} \left(J_1^{(k\rho)}(s) \cos(\beta_{k\rho}s) + J_2^{(k\rho)}(s) \sin(\beta_{k\rho}s) \right),$$

где $\alpha_{k\rho}, \beta_{k\rho} \in \mathbb{R}$, $\tilde{m}_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ — произвольные числа, $J_j^{(k\rho)}(s) \in \mathbb{R}^{r \times n}[s]$, $j = 1, 2$. Число $h_{\mathfrak{J}}$ и отрезок $\Delta_{\mathfrak{J}}$ зависят от оператора $\mathfrak{J}$ и определяются формулами $h_{\mathfrak{J}} = h \max \{ \deg J_0(\lambda), \tilde{m} + 1 \}$, $\Delta_{\mathfrak{J}} = [-h_{\mathfrak{J}}, 0]$. Для любого оператора $\mathfrak{J}$ и кусочно-непрерывной функции $x(t)$, $t \geq -h_{\mathfrak{J}}$, будем обозначать: $x_t = x_t(\tau) = x(t + \tau)$, $\tau \in \Delta_{\mathfrak{J}}$, $t \geq 0$ (для переменных с нижним индексом вида x_1 будем использовать запись $x_{1,t}$),

$$\mathfrak{J}[x_t] = J_0(\lambda_h)x(t) + J_1(\lambda_h)\dot{x}(t) + \sum_{k=0}^{\tilde{m}} \int_0^h J_0^{(k)}(s)x(t - kh - s)ds.$$

Оператору (9) поставим в соответствие матрицу

$$J(p, e^{-ph}) = J_0(e^{-ph}) + pJ_1(e^{-ph}) + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^h J_0^{(k)}(s) e^{-p(kh+s)} ds. \quad (10)$$

Воспользовавшись формулами Эйлера для записи комплексных чисел в тригонометрической форме, вычислим интегралы в (10), после этого положим $\lambda = e^{-ph}$. В итоге соотношение (10) примет вид

$$J(p, \lambda) = J_0(\lambda) + pJ_1(\lambda) + J_2(p, \lambda). \quad (11)$$

Элементами матрицы $J_2(p, \lambda)$ (если она не нулевая) являются правильные относительно переменной p дробно-рациональные функции вида $b(p, \lambda)/c(p)$, где $b(p, \lambda)$ и $c(p)$ — полиномы с комплексными коэффициентами, причём $c(p) \not\equiv \text{const}$.

Определим отображение σ , которое каждому оператору $\mathfrak{J} \in \mathbf{J}^{r \times n}$ вида (9) ставит в соответствие матрицу $J(p, \lambda)$ вида (11), каковы бы ни были $r, n \in \mathbb{N}$. Действие отображения σ будем записывать как $\mathfrak{J} \mapsto J(p, \lambda)$.

Множество всевозможных матриц (11), которые представимы в виде (10), обозначим как $\mathcal{C}^{r \times n}(p, \lambda)$ ($\mathcal{C}^{1 \times 1}(p, \lambda) = \mathcal{C}(p, \lambda)$). Следующее утверждение (см. следствие 1 в [10] или теорему 5.2 в [22, с. 259]) является критерием принадлежности дробно-рациональной функции множеству $\mathcal{C}(p, \lambda)$.

Лемма. Рассмотрим дробно-рациональную функцию $a(p, \lambda) = a_1(p, \lambda)/a_2(p)$, где $a_2(p) = \prod_{i=1}^{\widehat{l}} (p - p_i)^{l_i}$, $p_i \in \mathbb{C}$ ($p_i \neq p_j$ при $i \neq j$), $\widehat{l}, l_i \in \mathbb{N}$. Функция $a(p, \lambda)$ принадлежит множеству $\mathcal{C}(p, \lambda)$ тогда и только тогда, когда $\deg_p a_1(p, \lambda) \leq \deg_p a_2(p)$ (символ $\deg_p$ обозначает степень полинома (матричного полинома), зависящего от переменной p), и выполняются равенства $d^j a_1(p, e^{-ph}) / (dp^j)|_{p=p_i} = 0$, $j = \overline{0, l_i - 1}$, $i = \overline{1, \widehat{l}}$.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для построения регулятора полной стабилизации по выходу понадобится финитный наблюдатель, позволяющий за конечное время получить точную оценку решения системы (1), (2), т.е. наблюдатель, ошибка оценивания которого — финитная функция. В работе [23] для систем нейтрального типа предложен метод построения финитного наблюдателя в виде выхода системы запаздывающего типа с соизмеримыми сосредоточенными и распределёнными запаздываниями и с конечным наперёд заданным спектром. Однако для решения рассматриваемой нами задачи в конструкцию наблюдателя из [23] необходимо внести некоторые изменения. Остановимся на этом подробнее.

Будем считать, что выполняются условия (7), (8). В силу условия (8) найдутся [14, 19] матрицы $\tilde{L}_1(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times l}[\lambda]$ и $\tilde{L}_2(\lambda) \in \mathbb{R}^{l \times l}[\lambda]$ такие, что справедливо тождество

$$|I_{n+l} - D_{\tilde{L}}(\lambda)| \equiv 1, \quad (12)$$

где

$$D_{\tilde{L}}(\lambda) = \begin{bmatrix} D(\lambda) & \lambda \tilde{L}_1(\lambda) \\ C(\lambda) & \lambda \tilde{L}_2(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Пусть $\Pi(\lambda)$ — матрица, присоединённая к матрице $I_{n+l} - D_{\tilde{L}}(\lambda)$, имеющая вид

$$\Pi(\lambda) = \begin{bmatrix} \Pi_{11}(\lambda) & \Pi_{12}(\lambda) \\ \Pi_{21}(\lambda) & \Pi_{22}(\lambda) \end{bmatrix},$$

где блоки $\Pi_{11}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times n}[\lambda]$, $\Pi_{12}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times l}[\lambda]$, $\Pi_{21}(\lambda) \in \mathbb{R}^{l \times n}[\lambda]$, $\Pi_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{l \times l}[\lambda]$. В силу тождества (12) получаем, что $\Pi(\lambda) = (I_{n+l} - D_{\tilde{L}}(\lambda))^{-1}$. Введём новую функцию $\tilde{x}(t)$ по формуле

$$\tilde{x}(t) = (I_n - D(\lambda_h))x(t), \quad t \geq 0. \quad (13)$$

Пусть $\chi(t)$ ($\chi \in \mathbb{R}^l$, $t \in \mathbb{R}$) — произвольная функция. Действуя на очевидное равенство

$$\begin{bmatrix} I_n - D(\lambda_h) & -\lambda_h \tilde{L}_1(\lambda_h) \\ -C(\lambda_h) & I_r - \lambda_h \tilde{L}_2(\lambda_h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \chi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ -y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_h \tilde{L}_1(\lambda_h) \chi(t) \\ (I_r - \lambda_h \tilde{L}_2(\lambda_h)) \chi(t) \end{bmatrix}, \quad t \geq 0,$$

слева оператором $\Pi(\lambda_h)$, приходим к соотношению

$$x(t) = \Pi_{11}(\lambda_h) \tilde{x}(t) - \Pi_{12}(\lambda_h) y(t), \quad t \geq \gamma_2 h, \quad (14)$$

где $\gamma_2 = \max\{\nu_{1j}\}$, $j = 1, 2$, $\nu_{ij} = \deg_{\lambda} \Pi_{ij}(\lambda)$. С учётом формул (13), (14) систему (1), (2) перепишем в виде

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}(\lambda_h) \tilde{x}(t) + B(\lambda_h) u(t) - A(\lambda_h) \Pi_{12}(\lambda_h) y(t), \quad t > \gamma_3 h, \quad (15)$$

$$\tilde{y}(t) = \tilde{C}(\lambda_h) \tilde{x}(t), \quad t \geq \gamma_3 h, \quad (16)$$

где $\tilde{A}(\lambda) = A(\lambda) \Pi_{11}(\lambda)$,

$$\tilde{C}(\lambda) = \begin{bmatrix} C(\lambda) \Pi_{11}(\lambda) \\ (I_n - D(\lambda)) \Pi_{11}(\lambda) - I_n \end{bmatrix},$$

выходной сигнал $\tilde{y}(t)$, $t \geq \gamma_3 h$, является известной функцией и определяется формулой

$$\tilde{y}(t) = C_y(\lambda_h) y(t), \quad C_y(\lambda) = \begin{bmatrix} I_l + C(\lambda) \Pi_{12}(\lambda) \\ (I_n - D(\lambda)) \Pi_{12}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad t \geq \gamma_3 h, \quad \gamma_3 = m + \gamma_2.$$

Уравнение (15) является неоднородным линейным автономным дифференциально-разностным уравнением запаздывающего типа с соизмеримыми запаздываниями и неоднородной частью $B(\lambda_h)u - A(\lambda_h)\Pi_{12}(\lambda_h)y$. При этом в силу соотношения (7) для системы (15), (16) выполняется условие [23]

$$\text{rank} \begin{bmatrix} pI_n - \tilde{A}(e^{-ph}) \\ \tilde{C}(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}. \quad (17)$$

