ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 5, с. 672–685

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

О КУСОЧНО-КУБИЧЕСКИХ ОЦЕНКАХ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ В ЗАДАЧЕ ЦЕЛЕВОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ

© П. А. Точилин[1], И. А. Чистяков[2]

[1,2]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*

[1]*Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, Китай*

e-mail: [1]*tochilin@cs.msu.ru,* [2]*chistyakov.ivan@yahoo.com*

Поступила в редакцию 10.08.2023 г., после доработки 10.08.2023 г.; принята к публикации 22.03.2024 г.

Рассмотрена нелинейная по фазовым переменным система обыкновенных дифференциальных уравнений с управляющими параметрами, на возможные значения которых наложены поточечные ограничения. Необходимо решить задачу о переводе траектории системы из произвольной начальной позиции в наименьшую возможную окрестность заданного целевого множества на фиксированном отрезке времени за счёт выбора соответствующего позиционного управления. Для её решения построена непрерывная кусочно-кубическая функция специального вида. Множества уровней этой функции задают внутренние оценки для множеств разрешимости исследуемой системы. Используя указанную функцию, можно также построить синтез управлений, решающий задачу целевого управления на конечном отрезке времени. Предложены формулы для расчёта значений кусочно-кубической функции, исследованы её свойства, рассмотрен алгоритм поиска задающих эту функцию параметров.

Ключевые слова: нелинейная динамика, позиционное управление, динамическое программирование, принцип сравнения.

DOI: 10.31857/S0374064124050083, EDN: LBIBKJ

1. ВВЕДЕНИЕ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ

Работа посвящена приближённому решению задачи целевого управления для нелинейной по фазовым переменным системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Траекторию такой системы необходимо перевести в заданное целевое множество на конечном заданном отрезке времени за счёт выбора подходящей позиционной стратегии управления. При этом на управляющие параметры наложены жёсткие поточечные ограничения. Данную задачу предполагается решать с помощью построения вспомогательных множеств разрешимости [1, с. 75–78] или их внутренних оценок. Такие множества могут быть получены как множества уровней специальных функций цены, являющихся обобщёнными решениями соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (ГЯБ). Непосредственное решение этого уравнения является сложной задачей, однако можно построить верхние оценки решения за счёт использования общих идей принципа сравнения [1, с. 197–213; 2] и кусочной линеаризации правой части системы дифференциальных уравнений. Функцию, аппроксимирующую неизвестное решение уравнения ГЯБ, можно искать в определённом (по возможности достаточно простом для анализа) классе функций. В работах [3–6] были предложены способы построения внутренних оценок множеств разрешимости с использованием непрерывных или разрывных кусочно-аффинных либо кусочно-квадратичных функций цены.

Основная цель данной статьи — построить оценки с привлечением непрерывных кусочно-кубических функций. Введение дополнительных параметров, задающих каждую конкретную оценку функции цены, позволит сделать её более точной. Ниже исследованы некоторые свойства непрерывных кусочно-кубических функций цены, заданных на разбиении части фазового пространства на симплексы; выведены формулы, с помощью которых можно построить кусочно-кубическую функцию, задающую внутренние оценки множеств разрешимости нелинейной системы и позволяющую определить субоптимальное позиционное управление, переводящее траекторию системы в наименьшую возможную окрестность целевого множества; проанализированы некоторые нюансы, связанные с вычислениями параметров кусочно-кубических функций.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \mathbf{f}(t,x) + \mathbf{g}(t,x)u, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ — вектор фазовых переменных, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ — вектор управляющих параметров. Предположим, что функции $\mathbf{f}(t,x)$ и $\mathbf{g}(t,x)$ являются достаточно гладкими, а именно, каждая компонента вектор-функции $\mathbf{f}(t,x)$ два раза непрерывно дифференцируема по x, а каждая компонента матриц-функции $\mathbf{g}(t,x)$ один раз непрерывно дифференцируема по x при $x \in \Omega$. Здесь Ω — некоторая фиксированная выпуклая многогранная область в пространстве $\mathbb{R}^{n_x}$. Кроме того, указанные функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ непрерывны по $t \in [t_0, t_1]$, отрезок $[t_0, t_1]$ фиксирован.

На допустимые значения управляющих параметров $u = u(t,x)$ наложены жёсткие поточечные ограничения

$$u(t,x) \in \mathcal{P}(t), \tag{2}$$

где $\mathcal{P}(t)$ — непрерывное в смысле метрики Помпейю–Хаусдорфа [7, с. 39–44] многозначное отображение, принимающее выпуклые компактные значения при каждом $t \in [t_0, t_1]$.

2. ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА РАЗРЕШИМОСТИ

Пусть $\mathcal{U}$ — класс допустимых позиционных управлений, удовлетворяющих условию (2), при подстановке которых в уравнение (1) получаются дифференциальные включения, имеющие решения при любом начальном векторе фазовых переменных $x_0 \in \Omega$. Под *решением* дифференциального включения понимается абсолютно непрерывная функция $x(t) = x(t; t_0, x_0)|_{u(\cdot)}$, для которой выполнено условие $x(t_0) = x_0$ и которая удовлетворяет данному включению для п.в. $t \in [t_0, t_1]$. Решения $x(t)$ рассматриваются только до возможного момента их выхода из области Ω.

Рассмотрим некоторое компактное целевое множество $\mathcal{X}_1 \subset \operatorname{int} \Omega$, заданное следующим соотношением:

$$\mathcal{X}_1 = \{x \in \Omega \colon \phi_{\mathcal{X}_1}(x) \leqslant 0\}.$$

Здесь функция $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$ предполагается известной, три раза непрерывно дифференцируемой при $x \in \Omega$.

Обозначим через $\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1)$ множество разрешимости системы (1) в некоторый фиксированный момент времени $t \in [t_0, t_1]$. Оно содержит все возможные начальные позиции $x(t) \in \Omega$, для каждой из которых существует управление $u(\tau, x) \in \mathcal{U}$, $\tau \in [t, t_1]$, такое, что

$$x(\tau; t, x)|_{u(\cdot)} \in \Omega, \quad \tau \in [t, t_1], \quad x(t_1; t, x)|_{u(\cdot)} \in \mathcal{X}_1.$$

Далее будем предполагать, что множество Ω подобрано таким образом, что $\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1) \subset \Omega$ для любого $t \in [t_0, t_1]$, поэтому при построении закона управления можно не следить за возможностью выхода траектории за границы Ω.

Рассмотрим вспомогательную функцию цены

$$\tilde{V}(t,x) = \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \{\phi_{\mathcal{X}_1}(x(t_1))\colon x(t)=x\},$$

которая связана со множеством разрешимости соотношением

$$\mathcal{W}(t,t_1,\mathcal{X}_1) = \{x\in\Omega\colon \tilde{V}(t,x)\leqslant 0\}$$

(при дополнительном условии, что $\mathcal{W}(\tau,t_1,\mathcal{X}_1)\subset \operatorname{int}\Omega$ для любого $\tau\in(t,t_1]$). Известно [1, с. 61–62], что функция цены $\tilde{V}(t,x)$ является (вообще говоря, обобщённым) решением уравнения ГЯБ

$$\min_{u\in\mathcal{P}(t)} \big\{\tilde{V}'(t,x;(1;\mathbf{f}(t,x)+\mathbf{g}(t,x)u))\big\} = 0, \quad t\in[t_0,t_1], \quad x\in\Omega, \tag{3}$$

с краевым условием $\tilde{V}(t_1,x)=\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$, $x\in\Omega$. Здесь $\tilde{V}'(t,x;\bar{l})$ — производная по направлению $\bar{l}\in\mathbb{R}^{n_x+1}$ функции $\tilde{V}$ в точке (t,x).

Построим внутренние оценки множеств разрешимости $\mathcal{W}(t,t_1,\mathcal{X}_1)$, соответствующие верхним оценкам функции цены $\tilde{V}(t,x)$, а также выведем соотношения для позиционного управления, решающего задачу о переводе траектории системы в целевое множество $\mathcal{X}_1$ на заданном отрезке времени.