Зафиксируем произвольный номер $i_0 \in \{1, \dots, n+l\}$. Так как выполняется условие (17), то для любого фиксированного i_0 найдётся [8] матрица $V_{i_0}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times (n+l)}[\lambda]$ такая, что

$$\text{rank} \begin{bmatrix} pI_n - \tilde{A}(e^{-ph}) - V_{i_0}(e^{-ph}) \tilde{C}(e^{-ph}) \\ \tilde{c}_{i_0}(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}, \quad (18)$$

где $\tilde{c}_{i_0}(\lambda)$ — строка матрицы $\tilde{C}(\lambda)$ с номером i_0 . Положим

$$\tilde{A}_V(\lambda) = \tilde{A}(\lambda) + V_{i_0}(\lambda) \tilde{C}(\lambda), \quad K_0(\lambda) = -A(\lambda) \Pi_{12}(\lambda_h) - V_{i_0}(\lambda) C_y(\lambda). \quad (19)$$

После этого, используя уравнения (15), (16), заменим систему (1), (2) системой запаздывающего типа со скалярным известным выходом

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}_V(\lambda_h)\tilde{x}(t) + B(\lambda_h)u(t) + K_0(\lambda_h)y(t), \quad t > \tilde{t}_1, \\ \tilde{y}_{i_0}(t) &= \tilde{c}_{i_0}(\lambda_h)\tilde{x}(t), \quad t \geq \tilde{t}_1,\end{aligned}\quad (20)$$

где $\tilde{y}_{i_0}(t)$ — компонента вектора $\tilde{y}$ с номером i_0 , $\tilde{t}_1 = (\nu_0 + \gamma_3)h$, $\nu_0 = \deg_\lambda V_{i_0}(\lambda)$.

Зададим произвольный приведённый полином $d(p)$, $\deg_p d(p) = n + 3$, имеющий по крайней мере один действительный корень. Этот полином будет характеристическим полиномом системы, определяющей финитный наблюдатель, поэтому его следует выбрать асимптотически устойчивым. В силу условия (18) для системы (20) существует финитный наблюдатель в виде системы запаздывающего типа с соизмеримыми сосредоточенными и распределёнными запаздываниями

$$\dot{z}(t) = \Omega[z_t] + K(\lambda_h)y(t) + \overline{B}(\lambda_h)u(t), \quad t > \tilde{t}_1, \quad (21)$$

с выходом

$$v_z(t) = [I_n, 0_{n \times 3}]z(t), \quad t \geq \tilde{t}_1. \quad (22)$$

Здесь $z = \text{col}[z_1, z_2]$, $z_1 \in \mathbb{R}^n$, $z_2 \in \mathbb{R}^3$, $\Omega \in \mathbf{J}^{(n+3) \times (n+3)}$, $0_{n \times m}$ — нулевая $n \times m$ -матрица,

$$\overline{B}(\lambda) = \begin{bmatrix} B(\lambda) \\ 0_{3 \times r} \end{bmatrix}; \quad (23)$$

матрица $Q(p, \lambda)$, где $\Omega \xrightarrow{\sigma} Q(p, \lambda)$, определяется по схеме построения матрицы, задающей финитный наблюдатель для однородной системы запаздывающего типа, предложенной в работе [23], причём элементы матрицы $Q(p, \lambda)$ таковы, что

$$|pI_{n+3} - Q(p, \lambda)| = d(p); \quad (24)$$

матрица $K(\lambda)$ определяется из равенства

$$K(\lambda_h)y(t) = \text{col}[K_0(\lambda_h), 0_{3 \times l}]y(t) - e_{n+1}\tilde{y}_{i_0}(t) = (\text{col}[K_0(\lambda_h), 0_{3 \times l}] - e_{n+1}\tilde{e}'_{i_0}C_y(\lambda_h))y(t), \quad (25)$$

где e_i , $\tilde{e}_i$ — столбцы соответственно матриц I_{n+3} , I_{n+l} с номером i (символ “ $'$ ” обозначает операцию транспонирования). Приведём матрицу $Q(p, \lambda)$ в виде, который понадобится далее:

$$Q(p, \lambda) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \tilde{a}_{11}^V(\lambda) & \dots & \tilde{a}_{1n}^V(\lambda) & g_{11}(p, \lambda) & g_{12}(p, \lambda) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{n1}^V(\lambda) & \dots & \tilde{a}_{nn}^V(\lambda) & g_{n1}(p, \lambda) & g_{n2}(p, \lambda) & 0 \\ \hline \tilde{c}_{i_0}^1(\lambda) & \dots & \tilde{c}_{i_0}^n(\lambda) & g_{n+11}(p, \lambda) & g_{n+12}(p, \lambda) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_1(\lambda) & 0 & b_2(\lambda) \\ 0 & \dots & 0 & b_3(\lambda) & 0 & b_4(\lambda) \end{array} \right], \quad (26)$$

где $\tilde{a}_{ij}^V(\lambda)$ — элементы матрицы $\tilde{A}_V(\lambda) = [\tilde{a}_{ij}^V(\lambda)]_{n \times n}$; $\tilde{c}_{i_0}^j(\lambda)$ — элементы вектора $\tilde{c}_{i_0}(\lambda) = [\tilde{c}_{i_0}^1(\lambda), \dots, \tilde{c}_{i_0}^n(\lambda)]$; $g_{ij}(p, \lambda) \in \mathcal{C}(p, \lambda)$; $b_j(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$. Функции $g_{ij}(p, \lambda)$ и полиномы $b_j(\lambda)$ определяются согласно статье [23].

В качестве начальной функции для системы (21) берётся любая непрерывная на отрезке $[\tilde{t}_1 - h_\Omega, \tilde{t}_1]$ функция.

Оценка решения $\tilde{x}$ системы (20) наблюдателем (21), (22) определяется выходом v_z , который, начиная с некоторого момента времени, равен решению $\tilde{x}$ независимо от начальных функций систем (20) и (21).

Поясним идею выбора элементов матрицы $Q(p, \lambda)$. Обозначим через $\zeta = v_z - \tilde{x} = z_1 - \tilde{x}$ ошибку оценки, $\tilde{\zeta} = \text{col}[\zeta, z_2]$. Тогда из (26) видно, что вектор-функция $\tilde{\zeta}(t)$ определяется линейной автономной системой запаздывающего типа

$$\dot{\tilde{\zeta}}(t) = \mathfrak{Q}[\tilde{\zeta}_t], \quad t > \tilde{t}_1. \quad (27)$$

Элементы матрицы $Q(p, \lambda)$ выбираются так, чтобы система (27) была точно вырожденной в направлениях, отвечающих первым n столбцам матрицы I_{n+3} , т.е. в направлениях e_i , $i = \overline{1, n}$. Согласно определению точечной вырожденности это означает [25], что найдётся момент времени $\tilde{t}_2$ такой, что какова бы ни была начальная функция, определяющая решение системы (27), будут выполняться тождества $e'_i \tilde{\zeta}(t) \equiv 0$, $t \geq \tilde{t}_2$, $i = \overline{1, n}$. Это, в свою очередь, значит, что

$$v_z(t) = \tilde{x}(t), \quad t \geq \tilde{t}_2. \quad (28)$$

Замечание 2. Если для построения матрицы $Q(p, \lambda)$ использовать подход [23], то у системы (27) будут вырождаться все компоненты вектора решения $\text{col}[\zeta, z_2]$, за исключением одной компоненты вектора z_2 (будем считать, что это последняя компонента), т.е. будут иметь место тождества $e'_i \tilde{\zeta}(t) \equiv 0$, $t \geq \tilde{t}_2$, $i = \overline{1, n+2}$.

Теперь сформируем оценку решения исходной системы (1), (2). Рассмотрим соотношение (14). Положим

$$v(t) = \Pi_{11}(\lambda_h)[I_n, 0_{n \times 3}]z(t) - \Pi_{12}(\lambda_h)y(t), \quad t \geq \tilde{t}_1. \quad (29)$$

В силу равенства (28) и формулы (14) получим, что

$$x(t) = v(t), \quad t \geq \tilde{t}_3, \quad \tilde{t}_3 = \tilde{t}_2 + \nu_{11}h. \quad (30)$$

Это завершает построение финитного наблюдателя, определяемого уравнениями (21), (29).

По аналогии с [23] несложно показать, что если существует финитный наблюдатель (21), (29), то для системы (1), (2) выполняются условия (7), (8).

Проведённые рассуждения обобщает

Теорема 1. Условия (7), (8) являются необходимыми и достаточными для существования финитного наблюдателя (21), (29) системы (1), (2), для которого имеет место условие (24).