3. НЕПРЕРЫВНАЯ КУСОЧНО-КУБИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Предположим, что область Ω разбита на симплексы $\Omega^{(i)}$ так, что любые два симплекса $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(j)}$ либо не пересекаются, либо пересекаются только по какой-либо их общей грани размерности меньшей n_x. Симплексы занумеруем значениями индекса $i=\overline{1,N}$. Далее всюду верхний индекс, заключённый в скобки, будет соответствовать величине (вектору, матрице, функции), сопоставленной симплексу с указанным номером.

В точках каждого симплекса $\Omega^{(i)}$ проведём локальную линеаризацию (подробный вывод формул для $A^{(i)}(t)$, $B^{(i)}(t)$, $f^{(i)}(t)$, $R(t,x)$ приведён в [3, 4]):

$$\mathbf{f}(t,x)+\mathbf{g}(t,x)u = A^{(i)}(t)x + B^{(i)}(t)u + f^{(i)}(t) + R(t,x) = \bar{A}^{(i)}(t)\bar{x} + B^{(i)}(t)u + R(t,x),$$

где $\bar{A}^{(i)} = (A^{(i)}(t)f^{(i)}(t))\in\mathbb{R}^{n_x\times(n_x+1)}$, $\bar{x}=(x^T\ 1)^T$ — расширенный вектор фазовых переменных. Выпишем также ограничения на погрешность линеаризации:

$$R(t,x)\in\mathcal{Q}^{(i)}(t) = [R^{(i)}_{1,-}(t),R^{(i)}_{1,+}(t)]\times[R^{(i)}_{2,-}(t),R^{(i)}_{2,+}(t)]\times\ldots\times[R^{(i)}_{n_x,-}(t),R^{(i)}_{n_x,+}(t)],$$

где $R^{(i)}_{k,-}(t)$, $R^{(i)}_{k,+}(t)$ — известные величины (соответствующие формулы приведены в [3, 4]). При этом если какое-то из уравнений системы (например, с номером k) изначально является линейным по x и u, то $R^{(i)}_{k,-}(t)=R^{(i)}_{k,+}(t)\equiv 0$.

Пусть $g^{(i)}_1,\ldots,g^{(i)}_{n_x+1}\in\mathbb{R}^{n_x}$ — вершины симплекса $\Omega^{(i)}$, $i=\overline{1,N}$. Помимо локальной нумерации (числами от 1 до n_x+1) вершин в каждом симплексе далее будем использовать глобальную нумерацию: g_1, …, g_S, где S — общее количество уникальных вершин всех рассматриваемых симплексов. При использовании глобальной нумерации верхний индекс (i) отсутствует. Через $\sigma(i,l)$, $i=\overline{1,N}$, $l=\overline{1,S}$, обозначим номер вершины g_l в локальной нумерации симплекса $\Omega^{(i)}$, т.е. $g^{(i)}_{\sigma(i,l)}=g_l$; через $\bar{g}_l\in\mathbb{R}^{n_x+1}$ — вектор g_l, дополненный единицей в (n_x+1)-й координате.

Рассмотрим кусочно-кубическую функцию

$$V(t,x) = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha^{(i)}_k(x)\langle\bar{x},\bar{P}^{(i)}_k(t)\bar{x}\rangle, \quad x\in\Omega^{(i)}. \tag{4}$$

Здесь $\alpha_k^{(i)}(x)$, $k=\overline{1,n_x+1}$, — барицентрические координаты точки $x\in\Omega^{(i)}$. Матрицы $\bar{P}_k^{(i)}(t)\in\in\mathbb{R}^{(n_x+1)\times(n_x+1)}$ подберём таким образом, чтобы были выполнены условия непрерывности функции $V(t,x)$ по переменной $x\in\Omega$. При этом достаточно исследовать поведение функции только на границах соседних симплексов. Свойство непрерывности упрощает использование данной функции для оценивания множеств разрешимости. Однако аналогичные, но более сложные вычисления могут быть проведены и для разрывных функций (как это было сделано в [4, 6] для кусочно-аффинных и кусочно-квадратичных функций соответственно).

Простейшее достаточное условие непрерывности функции $V(t,x)$ по переменной x имеет вид

$$\bar{P}_k^{(i)}(t)=\bar{P}_m^{(j)}(t),\quad \text{если}\quad g_k^{(i)}=g_m^{(j)},\quad \text{для любых } i,\ j,\ k,\ m,\quad g_k^{(i)}\in\Omega^{(i)},\quad g_m^{(j)}\in\Omega^{(j)}. \tag{5}$$

Здесь $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(j)}$ — произвольные соседние симплексы,

$$\bar{P}_k^{(i)}(t)=\begin{pmatrix} P_k^{(i)}(t) & p_k^{(i)}(t)\\ (p_k^{(i)}(t))^T & \pi_k^{(i)}(t)\end{pmatrix},\quad P_k^{(i)}(t)=\big(P_k^{(i)}(t)\big)^T. \tag{6}$$

Матрица $\bar{P}_k^{(i)}(t)$ симметрична, но может не быть знакоопределённой.

Условие непрерывности можно ослабить, не требуя полного совпадения матриц $\bar{P}_k^{(i)}(t)$, соответствующих одной и той же вершине для разных соседних симплексов. Для этого рассмотрим два соседних симплекса $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(j)}$ с общей границей, являющейся симплексом

$$\mathcal{H}^{(ij)}=\operatorname{conv}\{g_{m_1},\ldots,g_{m_{n_x}}\}, \tag{7}$$

т.е. здесь рассматриваются только соседние симплексы с границей максимальной возможной размерности.

Теорема 1. *Пусть все матрицы $\bar{P}_k^{(i)}(t)$ (при разных i, k) непрерывны по t и для любой пары соседних симплексов $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(j)}$ с общей границей вида (7) выполнено условие*

$$\big\langle \bar{g}_{l_1},\bar{P}^{(i)}_{\sigma(i,l_3)}(t)\bar{g}_{l_2}\big\rangle=\big\langle \bar{g}_{l_1},\bar{P}^{(j)}_{\sigma(j,l_3)}(t)\bar{g}_{l_2}\big\rangle,\quad l_1,l_2,l_3\in\{m_1,\ldots,m_{n_x}\},\quad l_1\leqslant l_2. \tag{8}$$

Тогда функция $V(t,x)$ непрерывна при $t\in[t_0,t_1]$, $x\in\Omega$.

Доказательство. Поскольку матрицы $\bar{P}^{(i)}_{\sigma(i,l_3)}(t)$ и $\bar{P}^{(j)}_{\sigma(j,l_3)}(t)$ симметричны, то из выполнения условия (8) при любых $l_1\leqslant l_2$ следуют аналогичные условия для любых $l_1>l_2$.

Зафиксируем некоторую точку $x\in\mathcal{H}^{(ij)}$ и выразим вектор $\bar{x}$ через барицентрические координаты (относительно симплекса $\mathcal{H}^{(ij)}$):

$$\bar{x}=\sum_{l_1}\alpha_{l_1}(x)\bar{g}_{l_1}=\sum_{l_2}\alpha_{l_2}(x)\bar{g}_{l_2}.$$

Здесь l_1 и l_2 — два независимых индекса, пробегающих множество значений $\{m_1,\ldots,m_{n_x}\}$. Умножим (8) на $\alpha_{l_1}(x)\alpha_{l_2}(x)$ и просуммируем по всем значениям l_1, l_2. В результате получим равенство

$$\Big\langle\sum_{l_1}\alpha_{l_1}(x)\bar{g}_{l_1},(\bar{P}^{(i)}_{\sigma(i,l_3)}(t)-\bar{P}^{(j)}_{\sigma(j,l_3)}(t))\sum_{l_2}\alpha_{l_2}(x)\bar{g}_{l_2}\Big\rangle=0,$$

т.е.

$$\big\langle\bar{x},\bar{P}^{(i)}_{\sigma(i,l_3)}(t)\bar{x}\big\rangle=\big\langle\bar{x},\bar{P}^{(j)}_{\sigma(j,l_3)}(t)\bar{x}\big\rangle,\quad l_3\in\{m_1,\ldots,m_{n_x}\}.$$

Домножим эти равенства на барицентрические (относительно $\mathcal{H}^{(ij)}$) координаты $\alpha_{l_3}(x)$ и просуммируем их для разных значений $l_3 \in \{m_1, ..., m_{n_x}\}$. В результате будет доказано совпадение предельных значений функции $V(t,y)$ при $y \to x$, если $y \in \Omega^{(i)}$ или $y \in \Omega^{(j)}$.