4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Регулятор полной стабилизации по выходу будем строить в виде

$$u(t) = \mathfrak{R}_{01}[x_{1,t}] + \mathfrak{R}_{02}[x_{2,t}] + \mathfrak{R}_{00}[y_t], \quad t > t_0, \quad (31)$$

$$\dot{x}_1(t) = \mathfrak{R}_{11}[x_{1,t}] + \mathfrak{R}_{12}[x_{2,t}] + \mathfrak{R}_{10}[y_t], \quad t > t_0, \quad (32)$$

$$\dot{x}_2(t) = \mathfrak{R}_{22}[x_{2,t}] + \overline{B}(\lambda_h)(\mathfrak{R}_{01}[x_{1,t}] + \mathfrak{R}_{02}[x_{2,t}] + \mathfrak{R}_{00}[y_t]) + S(\lambda_h)y(t), \quad t > t_0, \quad (33)$$

где $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$, — вспомогательные переменные, $\mathfrak{R}_{0j} \in \mathbf{J}^{r \times n_j}$, $\mathfrak{R}_{1j} \in \mathbf{J}^{n_1 \times n_j}$, $j = 1, 2$, $\mathfrak{R}_{00} \in \mathbf{J}^{r \times l}$, $\mathfrak{R}_{10} \in \mathbf{J}^{n_1 \times l}$, $\mathfrak{R}_{22} \in \mathbf{J}^{n_2 \times n_2}$, $S(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_2 \times l}[\lambda]$, матрица $\overline{B}(\lambda)$ определена формулой (23), $t_0 \geq \alpha h$, $\alpha = \max\{m + h^{-1}h_{\mathfrak{R}_{00}}, h^{-1}h_{\mathfrak{R}_{10}}, \deg_{\lambda} S(\lambda)\}$; считаем $u(t) \equiv 0$, $t < t_0$.

Замечание 3. При замыкании системы (1), (2) регулятором (31)–(33) начальное условие выбирается так, чтобы замкнутая система (1), (2), (31)–(33) имела единственное решение. Для определённости предполагаем, что функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, $t \leq t_0$, являются произвольными непрерывными функциями с кусочно-непрерывными производными.

Пусть $\mathfrak{R}_{ij} \xrightarrow{\sigma} R_{ij}(p, \lambda)$. Выпишем характеристическую матрицу $W_1(p, e^{-ph})$ системы (1), (2), замкнутой регулятором полной стабилизации по выходу (31)–(33) ($\lambda = e^{-ph}$):

$$W_1(p, \lambda) = \begin{bmatrix} W(p, \lambda) - B(\lambda)R_{00}(p, \lambda)C(\lambda) & -B(\lambda)R_{01}(p, \lambda) & -B(\lambda)R_{02}(p, \lambda) \\ -R_{10}(p, \lambda)C(\lambda) & pI_{n_1} - R_{11}(p, \lambda) & -R_{12}(p, \lambda) \\ -\left(S(\lambda) + \bar{B}(\lambda)R_{00}(p, \lambda)\right)C(\lambda) & -\bar{B}(\lambda)R_{01}(p, \lambda) & pI_{n_2} - R_{22}(p, \lambda) - \bar{B}(\lambda)R_{02}(p, \lambda) \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Теорема 2. Условия (5)–(8) необходимы и достаточны, чтобы для системы (1), (2) нашлись числа $\bar{n}_0 \in \mathbb{N}$, $t_1 > 0$ такие, что для любого заданного приведённого полинома $w(p)$, $\deg_p w(p) = \bar{n}$, $\bar{n} \geq \bar{n}_0$, имеющего два действительных корня (возможно равных между собой), существует регулятор полной стабилизации по выходу (31)–(33), обеспечивающий выполнение следующих условий:

1) каково бы ни было начальное условие системы (1), (2), (31)–(33), всегда выполняется тождество

$$x(t) \equiv 0, \quad t \geq t_1; \quad (35)$$

2) система (1), (2), (31)–(33) является системой нейтрального типа с характеристической матрицей $W_1(p, \lambda)$ и $|W_1(p, \lambda)| = w(p)$.

Доказательство. Необходимость. Необходимость условий (5), (6) очевидна. Докажем необходимость условий (7), (8). Введём вспомогательную систему

$$(I_n - \Phi_0(\lambda_h))\dot{\xi}(t) = \Phi(\lambda_h)\xi(t) + \Psi(\lambda_h)\bar{u}(t), \quad t > 0, \quad (36)$$

где $\Phi_0(\lambda_h) = (D(\lambda))'$, $\Phi(\lambda_h) = (A(\lambda))'$, $\Psi(\lambda) = (C(\lambda))'$, $\bar{u}$ — кусочно-непрерывное управление. Начальные условия для системы (36) выбираются аналогично начальным условиям (3).

Зададим произвольный полином $w(p)$ (из условия теоремы). Предположим, что для системы (1), (2) существует регулятор полной стабилизации по выходу, имеющий вид (31)–(33), который для заданного полинома $w(p)$ обеспечивает выполнение условий 1), 2). Используя параметры этого регулятора, определим для системы (36) регулятор следующего вида:

$$\bar{u}(t) = \mathfrak{H}_{01}[\xi_t] + \mathfrak{H}_{02}[\xi_{1,t}], \quad \dot{\xi}_1(t) = \mathfrak{H}_{11}[\xi_t] + \mathfrak{H}_{12}[\xi_{1,t}]. \quad (37)$$

Здесь $\mathfrak{H}_{01} \in \mathbf{J}^{l \times n}$, $\mathfrak{H}_{02} \in \mathbf{J}^{l \times (n_1 + n_2)}$, $\mathfrak{H}_{11} \in \mathbf{J}^{(n_1 + n_2) \times n}$, $\mathfrak{H}_{12} \in \mathbf{J}^{(n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2)}$ и $\mathfrak{H}_{ij} \xrightarrow{\sigma} H_{ij}(p, \lambda)$, где $H_{01}(p, \lambda) = (B(\lambda)R_{00}(p, \lambda))'$, $H_{02}(p, \lambda) = \left[(R_{10}(p, \lambda))', (S(\lambda) + \bar{B}(\lambda)R_{00}(p, \lambda))' \right]$,

$$H_{11}(p, \lambda) = \begin{bmatrix} (B(\lambda)R_{01}(p, \lambda))' \\ (B(\lambda)R_{02}(p, \lambda))' \end{bmatrix}, \quad H_{12}(p, \lambda) = \begin{bmatrix} (R_{11}(p, \lambda))' & (\bar{B}(\lambda)R_{01}(p, \lambda))' \\ (R_{12}(p, \lambda))' & (R_{22}(p, \lambda) + \bar{B}(\lambda)R_{02}(p, \lambda))' \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $W_\xi(p, e^{-ph})$ характеристическую матрицу системы (36), (37). Очевидно, что $W_\xi(p, \lambda) = (W_1(p, \lambda))'$, поэтому $|W_\xi(p, e^{-ph})| = w(p)$. Таким образом, получили, что для любого наперёд заданного полинома $w(p)$ существует регулятор (37) такой, что замкнутая система (36), (37) имеет нейтральный тип, а её характеристический полином равен $w(p)$.

Это означает [15; 22, с. 321], что система (36) является модально управляемой, поэтому для неё выполняются условия критерия модальной управляемости

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}[p(I_n - \Phi_0(e^{-ph})) - \Phi(e^{-ph}), \Psi(e^{-ph})] &= n, \quad p \in \mathbb{C}; \\ \operatorname{rank}[I_n - \Phi_0(\lambda), \Psi(\lambda)] &= n, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (38)$$

совпадающие с условиями (7), (8). Необходимость доказана.

Замечание 4. Задача приведения системы к наперёд заданному конечному спектру в литературе [8–10] называется *задачей назначения конечного спектра*. Из доказательств критерия модальной управляемости в работах [15; 22, с. 321] следует, что задача модальной управляемости разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача назначения конечного спектра. Этот факт используется при формулировке условий (38).

Достаточность. Положим $\bar{n}_0 = 2n + r + 4$ и зададим произвольный приведённый полином $w(p)$, имеющий два действительных корня (или один двукратный действительный корень). Представим полином $w(p)$ в виде $w(p) = w_1(p)w_2(p)$, где каждый из приведённых полиномов $w_1(p)$ и $w_2(p)$ имеет по крайней мере один действительный корень, $\deg_p w_2(p) = n + 3$, $\deg_p w_1(p) = \bar{n} - n - 3$, $\bar{n} \geq \bar{n}_0$. Доказательство достаточности условий теоремы проведём в два этапа: построим регулятор (31)–(33) и докажем, что он обеспечивает выполнение условий 1) и 2) теоремы.