Далее можно доказать аналогичное утверждение о совпадении предельных значений функции V в любой точке x, лежащей на границе $\mathcal{H}^{(ij)}$ двух соседних симплексов $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(j)}$, если эта граница имеет размерность меньше n_x. В этом случае можно построить цепочку симплексов с номерами $i = i_0,\ i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_m = j$ таких, что каждые два последовательных симплекса с номерами i_k и i_{k+1} будут иметь общую границу размерности n_x. Осталось применить несколько раз доказанное выше утверждение для случая границы $\mathcal{H}^{(ij)}$ максимальной возможной размерности. Теорема доказана.

Условия (8) представляют собой систему линейных $\big($относительно элементов матриц $\bar{P}_k^{(i)}\big)$ уравнений. При составлении таких систем для разных пар симплексов нужно следить за возможным появлением заведомо лишних уравнений (дубликатов).

4. КУСОЧНО-КУБИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$

В работе [3] были предложены формулы для построения оценок заданной дважды непрерывно дифференцируемой функции $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$ при помощи непрерывной кусочно-аффинной функции $l(x)$, для которой

$$l\big(g_k^{(i)}\big) = \phi_{\mathcal{X}_1}\big(g_k^{(i)}\big) + c_k^{(i)}, \quad i = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, n_x + 1};$$
$$c_k^{(i)} = c_m^{(j)}, \quad g_k^{(i)} = g_m^{(j)} \quad \text{для любых } i,\ j,\ k,\ m,$$

где постоянные $c_k^{(i)}$ зависят от экстремумов собственных значений матрицы вторых производных $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$ в точках соответствующих симплексов. Максимизируя или минимизируя собственные значения этой матрицы по x, можно получить константы $c_k^{(i)}$, соответствующие верхним или нижним оценкам $l(x)$. Из полученной функции $l(x)$ далее можно сконструировать непрерывную кусочно-кубическую оценку рассматриваемого в данной статье вида, если положить $P_k^{(i)}(t_1) = 0$, $p_k^{(i)}(t) = 0$, $\pi_k^{(i)}(t_1) = l(g_k^{(i)})$. Таким образом может быть получена аппроксимация второго порядка малости относительно диаметра симплексов $\Omega^{(i)}$.

Однако за счёт ненулевых значений $P_k^{(i)}(t_1)$ и $p_k^{(i)}(t_1)$ точность аппроксимации можно улучшить. Предположим, что функция $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$ три раза непрерывно дифференцируема при $x \in \Omega$. Возьмём некоторый симплекс $\Omega^{(i)}$ с вершинами $g_{m_1}, \ \ldots, \ g_{m_{n_x+1}}$. Разложим функцию $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$ по формуле Тейлора до 3-го порядка малости с центром в точке g_{m_j}, $j = \overline{1, n_x + 1}$:

$$\varphi_{\mathcal{X}_1}(x) = \varphi_{\mathcal{X}_1}(g_{m_j}) + (x - g_{m_j})^T \frac{\partial \phi_{\mathcal{X}_1}(g_{m_j})}{\partial x} + \frac{1}{2}(x - g_{m_j})^T \frac{\partial^2 \phi_{\mathcal{X}_1}(g_{m_j})}{\partial x^2}(x - g_{m_j}) + \nu(x, g_{m_j}),$$

где остаточный член для некоторой константы $C^{(i)}$ можно оценить как $|\nu(x, g_{m_j})| \leqslant$ $\leqslant C^{(i)}\|x - g_{m_j}\|^3$ (здесь используется общая оценка для всех вершин g_{m_j}).