1. Зададим любую непрерывную функцию φ в (3), имеющую кусочно-непрерывную производную. Поскольку выполняются условия (5), (6), то [19; 22, с. 360] для системы (1) и любого приведённого полинома $w_1(p)$, указанного выше, существует регулятор с обратной связью по состоянию

$$u(t) = \mathfrak{L}_{00}[x_t] + \mathfrak{L}_{01}[\bar{x}_{1,t}], \quad \dot{\bar{x}}_1(t) = \mathfrak{L}_{10}[x_t] + \mathfrak{L}_{11}[\bar{x}_{1,t}], \quad t > 0, \quad (39)$$

где $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ — вспомогательная переменная, $\mathfrak{L}_{00} \in \mathbf{J}^{r \times n}$, $\mathfrak{L}_{01} \in \mathbf{J}^{r \times n_1}$, $\mathfrak{L}_{10} \in \mathbf{J}^{n_1 \times n}$, $\mathfrak{L}_{11} \in \mathbf{J}^{n_1 \times n_1}$, для которого выполняются следующие условия:

– найдётся число $\bar{t}_1 > 0$ такое, что каково бы ни было начальное условие системы (1), (39) выполняется тождество

$$x(t) \equiv 0, \quad t \geq \bar{t}_1; \quad (40)$$

– система (1), (39) является линейной автономной системой нейтрального типа с соизмеримыми сосредоточенными и распределёнными запаздываниями и выполняется равенство

$$|W_2(p, \lambda)| = w_1(p). \quad (41)$$

Здесь $W_2(p, e^{-ph})$ — характеристическая матрица системы (1), (39), имеющая вид (ниже используется обозначение $\mathfrak{L}_{ij} \xrightarrow{\sigma} L_{ij}(p, \lambda)$)

$$W_2(p, \lambda) = \begin{bmatrix} W(p, \lambda) - B(\lambda)L_{00}(p, \lambda) & -B(\lambda)L_{01}(p, \lambda) \\ -L_{10}(p, \lambda) & pI_{n_1} - L_{11}(p, \lambda) \end{bmatrix}. \quad (42)$$

В качестве начального условия для системы (1), (39) берутся любые непрерывные функции $x(t)$, $\bar{x}_1(t)$, $t < 0$, имеющие кусочно-непрерывные производные, причём для функции x выполняется соотношение (3).

Акцентируем внимание на идейной стороне построения регулятора (39). Параметры операторов $\mathfrak{L}_{ij}$ в (39) выбираются так, чтобы система, соответствующая характеристической матрице (42), была точечно вырожденной в направлениях $\bar{e}_i$, $i = \overline{1, n}$, где $\bar{e}_i$ — столбец матрицы I_{n+n_1} с номером i , $\bar{e}'_i \operatorname{col}[x, \bar{x}_1] \equiv 0$, $i = \overline{1, n}$.

Замечание 5. Если для построения регулятора (39) использовать подходы [19; 22, с. 358], то у системы (1), (39) будут вырождаться все компоненты её вектор-решения $\text{col}[x, \bar{x}_1]$, за исключением одной компоненты вектора $\bar{x}_1$ (считаем, что это последняя компонента), т.е. $\bar{e}'_i \text{col}[x, \bar{x}_1] \equiv 0$, $i = \bar{1}, n + n_1 - \bar{1}$.

Так как выполняются условия (7), (8), то согласно теореме 1 для системы (1), (2) при известном управлении $u(t)$ существует финитный наблюдатель. Считаем, что этот наблюдатель определяется формулами (21), (29) и имеет место равенство (24), в котором $d(p) = w_2(p)$ (далее будем использовать обозначения, определённые в формулах (21), (29)).

Подставим управление $u(t)$, определяемое первым соотношением в формулах (39), в уравнение (21) и перепишем полученную систему в виде

$$\dot{z}(t) = \mathfrak{L}[z_t] + K(\lambda_h)y(t) + \bar{B}(\lambda_h)(\mathfrak{L}_{00}[x_t] + \mathfrak{L}_{01}[\bar{x}_{1,t}]), \quad t > \tilde{t}_1. \quad (43)$$

Уравнение (43) зависит как от переменной z , так и от переменных x , $\bar{x}_1$, поэтому наблюдатель совместно с формулой (29) (т.е. системой, позволяющей получить оценку решения исходной системы) не определяют. Однако легко видеть, что в данном случае имеет место равенство (30). Заменим в соотношениях (39) и (43) функцию $x(t)$ функцией $v(t)$ при $t > \bar{t}_2$, где $\bar{t}_2 = \tilde{t}_1 + \gamma_4 h$, γ_4 — максимальная степень переменной λ в матрицах $B(\lambda)L_{00}(p, \lambda)$ и $L_{10}(p, \lambda)$, и получим уравнения, описывающие регулятор (39) при $t > \bar{t}_2$ (при $t \in (0, \bar{t}_2]$ регулятор по-прежнему определяется уравнениями (39)):

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathfrak{L}_{00}[v_t] + \mathfrak{L}_{01}[\bar{x}_{1,t}], \quad \dot{\bar{x}}_1(t) = \mathfrak{L}_{10}[v_t] + \mathfrak{L}_{11}[\bar{x}_{1,t}], \quad t > \bar{t}_2, \\ \dot{z}(t) &= \mathfrak{L}[z_t] + K(\lambda_h)y(t) + \bar{B}(\lambda_h)(\mathfrak{L}_{00}[\theta_t] + \mathfrak{L}_{01}[\bar{x}_{1,t}]), \quad t > \tilde{t}_1, \\ v(t) &= \Pi_{11}(\lambda_h)[I_n, 0_{n \times 3}]z(t) - \Pi_{12}(\lambda_h)y(t), \quad t \geq \tilde{t}_1. \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь

$$\theta(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_3], \\ v(t), & t \geq \tilde{t}_3. \end{cases}$$

Заменив в первых двух соотношениях (44) при $t > \tilde{t}_3$ функцию $v(t)$ согласно формуле (29), а также поменяв переменные $\bar{x}_1$ и z на переменные x_1 и x_2 соответственно, получим уравнения, которые возьмём в качестве уравнений регулятора (31)–(33) при $t > t_0$. Для определённости выпишем матрицы $R_{ij}(p, \lambda)$ такого регулятора (напомним, что $\mathfrak{R}_{ij} \xrightarrow{\sigma} R_{ij}(p, \lambda)$):

$$\begin{aligned} R_{00}(p, \lambda) &= -L_{00}(p, \lambda)\Pi_{12}(\lambda), \quad R_{01}(p, \lambda) = L_{01}(p, \lambda), \quad R_{02}(p, \lambda) = L_{00}(p, \lambda)\Pi_{11}(\lambda)[I_n, 0_{n \times 3}], \\ R_{10}(p, \lambda) &= -L_{10}(p, \lambda)\Pi_{12}(\lambda), \quad R_{11}(p, \lambda) = L_{11}(p, \lambda), \quad R_{12}(p, \lambda) = L_{10}(p, \lambda)\Pi_{11}(\lambda)[I_n, 0_{n \times 3}], \\ R_{22}(p, \lambda) &= Q(p, \lambda), \quad S(\lambda) = K(\lambda). \end{aligned} \quad (45)$$

Регулятор (31)–(33) построен.

2. Докажем теперь, что регулятор (31)–(33) с матрицами (45) обеспечивает выполнение условий 1) и 2) теоремы для любого начального состояния, взятого согласно замечанию 3.

Представим переменную x_2 в соотношениях (31)–(33) как вектор, состоящий из двух векторных компонент: $x_2 = \text{col}[x_{21}, x_{22}]$, $x_{21} \in \mathbb{R}^n$, $x_{22} \in \mathbb{R}^3$, а матрицы $R_{i2}(p, \lambda)$, $i = \bar{1}, 2$, и $S(\lambda)$ в формулах (45) разобьём на блоки, отвечающие компонентам x_{21} , x_{22} , и запишем их подробно:

$$R_{02}(p, \lambda) = [L_{00}(p, \lambda)\Pi_{11}(\lambda), 0_{r \times 3}], \quad R_{12}(p, \lambda) = [L_{10}(p, \lambda)\Pi_{11}(\lambda), 0_{n_1 \times 3}],$$

$$R_{22}(p, \lambda) = \begin{bmatrix} A(\lambda)\Pi_{11}(\lambda) + V_{i_0}(\lambda)\tilde{C}(\lambda) & Q_{12}(p, \lambda) \\ Q_{21}(p, \lambda) & Q_{22}(p, \lambda) \end{bmatrix}, \quad S(\lambda) = \begin{bmatrix} K_0(\lambda) \\ -S_0(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Здесь вид блоков $Q_{12}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{n \times 3}[\lambda]$, $Q_{21}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{3 \times n}[\lambda]$, $Q_{22}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}[\lambda]$ соответствует разбиению на блоки матрицы $Q(p, \lambda)$ в формуле (26) (первый верхний блок матрицы (26) — это матрица $A_V(\lambda)$, описанная в (19)), $S_0(\lambda) = \text{col}[1, 0, 0]\tilde{e}'_{i_0}C_y(\lambda)$ (см. (25)).

Замечание 6. Ниже для доказательства теоремы необходимо будет выписать несколько матриц, разбитых на блоки, в обозначениях которых для компактности записей будем опускать аргументы. Например, записи типа B , $L_{00}\Pi_{11}$ и т.п. будут обозначать соответственно $B(\lambda)$, $L_{00}(p, \lambda)\Pi_{11}(\lambda)$ и т.п.

С учётом разбиения на блоки (46), определения матрицы $K_0(\lambda)$ по формуле (19) и вида матрицы $\bar{B}(\lambda)$ (см. (23)) перепишем характеристическую матрицу (34) в виде

$$W_1(p, \lambda) = \begin{bmatrix} W + BL_{00}\Pi_{12}C & -BL_{01} & -BL_{00}\Pi_{11} & 0_{n \times 3} \\ L_{10}\Pi_{12}C & pI_{n_1} - L_{11} & -L_{10}\Pi_{11} & 0_{n_1 \times 3} \\ BL_{00}\Pi_{12}C + (A\Pi_{12} + V_{i_0}C_y)C & -BL_{01} & pI_n - A\Pi_{11} - V_{i_0}\tilde{C} - BL_{00}\Pi_{11} & -Q_{12} \\ S_0C & 0_{3 \times n_1} & -Q_{21} & pI_3 - Q_{22} \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Обратим внимание, что при записи матрицы (47) предполагали, что порядок переменных соответствует следованию компонент вектора $\text{col}[x, x_1, x_{21}, x_{22}]$.