Теперь определим функцию $V(t_1, x)$ по формулам (4), (6), где

$$P_{\sigma(i,m_j)}^{(i)}(t_1) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi_{\mathcal{X}_1}(g_{m_j})}{\partial x^2}, \quad p_{\sigma(i,m_j)}^{(i)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_{\mathcal{X}_1}(g_{m_j})}{\partial x} - \frac{\partial^2 \phi_{\mathcal{X}_1}(g_{m_j})}{\partial x^2} g_{m_j}\right), \tag{9}$$

$$\pi_{\sigma(i,m_j)}^{(i)} = \phi_{\mathcal{X}_1}(g_{m_j}) - (g_{m_j})^T \frac{\partial \phi_{\mathcal{X}_1}(g_{m_j})}{\partial x} + \frac{1}{2}(g_{m_j})^T \frac{\partial^2 \phi_{\mathcal{X}_1}(g_{m_j})}{\partial x^2} g_{m_j} +$$
$$+ \max_r \big\{C^{(r)} \max_s \|g_s^{(r)} - g_{m_j}\|^3\big\}. \tag{10}$$

Здесь внешний максимум в последнем слагаемом должен быть взят по всем номерам r симплексов, содержащих общую вершину g_{m_j}, а внутренний максимум — по всем вершинам таких симплексов; эта конструкция нужна для обеспечения непрерывности функции $V(t_1,x)$ по $x\in\Omega$. Теперь видно, что для любых $x\in\Omega^{(i)}$ и g_{m_j} можем записать

$$\phi_{\mathcal{X}_1}(x)=(\bar{x})^T\bar{P}^{(i)}_{\sigma(i,m_j)}(t_1)\bar{x}+\nu(x,g_{m_j})-\max_r\Big\{C^{(r)}\max_s\|g^{(r)}_s-g_{m_j}\|^3\Big\}\leqslant(\bar{x})^T\bar{P}^{(i)}_{\sigma(i,m_j)}(t_1)\bar{x},$$

$$\phi_{\mathcal{X}_1}(x)=\sum_{k=1}^{n_x+1}\alpha_k(x)\left((\bar{x})^T\bar{P}^{(i)}_k(t_1)\bar{x}+\nu(x,g^{(i)}_k)-\max_r\Big\{C^{(r)}\max_s\|g^{(r)}_s-g^{(i)}_k\|^3\Big\}\right)\leqslant V(t_1,x).$$

Получена верхняя непрерывная кусочно-кубическая оценка функции $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$ с порядком малости 3 относительно диаметра симплексов. В частности, эта формула точна в случае, если $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$ — квадратичная функция ($\mathcal{X}_1$ — гиперповерхность 2-го порядка).

5. ПОСТРОЕНИЕ ОЦЕНОК МНОЖЕСТВ РАЗРЕШИМОСТИ

Для построения внутренних оценок множеств разрешимости воспользуемся принципом сравнения [1]. Основная цель здесь — построить верхнюю оценку $V(t,x)$ неизвестной функции цены $\tilde{V}(t,x)$, являющейся решением (3), с использованием специальных классов функций V и управлений u. Ниже аппроксимацию функции цены $\tilde{V}$ будем искать в классе введённых в п. 3 непрерывных кусочно-кубических функций. Для управлений же воспользуемся классом непрерывных кусочно-аффинных функций (аналогично методу, предложенному в статье [3]).

Рассмотрим кусочно-аффинное управление

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{n_x+1}\alpha^{(i)}_k(x)y^{(i)}_k(t)=Y^{(i)}(t)\bar{H}^{(i)}\bar{x},\quad y^{(i)}_k(t)\in\mathcal{P}(t). \tag{11}$$

Здесь $y^{(i)}_k(t)$ — искомые векторы; матрица $Y^{(i)}(t)$ составлена из столбцов $y^{(i)}_k(t)$ при разных $k=\overline{1,n_x+1}$; $\bar{H}^{(i)}=(H^{(i)}\ \ h^{(i)})\in\mathbb{R}^{(n_x+1)\times(n_x+1)}$ — матрица, осуществляющая переход к барицентрическим координатам в симплексе $\Omega^{(i)}$: $\alpha(x)=\bar{H}^{(i)}\bar{x}$ (подробные формулы приведены в [3]).