В системе (1), (2), (31)–(33) введём новую переменную ε согласно формуле

$$x_{21}(t) = (I_n - D(\lambda_h))x(t) + \varepsilon(t), \quad t \geq t_0. \quad (48)$$

Напомним, что замена переменных в системе равносильна умножению справа характеристической матрицы этой системы на матрицу, определяющую соответствующую замену. Легко видеть, что замена переменных (48) определяется унимодулярной матрицей (квадратной невырожденной матрицей с постоянным определителем)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x_1(t) \\ x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix} = \Omega(\lambda_h) \begin{bmatrix} x(t) \\ x_1(t) \\ \varepsilon(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad \Omega(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n_1} & 0_{n \times n} & 0_{n \times 3} \\ 0_{n_1 \times n} & I_{n_1} & 0_{n_1 \times n} & 0_{n_1 \times 3} \\ I_n - D(\lambda) & 0_{n \times n_1} & I_n & 0_{n \times 3} \\ 0_{3 \times n} & 0_{3 \times n_1} & 0_{3 \times n} & I_3 \end{bmatrix}, \quad |\Omega(\lambda)| \equiv 1,$$

которая не меняет определитель характеристической матрицы: $|W_1(p, \lambda)| = |W_1(p, \lambda)\Omega(\lambda)|$.

Для дальнейших преобразований матрицы $W_1(p, \lambda)\Omega(\lambda)$ понадобятся некоторые соотношения. Предварительно заметим, что из определения матриц $\Pi_{ij}(\lambda)$ следует формула

$$\Pi_{11}(\lambda)(I_n - D(\lambda)) - \Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) = I_n. \quad (49)$$

В матрице (47) к блоку, стоящему на месте с номером (3,1), прибавим блок, стоящий на месте с номером (3,3), предварительно умноженный на матрицу $I_n - D(\lambda)$ справа. Используя формулу (49), выпишем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} & B(\lambda)L_{00}(p, \lambda)\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) + (A(\lambda)\Pi_{12}(\lambda) + V_{i_0}(\lambda)C_y(\lambda))C(\lambda) + \\ & + (pI_n - A(\lambda)\Pi_{11}(\lambda) - V_{i_0}(\lambda)\tilde{C}(\lambda) - B(\lambda)L_{00}(p, \lambda)\Pi_{11}(\lambda))(I_n - D(\lambda)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= B(\lambda)L_{00}(p, \lambda)\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) + A(\lambda)\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) + V_{i_0}(\lambda) \left[\begin{pmatrix} I_l + C(\lambda)\Pi_{12}(\lambda) \\ I_n - D(\lambda) \end{pmatrix} C(\lambda) \right] + \\
&\quad + p(I_n - D(\lambda)) - A(\lambda)\Pi_{11}(\lambda)(I_n - D(\lambda)) - \\
&\quad - V_{i_0}(\lambda) \left[\begin{pmatrix} C(\lambda)\Pi_{11}(\lambda)(I_n - D(\lambda)) \\ ((I_n - D(\lambda))\Pi_{11}(\lambda) - I_n)(I_n - D(\lambda)) \end{pmatrix} \right] - B(\lambda)L_{00}(p, \lambda)\Pi_{11}(\lambda)(I_n - D(\lambda)) = \\
&\quad = -B(\lambda)L_{00}(p, \lambda) + p(I_n - D(\lambda)) - A(\lambda) + \\
&\quad + V_{i_0}(\lambda) \left[\begin{pmatrix} C(\lambda) + C(\lambda)(\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) - \Pi_{11}(\lambda)(I_n - D(\lambda))) \\ (I_n - D(\lambda))(\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) - \Pi_{11}(\lambda)(I_n - D(\lambda))) + (I_n - D(\lambda)) \end{pmatrix} \right] = \\
&\quad = W(p, \lambda) - B(\lambda)L_{00}(p, \lambda). \tag{50}
\end{aligned}$$

Затем в матрице (47) к первой строке блока, стоящего на месте с номером (4,1), прибавим первую строку блока, стоящего на месте с номером (4,3), умноженную на матрицу $I_n - D(\lambda)$ справа (обратим внимание, что оставшиеся две нижних строки указанных выше блоков являются нулевыми, это видно из (26) и вида матрицы $S_0(\lambda)$). На основе промежуточных рассуждений в равенствах (50) имеем соотношение

$$\begin{aligned}
&[1, 0, 0]S_0(\lambda)C(\lambda) - [1, 0, 0]Q_{21}(p, \lambda)(I_n - D(\lambda)) = \\
&= \tilde{e}'_{i_0} \left(\left[\begin{pmatrix} I_l + C(\lambda)\Pi_{12}(\lambda) \\ I_n - D(\lambda) \end{pmatrix} C(\lambda) \right] - \left[\begin{pmatrix} C(\lambda)\Pi_{11}(\lambda)(I_n - D(\lambda)) \\ ((I_n - D(\lambda))\Pi_{11}(\lambda) - I_n)(I_n - D(\lambda)) \end{pmatrix} \right] \right) = 0. \tag{51}
\end{aligned}$$

Теперь, используя формулу (49) и соотношения (50), (51), выпишем матрицу

$$W_1(p, \lambda)\Omega(\lambda) = \begin{bmatrix} W - BL_{00} & -BL_{01} & -BL_{00}\Pi_{11} & 0_{n \times 3} \\ -L_{10} & pI_{n_1} - L_{11} & -L_{10}\Pi_{11} & 0_{n_1 \times 3} \\ W - BL_{00} & -BL_{01} & pI_n - A\Pi_{11} - V_{i_0}\tilde{C} - BL_{00}\Pi_{11} & -Q_{12} \\ 0_{3 \times n} & 0_{3 \times n_1} & -Q_{21} & pI_3 - Q_{22} \end{bmatrix}. \tag{52}$$

В матрице (52) умножим первую строку блоков на -1 и прибавим к третьей, после чего полученной строкой заменим третью строку блоков. Матрицу, определяющую данное преобразование, обозначим Ω_1 . Очевидно, что $|\Omega_1| = 1$. В результате такого преобразования получаем

$$\begin{aligned}
\Omega_1 W_1(p, \lambda)\Omega(\lambda) &= \begin{bmatrix} W - BL_{00} & -BL_{01} & -BL_{00}\Pi_{11} & 0_{n \times 3} \\ -L_{10} & pI_{n_1} - L_{11} & -L_{10}\Pi_{11} & 0_{n_1 \times 3} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n_1} & pI_n - A\Pi_{11} - V_{i_0}\tilde{C} & -Q_{12} \\ 0_{3 \times n} & 0_{3 \times n_1} & -Q_{21} & pI_3 - Q_{22} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} W_2(p, \lambda) & \widetilde{W}(p, \lambda) \\ 0_{(n+1) \times (n+n_1)} & pI_{n+3} - Q(p, \lambda) \end{bmatrix}, \tag{53}
\end{aligned}$$

где блок $\widetilde{W}(p, \lambda)$ определяется очевидным образом. Из структуры матрицы (53) видно, что функция $\text{col}[\varepsilon, x_{21}]$ определяется системой с характеристической матрицей $I_{n+3} - Q(p, \lambda)$, т.е. системой вида (27), которая является точно вырожденной, поэтому $\varepsilon(t) \equiv 0$, $t \geq t_0 + \tilde{t}_2$. Значит, при $t \geq \tilde{t}_4$, $\tilde{t}_4 = t_0 + \tilde{t}_2 + \gamma_5 h$, где γ_5 — максимальная степень переменной λ в блоке $\widetilde{W}(p, \lambda)$, функция $\text{col}[x, x_1]$ определяется системой с характеристической матрицей (42),

которая является точно вырожденной. Поэтому при $t_1 = \bar{t}_1 + \bar{t}_4$, где $\bar{t}_1$ определено в (40), имеет место тождество (35).

Равенство $|W_1(p, \lambda)| = w(p)$ следует из вида матрицы $\Omega_1 W_1(p, \lambda) \Omega(\lambda)$ в (53) и равенств (41), (24) (напомним, что $d(p) = w_2(p)$). Теорема доказана.

5. ПРИМЕР

Проиллюстрируем подход к построению регулятора полной стабилизации по выходу на примере системы (1), (2) с матрицами

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(\lambda) = \begin{bmatrix} 2-2\lambda & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(\lambda) = B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C(\lambda) = [1 + \lambda, 0], \quad h = \ln 2. \quad (54)$$

Выпишем для данной системы матрицу

$$W(p, \lambda) = \begin{bmatrix} p(1-\lambda) - (2-2\lambda) & -1 \\ 0 & p \end{bmatrix}.$$

Несложная проверка показывает, что для системы (1), (2) с матрицами (54) условия (5)–(8) выполнены. Построение регулятора проведём в три этапа.