Функция $u(t,x)$ будет непрерывной по $t\in[t_0,t_1]$, $x\in\Omega$, если каждый из векторов $y^{(i)}_k(t)$ непрерывен по t и для любых i, j, k, m выполнено условие

$$y^{(i)}_k(t)=y^{(j)}_m(t)\quad\text{при}\quad g^{(i)}_k=g^{(j)}_m. \tag{12}$$

Выведем несколько вспомогательных формул, которые понадобятся для оценки выражения из уравнения (3). Найдём производную по x от квадратичной формы из определения $V(t,x)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\big\langle\bar{x},\bar{P}^{(i)}_k(t)\bar{x}\big\rangle=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\big\langle x,P^{(i)}_k(t)x\big\rangle+2\big\langle x,p^{(i)}_k(t)\big\rangle+\pi^{(i)}_k(t)\Big)=$$

$$=2P^{(i)}_k(t)x+2p^{(i)}_k(t)=2\Big(P^{(i)}_k(t)\quad p^{(i)}_k(t)\Big)\bar{x}=2\bar{I}\bar{P}^{(i)}_k(t)\bar{x},\quad \bar{I}=\big(\mathbb{I}_{n\times n}\quad \mathbb{O}_{n\times 1}\big).$$

Теперь найдём производную по x от компоненты вектора барицентрических координат:

$$\alpha^{(i)}(x)=H^{(i)}x+h^{(i)}=\bar{H}^{(i)}\bar{x},\quad \frac{\partial}{\partial x}\alpha^{(i)}_k(x)=\big(H^{(i)}_k\big)^T,\quad k=\overline{1,n_x},$$

где $H^{(i)}_k$ — k-я строка матрицы $H^{(i)}$.

Пусть (здесь для упрощения не указана зависимость от t, точкой обозначена производная по переменной t)

$$S_k^{(i)}(\bar{x})=\dot{\bar{P}}_k^{(i)}+\bar{P}_k^{(i)}\bar{I}^T(\bar{A}^{(i)}+B^{(i)}Y^{(i)}\bar{H}^{(i)})+(\bar{A}^{(i)}+B^{(i)}Y^{(i)}\bar{H}^{(i)})^T\bar{I}\bar{P}_k^{(i)}+ \\ +\sum_{s=1}^{n_x+1}(H_s^{(i)}(\bar{A}^{(i)}+B^{(i)}Y^{(i)}\bar{H}^{(i)})\bar{x})\bar{P}_s^{(i)}.$$

Подставим функцию $V(t,x)$ вида (4) в левую часть уравнения (3), возьмём управление (11) и преобразуем получившееся выражение при $x\in\Omega^{(i)}$, $i\in\{1,\ldots,N\}$ (здесь также всюду не указана зависимость функций от t):

$$\sum_{k=1}^{n_x+1}\alpha_k^{(i)}(x)\langle\bar{x},\dot{\bar{P}}_k^{(i)}\bar{x}\rangle+\Big\langle\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=1}^{n_x+1}\alpha_k^{(i)}(x)\langle\bar{x},\bar{P}_k^{(i)}\bar{x}\rangle,\bar{A}^{(i)}\bar{x}+B^{(i)}u+R(t,x)\Big\rangle=$$

$$=\sum_{k=1}^{n_x+1}\alpha_k^{(i)}(x)\Big\langle\bar{x},\dot{\bar{P}}_k^{(i)}+\big(\bar{P}_k^{(i)}\bar{I}^T(\bar{A}^{(i)}+B^{(i)}Y^{(i)}\bar{H}^{(i)})+(\bar{A}^{(i)}+B^{(i)}Y^{(i)}\bar{H}^{(i)})^T\bar{I}\bar{P}_k^{(i)}\big)\bar{x}\Big\rangle+$$

$$+\sum_{k=1}^{n_x+1}2\alpha_k^{(i)}(x)\langle\bar{I}\bar{P}_k^{(i)}\bar{x},R(t,x)\rangle+\sum_{k=1}^{n_x+1}\langle\bar{x},\bar{P}_k^{(i)}\bar{x}\rangle\Big\langle\big(H_k^{(i)}\big)^T,(\bar{A}^{(i)}+B^{(i)}Y^{(i)}\bar{H}^{(i)})\bar{x}+R(t,x)\Big\rangle=$$