1. *Синтез регулятора с обратной связью (39).* Способ построения регулятора (39) достаточно подробно описан в [19; 22, с. 358]. Однако в случае рассматриваемого примера выкладки можно существенно упростить и построить регулятор вида (39) с матрицами меньшего размера, чем предполагается в [19; 22, с. 358]. Схематично изложим процесс получения необходимого регулятора.

Выполним невырожденное преобразование переменных, в результате которого вектор B преобразуется в вектор $\hat{B} = \text{col}[0, 1]$. Такое преобразование можно определить, например, формулой

$$x = \hat{T}\hat{x}, \quad \hat{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

где $\hat{x}$ — новая переменная. После этого в системе с характеристической матрицей $\hat{W}(p, e^{-ph})$, где $\hat{W}(p, \lambda) = \hat{T}^{-1}W(p, \lambda)\hat{T}$, введём новое управление $\hat{u}(t) = [1, -p_D \lambda_h + 3 - \lambda_h]\hat{x}(t) + u(t)$ ($p_D = d/dt$ — оператор дифференцирования). В результате получим систему с характеристической матрицей $\hat{W}_0(p, e^{-ph})$, где

$$\hat{W}_0(p, \lambda) = \begin{bmatrix} p+1 & p\lambda+3-2\lambda \\ 0 & p \end{bmatrix},$$

и вектором $\hat{B}$ при управлении. Несложный анализ показывает, что такая система имеет характеристический квазиполином запаздывающего типа, поэтому [22, с. 229] при помощи подходящей замены можно перейти от системы нейтрального типа к системе запаздывающего типа. Введя переменную $\hat{x}$ согласно формуле

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{x},$$

где $\bar{x}$ — новая переменная, приходим к системе запаздывающего типа с характеристической матрицей $\bar{W}(p, e^{-ph})$, где

$$\bar{W}(p, \lambda) = \hat{W}_0(p, \lambda) \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+1 & 3-3\lambda \\ 0 & p \end{bmatrix},$$

и вектором $\hat{B}$ при управлении.

Далее регулятор для полученной системы строим согласно работе [17], в которой изучена система второго порядка и предложены достаточно простые вычислительные процедуры для построения регулятора (39). При этом замкнутая система будет иметь третий порядок, в связи с чем желаемый полином $w_1(p)$ следует выбрать третьей степени (если применить подход работ [19; 22, с. 358], то в этом случае количество строк в матрицах регулятора будет на одну больше). Положим, например, $w_1(p) = (p+1)(p+2)(p+3)$. После несложных вычислений согласно [17] и возвращения к переменной x получим регулятор (39) для системы (1), (2) с матрицами (54):

$$\begin{aligned} u(t) = & - \left[\frac{50}{9} - \frac{49}{72} \lambda_h^2 - \frac{11}{36} \lambda_h + p_D \lambda_h + \frac{1}{18} \lambda_h^3, \quad \frac{1}{18} \lambda_h^2 - \frac{2}{3} \lambda_h + \frac{25}{9} \right] x(t) - \\ & - \left[-\frac{1}{3} \lambda_h^3 + \frac{14}{3} \lambda_h^2 - \frac{56}{3} \lambda_h + \frac{64}{3} \right] x_1(t), \\ \dot{x}_1(t) = & - \left[-\frac{65}{576} \lambda_h - \frac{145}{288} + \frac{1}{144} \lambda_h^2, \quad \frac{\lambda_h}{144} - \frac{1}{9} \right] x(t) - \left[-\frac{1}{24} \lambda_h^2 + \frac{3}{4} \lambda_h - \frac{1}{3} \right] x_1(t). \end{aligned} \quad (55)$$

Замкнув регулятором (55) исходную систему, запишем полученную характеристическую матрицу $W_2(p, \lambda)$ (см. формулу (42)). Непосредственной проверкой убеждаемся, что $|W_2(p, \lambda)| = (p+1)(p+2)(p+3)$, а также выполняются условия теоремы 1 из [17]. Значит, у замкнутой системы вырождаются первые две компоненты. Это говорит о том, что регулятор (55) обеспечивает тождество $x(t) \equiv 0$, $t \geq \bar{t}_1$, $\bar{t}_1 = 4h$.

2. *Синтез наблюдателя (21), (29).* Для системы (1), (2) с матрицами (54) строим формулу (14), которая в данном случае имеет вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \lambda_h + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \lambda_h \\ 0 \end{bmatrix} y(t), \quad t \geq h.$$

На основании этой формулы исходная система преобразуется в систему (15):

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\lambda_h^2 - \lambda_h + 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} -\lambda_h^2 + \lambda_h \\ 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad t > 2h, \quad (56)$$

с выходом (16), который запишем в виде

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2} \lambda_h + \frac{1}{2} \lambda_h^2 \\ \frac{1}{2} \lambda_h - \frac{1}{2} \lambda_h^2 \end{bmatrix} y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \lambda_h^2 + \frac{3}{2} \lambda_h + 1 & 0 \\ \frac{1}{2} \lambda_h^2 + \frac{1}{2} \lambda_h & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t), \quad t \geq 2h. \quad (57)$$

Несложные рассуждения показывают, что находить матрицу $V_{i_0}(\lambda)$ в данном случае не нужно, можно взять вторую строку в (57), умноженную на число 2. Тогда для системы (56) получим выход

$$\tilde{y}(t) = [\lambda_h^2 + \lambda_h, 0] \tilde{x}(t), \quad \tilde{y}(t) = y(t-h) - y(t-2h), \quad t \geq 2h. \quad (58)$$

Таким образом, система (20) здесь определяется соотношениями (56), (58), причём, что несложно проверить, выполняется условие вида (18) (с нулевой матрицей $V_{i_0}(\lambda)$).

Зададим желаемый характеристический полином $w_2(p)$ системы, определяющей наблюдатель. Возьмём, например, $w_2(p) = (p+1)(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)$. Согласно [23] строим матрицу $Q(p, \lambda)$ и получаем финитный наблюдатель (21), (29), имеющий вид (ниже $z = \text{col}[z_1, z_2]$, $z_1 \in \mathbb{R}^2$, $z_2 \in \mathbb{R}^3$)

$$\dot{z}(t) = \mathfrak{Q}[z_t] + \begin{bmatrix} -\lambda_h^2 + \lambda_h \\ 0 \\ -\frac{1}{2}(-\lambda_h^2 + \lambda_h) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda_h + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z_1(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda_h \\ 0 \end{bmatrix} y(t).$$

Пусть $Q(p, \lambda) = [q_{ij}(p, \lambda)]_{i,j=1}^5$ (напомним, что $\mathfrak{Q} \xrightarrow{\sigma} Q(p, \lambda)$). Выпишем элементы $q_{ij}(p, \lambda)$ (в общем случае функции $q_{ij}(p, \lambda)$ являются дробно-рациональными, однако ниже, для наглядности, они выписаны в виде (10)):

$$q_{11}(p, e^{-ph}) = 2 - e^{-ph} - e^{-2ph}, \quad q_{12}(p, e^{-ph}) = 1,$$

$$q_{13}(p, e^{-ph}) = -\frac{57828009598126030209}{39406496739491840} + \frac{e^{-ph}(-208320 + e^{-ph}(-97720 + e^{-ph}(-450 + 7e^{-ph})))}{53760} +$$

$$+ \frac{1}{2485980758016000}(-685442674106302464 + e^{-ph}(-198425094626084139 +$$

$$+ 2e^{-ph}(-4503988174456107 + e^{-ph}(584043096046293 + e^{-ph}(-56856644519211 +$$

$$+ e^{-ph}(4195118885589 + e^{-ph}(-233965543211 + e^{-ph}(9677531989 +$$

$$+ e^{-ph}(-285535307 + 7e^{-ph}(803899 + 7e^{-ph}(-1343 + 7e^{-ph}))))))))) \int_0^h e^{-ps} ds +$$

$$+ \frac{1}{1303369879658692608000}(694396074392611184443392 + e^{-ph}(514444061079244375522893 +$$

$$+ e^{-ph}(1450689465298965428097 - 4e^{-ph}(43807694264321509503 + 4e^{-ph}(-1018126416806606721 +$$

$$+ 4e^{-ph}(18192395808868479 + 4e^{-ph}(-248343075944321 + 4e^{-ph}(2534699108479 +$$

$$+ 4e^{-ph}(-18543581057 + 28e^{-ph}(12975049 + 28e^{-ph}(-5393 + 28e^{-ph}))))))))) \int_0^h e^{-(p-2)s} ds,$$

$$q_{14}(p, e^{-ph}) = -\frac{27}{10} - \frac{2 + e^{-ph}}{2} \int_0^h e^{-ps} ds + \frac{5 + 4e^{-ph}}{5} \int_0^h e^{-(p-2)s} ds, \quad q_{15}(p, e^{-ph}) = 0,$$

$$q_{21}(p, e^{-ph}) = q_{22}(p, e^{-ph}) = 0, \quad q_{23}(p, e^{-ph}) = -\frac{215009128125}{1073741824},$$

$$q_{24}(p, e^{-ph}) = -1, \quad q_{25}(p, e^{-ph}) = 0,$$

$$q_{31}(p, e^{-ph}) = \frac{1}{2}e^{-ph}(1 + e^{-ph}), \quad q_{32}(p, e^{-ph}) = 0,$$

$$\begin{aligned}
q_{33}(p, e^{-ph}) &= \frac{-1886208 + e^{-ph}(208320 + e^{-ph}(97720 + (450 - 7e^{-ph})e^{-ph}))}{107520} + \\
&+ \frac{1}{2606739759317385216000} (-694396074392611184443392 + e^{-ph}(-514444061079244375522893 + \\
&+ e^{-ph}(-1450689465298965428097 + 4e^{-ph}(43807694264321509503 + \\
&+ 4e^{-ph}(-1018126416806606721 + 4e^{-ph}(18192395808868479 + \\
&+ 4e^{-ph}(-248343075944321 + 4e^{-ph}(2534699108479 + 4e^{-ph}(-18543581057 + \\
&+ 28e^{-ph}(12975049 + 28e^{-ph}(-5393 + 28e^{-ph}))))))))) \int_0^h e^{-(p-2)s} ds + \\
&+ \frac{1}{4971961516032000} (685442674106302464 + e^{-ph}(198425094626084139 - \\
&- 2e^{-ph}(-4503988174456107 + e^{-ph}(584043096046293 + e^{-ph}(-56856644519211 + \\
&+ e^{-ph}(4195118885589 + e^{-ph}(-233965543211 + e^{-ph}(9677531989 + \\
&+ e^{-ph}(-285535307 + 7e^{-ph}(803899 + 7e^{-ph}(-1343 + 7e^{-ph}))))))))) \int_0^h e^{-ps} ds, \\
q_{34}(p, e^{-ph}) &= \frac{2 + e^{-ph}}{4} \int_0^h e^{-ps} ds - \frac{5 + 4e^{-ph}}{10} \int_0^h e^{-(p-2)s} ds, \quad q_{35}(p, e^{-ph}) = 0, \\
q_{41}(p, e^{-ph}) &= 0, \quad q_{42}(p, e^{-ph}) = 0, \\
q_{43}(p, e^{-ph}) &= \frac{1}{133646325550940160000} \times \\
&\times (56623052202075934949376 + e^{-ph}(-100800 + e^{-ph}(9800 + e^{-ph}(-450 + 7e^{-ph}))) \times \\
&\times (411662062586953728 + e^{-ph}(-100800 + e^{-ph}(9800 + e^{-ph}(-450 + 7e^{-ph}))) \times \\
&\times (1285495455744 + e^{-ph}(-100800 + e^{-ph}(9800 + e^{-ph}(-450 + 7e^{-ph}))) \times \\
&\times (1846272 + e^{-ph}(-100800 + e^{-ph}(9800 + e^{-ph}(-450 + 7e^{-ph}))))), \\
q_{44}(p, e^{-ph}) &= 0, \quad q_{45}(p, e^{-ph}) = (-32 + e^{-ph})(-16 + e^{-ph})(-8 + e^{-ph})(-4 + e^{-ph})(-2 + e^{-ph}), \\
q_{51}(p, e^{-ph}) &= 0, \quad q_{52}(p, e^{-ph}) = 0, \\
q_{53}(p, e^{-ph}) &= \frac{1}{14369652923237086003200000} (-36 + e^{-ph})(2304 + e^{-ph}(-184 + 7e^{-ph})) \times \\
&\times (-68352 + e^{-ph}(8112 + e^{-ph}(-422 + 7e^{-ph}))) (-47616 + e^{-ph}(6648 + e^{-ph}(-394 + 7e^{-ph}))) \times \\
&\times (-30528 + e^{-ph}(4392 + e^{-ph}(-338 + 7e^{-ph}))) \times \\
&\times (-18624 + e^{-ph}(2568 + e^{-ph}(-226 + 7e^{-ph}))), \\
q_{54}(p, e^{-ph}) &= 0, \quad q_{55}(p, e^{-ph}) = \frac{58368 + e^{-ph}(-100800 + e^{-ph}(9800 + e^{-ph}(-450 + 7e^{-ph})))}{107520}.
\end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $|I_5 - Q(p, \lambda)| = w_2(p)$. Пусть матрица $\bar{\Pi}(p)$ является присоединённой матрицей к матрице $I_5 - Q(p, e^{-ph})$. Несложные вычисления показывают, что корни полинома $w_2(p)$ обращают в нуль элементы первых четырёх строк матрицы $\bar{\Pi}(p)$, значит эти элементы матрицы $(I_5 - Q(p, e^{-ph}))^{-1}$ являются целыми функциями. Тогда [25] в системе (27) вырождаются первые четыре компонента вектор-решения (см. замечание 4), поэтому имеет место равенство (28) при $\tilde{t}_2 = 18$ (поясним, что максимальная степень переменной λ в указанных компонентах матрицы $(I_5 - Q(p, \lambda))^{-1}$ равна 18).

3. *Синтез регулятора (31)–(33)*. Используя формулы (45), выпишем параметры регулятора (31)–(33) (для большей наглядности матрицы в приведённых ниже формулах не перемножаются):

$$\begin{aligned} R_{00}(p, \lambda) &= - \begin{bmatrix} p\lambda - \frac{73}{12}\lambda + \frac{15}{8}\lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda^3 + 2 & \frac{1}{6}\lambda^2 - 2\lambda + \frac{19}{3} \\ \frac{15}{8}\lambda^2 - \frac{73}{12}\lambda - p\lambda - \frac{1}{6}\lambda^3 & \frac{1}{6}\lambda^2 - 2\lambda + \frac{19}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \\ R_{01}(p, \lambda) &= - \begin{bmatrix} -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 56\lambda + 64 \\ -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 56\lambda + 64 \end{bmatrix}, \\ R_{02}(p, \lambda) &= \begin{bmatrix} p\lambda - \frac{73}{12}\lambda + \frac{15}{8}\lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda^3 + 2 & \frac{1}{6}\lambda^2 - 2\lambda + \frac{19}{3} \\ \frac{15}{8}\lambda^2 - \frac{73}{12}\lambda - p\lambda - \frac{1}{6}\lambda^3 & \frac{1}{6}\lambda^2 - 2\lambda + \frac{19}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [I_2, 0_{2 \times 3}], \\ R_{10}(p, \lambda) &= - \left[-\frac{61}{576}\lambda + \frac{3}{32} + \frac{1}{144}\lambda^2, -\frac{\lambda}{144} + \frac{1}{9} \right] \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \\ R_{11}(p, \lambda) &= \left[\frac{1}{24}\lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{3} \right], \\ R_{12}(p, \lambda) &= \left[-\frac{61}{576}\lambda + \frac{3}{32} + \frac{1}{144}\lambda^2, -\frac{\lambda}{144} + \frac{1}{9} \right] \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [I_2, 0_{2 \times 3}], \\ R_{12}(p, \lambda) &= Q(p, \lambda), \quad S(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda^2 + \lambda \\ 0 \\ -\frac{1}{2}(-\lambda^2 + \lambda) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Регулятор, определяемый полученными матрицами, является регулятором полной стабилизации по выходу, обеспечивающим замкнутой системе заданный спектр. Действительно, составим матрицу $W_1(p, \lambda)$ по формуле (34). Вычислив определитель этой матрицы, убеждаемся, что $|W_1(p, \lambda)| = w_1(p)w_2(p) = (p+1)^2(p+2)^2(p+3)^2(p+4)(p+5)$. Пусть $\Pi_1(p, e^{-ph})$ — матрица, присоединённая к матрице $W_1(p, e^{-ph})$. Обозначим через $\pi_{ij}(p, e^{-ph})$ элементы матрицы $\Pi_1(p, e^{-ph})$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\pi_{ij}(p, e^{-ph})|_{p=k} = 0$, $k = \overline{1, 5}$, $(d\pi_{ij}(p, e^{-ph})/dp)|_{p=k} = 0$, $k = \overline{1, 3}$, $i \in \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$, $j = \overline{1, 8}$. Это означает, что элементы строк с номерами 1, 2, 4, 5, 6, 7 матрицы $(W_1(p, e^{-ph}))^{-1}$ являются целыми функциями. Соглас-

но [25] у вектор-решения системы, определяемой характеристической матрицей $W_1(p, \lambda)$, вырождаются компоненты с номерами 1, 2, 4, 5, 6, 7.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для линейной автономной дифференциально-разностной системы нейтрального типа доказан критерий существования и разработан метод проектирования регулятора полной стабилизации по выходу, обеспечивающего по неполным измерениям финитную стабилизацию, конечный спектр и экспоненциальную устойчивость. Представленный подход к построению регулятора полной стабилизации по выходу основан на использовании операций с полиномами и полиномиальными матрицами, имеющихся в большинстве систем компьютерной математики, и не требует знания корней характеристического уравнения. Конструктивность представленных результатов проиллюстрирована примером.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский, Н.Н. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования / Н.Н. Красовский, Ю.С. Осипов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1963. — № 6. — С. 3–15.
2. Осипов, Ю.С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием / Ю.С. Осипов // Дифференц. уравнения. — 1965. — Т. 1, № 5. — С. 606–618.
3. Pandolfi, L. Stabilization of neutral functional-differential equations / L. Pandolfi // J. Optimiz. Theory and Appl. — 1976. — V. 20, № 2. — P. 191–204.
4. Lu, W.-S. On the stabilization of linear neutral delay-difference systems / W.-S. Lu, E. Lee, S. Zak // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1986. — V. 31, № 1. — P. 65–67.
5. Rabah, R. On pole assignment and stabilizability of linear systems of neutral type systems / R. Rabah, G.M. Sklyar, A.V. Rezounenko // Topics in Time-Delay Systems. — Berlin : Springer, 2009. — P. 85–93.
6. Hu, G.-D. Numerical optimization for feedback stabilization of linear systems with distributed delays / G.-D. Hu, R. Hu // J. Comput. Appl. Math. — 2020. — V. 371. — Art. 112706.
7. Hu, G.-D. A frequency-domain method for stabilization of linear neutral delay systems / G.-D. Hu, R. Hu // Systems and Control Letters. — 2023. — V. 181. — Art. 105650.
8. Watanabe, K. Finite spectrum assignment of linear systems with a class of noncommensurate delays / K. Watanabe // Int. J. Control. — 1987. — V. 47, № 5. — P. 1277–1289.
9. Wang, Q.G. Finite Spectrum Assignment Controllers for Time Delay Systems / Q.G. Wang, T.H. Lee, K.K. Tan. — London : Springer, 1995.
10. Метельский, А.В. Спектральное приведение, полное успокоение и стабилизация системы с запаздыванием одним регулятором / А.В. Метельский // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 11. — С. 1436–1452.
11. Хартовский, В.Е. Спектральное приведение линейных систем нейтрального типа / В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 375–390.
12. Миняев, С.И. Топологический подход к одновременной стабилизации объектов с запаздыванием / С.И. Миняев, А.С. Фурсов // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 11. — С. 1453–1461.
13. Марченко, В.М. Управление системами с последействием в шкалах линейных регуляторов по типу обратной связи / В.М. Марченко // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 7. — С. 1003–1017.
14. Метельский, А.В. Критерии модальной управляемости линейных систем нейтрального типа / А.В. Метельский, В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 11. — С. 1506–1521.

15. Хартовский, В.Е. Критерий модальной управляемости вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с последействием / В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 4. — С. 514–529.
16. Zaitsev, V. Arbitrary coefficient assignment by static output feedback for linear differential equations with non-commensurate lumped and distributed delays / V. Zaitsev, I. Kim // Mathematics. — 2021. — № 9. — Art. 2158.
17. Карпук, В.В. Полное успокоение и стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием / В.В. Карпук, А.В. Метельский // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2009. — № 6. — С. 19–28.
18. Метельский, А.В. Успокоение решения дифференциальных систем с многими запаздываниями посредством обратной связи / А.В. Метельский, В.Е. Хартовский, О.И. Урбан // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2015. — № 2. — С. 40–50.
19. Метельский, А.В. Регуляторы успокоения решения линейных систем нейтрального типа / А.В. Метельский, В.Е. Хартовский, О.И. Урбан // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 3. — С. 391–403.
20. Фомичев, В.В. Достаточные условия стабилизации линейных динамических систем / В.В. Фомичев // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 11. — С. 1516–1521.
21. Метельский, А.В. Полная и финитная стабилизация дифференциальной системы с запаздыванием обратной связью по неполному выходу / А.В. Метельский // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 12. — С. 1665–1682.
22. Хартовский, В.Е. Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей / В.Е. Хартовский. — Гродно : ГрГУ, 2022. — 500 с.
23. Метельский, А.В. Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа / А.В. Метельский, В.Е. Хартовский // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 12. — С. 80–102.
24. Хартовский, В.Е. Полная управляемость и управляемость линейных систем нейтрального типа / В.Е. Хартовский, А.Т. Павловская // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 5. — С. 59–80.
25. Kappel, F. On degeneracy of functional-differential equations / F. Kappel // J. Differ. Equat. — 1976. — V. 22, № 2. — P. 250–267.

FINITE STABILIZATION AND ASSIGNMENT OF A FINITE SPECTRUM BY A SINGLE CONTROLLER FOR INCOMPLETE MEASUREMENTS FOR LINEAR SYSTEMS OF NEUTRAL TYPE

V. E. Khartovskii

*Yanka Kupala State University of Grodno, Belarus
e-mail: hartovskij@grsu.by, hartows@mail.ru*

For linear autonomous differential-difference of a neutral type system, the existence criterion was proved and a method was proposed for designing a controller with feedback on the observed output, providing the closed loop system finite stabilization (solution to the problem of complete 0-controllability) and a finite predetermined spectrum. This makes the closed loop system exponentially stable. The constructiveness of the presented results is illustrated by an example.

Keywords: linear system of neutral type, controller, observed output signal, finite stabilization, finite spectrum.

REFERENCES

1. Krasovskii, N.N. and Osipov, Yu.S., On stabilization of motions of control object with delay in regulation system, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Tekhn. Kibernet.*, 1963, no. 6, pp. 3–15.
2. Osipov, Yu.S., On stabilization of control systems with delay, *Differ. Uravn.*, 1965, vol. 1, no. 5, pp. 606–618.
3. Pandolfi, L., Stabilization of neutral functional-differential equations, *J. Optimiz. Theory and Appl.*, 1976, vol. 20, no. 2, pp. 191–204.

4. Lu, W.-S., Lee, E., and Zak, S., On the stabilization of linear neutral delay-difference systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, vol. 31, no. 1, pp. 65–67.
5. Rabah, R., Sklyar, G.M., and Rezounenko, A.V., On pole assignment and stabilizability of neutral type systems, in *Topics in Time Delay Systems*, Berlin: Springer, 2009, pp. 85–93.
6. Hu, G.-D., Hu, R., Numerical optimization for feedback stabilization of linear systems with distributed delays, *J. Comput. Appl. Math.*, 2020, vol. 371, art. 112706.
7. Hu, G.-D. and Hu, R., A frequency-domain method for stabilization of linear neutral delay systems, *Systems and Control Letters*, 2023, vol. 181, November, art. 105650.
8. Watanabe, K., Finite spectrum assignment of linear systems with a class of noncommensurate delays, *Int. J. Control*, 1987, vol. 47, no. 5, pp. 1277–1289.
9. Wang, Q.G., Lee, T.H., and Tan, K.K., *Finite Spectrum Assignment Controllers for Time Delay Systems*, London: Springer, 1995.
10. Metel'skii, A.V., Spectral reduction, complete damping, and stabilization of a delay system by a single controller, *Differ. Equat.*, 2013, vol. 49, no. 11, pp. 1405–1422.
11. Khartovskii, V.E., Spectral reduction of linear systems of the neutral type, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 3, pp. 366–381.
12. Minyaev, S.I. and Fursov, A.S., Topological approach to the simultaneous stabilization of plants with delay, *Differ. Equat.*, 2013, vol. 49, no. 11, pp. 1423–1431.
13. Marchenko, V.M., Control of systems with aftereffect in scales of linear controllers with respect to feedback type, *Differ. Equat.*, 2011, vol. 47, no. 7, pp. 1014–1028.
14. Metel'skii, A.V. and Khartovskii, V.E., Criteria for modal controllability of linear systems of neutral type, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 11, pp. 1453–1468.
15. Khartovskii, V.E., Criteria for modal controllability of completely regular differential-algebraic systems with aftereffect, *Differ. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 509–524.
16. Zaitsev, V. and Kim, I., Arbitrary coefficient assignment by static output feedback for linear differential equations with non-commensurate lumped and distributed delays, *Mathematics*, 2021, no. 9, art. 2158.
17. Karpuk, V.V. and Metel'skii, A.V., Complete calming and stabilization of linear autonomous systems with delay, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2009, no. 6, pp. 863–872.
18. Metel'skii, A.V., Khartovskii, V.E., and Urban, O.I., Damping of a solution of linear autonomous difference–differential systems with many delays using feedback, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2015, vol. 54, no. 2, pp. 202–211.
19. Metel'skii, A.V., Khartovskii, V.E., and Urban, O.I., Solution damping controllers for linear systems of the neutral type, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 3, pp. 386–399.
20. Fomichev, V.V., Sufficient conditions for the stabilization of linear dynamical systems, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 11, pp. 1512–1517.
21. Metel'skii, A.V., Complete and finite-time stabilization of a delay differential system by incomplete output feedback, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 12, pp. 1611–1629.
22. Khartovskii, V.E., *Upravleniye lineynymi sistemami neytral'nogo tipa: kachestvennyy analiz i realizatsiya obratnykh svyazey* (Control of linear systems of neutral type: qualitative analysis and implementation of feedback), Grodno: GrSU, 2022.
23. Metel'skii, A.V. and Khartovskii, V.E., Finite observer design for linear systems of neutral type, *Automat. Remote Control*, 2019, vol. 80, no. 12, pp. 2152–2169.
24. Khartovskii, V.E. and Pavlovskaya, A.T., Complete controllability and controllability for linear autonomous systems of neutral type, *Automat. Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 5, pp. 769–784.
25. Kappel, F. On degeneracy of functional-differential equations, *J. Differ. Equat.*, 1976, vol. 22, no. 2, pp. 250–267.