$$=\sum_{k=1}^{n_x+1}\alpha_k^{(i)}(x)\Big\langle\bar{x},\dot{\bar{P}}_k^{(i)}+\big(\bar{P}_k^{(i)}\bar{I}^T(\bar{A}^{(i)}+B^{(i)}Y^{(i)}\bar{H}^{(i)})+(\bar{A}^{(i)}+B^{(i)}Y^{(i)}\bar{H}^{(i)})^T\bar{I}\bar{P}_k^{(i)}\big)\bar{x}\Big\rangle+$$

$$+\sum_{k=1}^{n_x+1}\alpha_k^{(i)}(x)\Big\langle\bar{x},\Big(\sum_{s=1}^{n_x+1}(H_s^{(i)}(\bar{A}^{(i)}+B^{(i)}Y^{(i)}\bar{H}^{(i)})\bar{x})\bar{P}_s^{(i)}\Big)\bar{x}\Big\rangle+$$

$$+\sum_{k=1}^{n_x+1}\Big\langle\big(H_k^{(i)}\big)^T\langle\bar{x},\bar{P}_k^{(i)}\bar{x}\rangle+2\alpha_k^{(i)}(x)\bar{I}\bar{P}_k^{(i)}\bar{x},R(t,x)\Big\rangle=$$

$$=\sum_{k=1}^{n_x+1}\alpha_k^{(i)}(x)\langle\bar{x},S_k^{(i)}(\bar{x})\bar{x}\rangle+\sum_{k=1}^{n_x+1}\Big\langle\big(H_k^{(i)}\big)^T\langle\bar{x},\bar{P}_k^{(i)}\bar{x}\rangle+2\alpha_k^{(i)}(x)\bar{I}\bar{P}_k^{(i)}\bar{x},R(t,x)\Big\rangle. \tag{13}$$

Оценим сверху каждую из двух полученных сумм. Для оценки первой суммы потребуем, чтобы $\langle\bar{x},S_k^{(i)}(\bar{x})\bar{x}\rangle\leqslant 0$ для любых $k=\overline{1,n_x+1}$ и $x\in\Omega^{(i)}$. Запишем выражение вектора $\bar{x}$ через вершины симплекса и барицентрические координаты:

$$\Big(\sum_{k_2=1}^{n_x+1}\alpha_{k_2}(x)\bar{g}_{k_2}^{(i)}\Big)^T S_k^{(i)}\Big(\sum_{k_1=1}^{n_x+1}\alpha_{k_1}(x)\bar{g}_{k_1}^{(i)}\Big)\Big(\sum_{k_3=1}^{n_x+1}\alpha_{k_3}(x)\bar{g}_{k_3}^{(i)}\Big)\leqslant 0.$$

Учитывая неотрицательность барицентрических координат, получаем, что для выполнения последнего неравенства достаточно, чтобы был неположительным каждый из коэффициентов получившейся линейной комбинации с барицентрическими координатами. Таким образом, получаем систему неравенств

$$(\bar{g}_{k_2}^{(i)})^T\Big(\dot{\bar{P}}_k^{(i)}+\bar{P}_k^{(i)}\bar{I}^T(\bar{A}^{(i)}+B^{(i)}Y^{(i)}\bar{H}^{(i)})+(\bar{A}^{(i)}+B^{(i)}Y^{(i)}\bar{H}^{(i)})^T\bar{I}\bar{P}_k^{(i)}+ \\ +\sum_{s=1}^{n_x+1}(H_s^{(i)}(\bar{A}^{(i)}\bar{g}_{k_1}^{(i)}+B^{(i)}y_{k_1}^{(i)}))\bar{P}_s^{(i)}\Big)\bar{g}_{k_3}^{(i)}\leqslant 0 \tag{14}$$

для любых трёх (возможно, совпадающих) вершин $g_{k_1}^{(i)}$, $g_{k_2}^{(i)}$, $g_{k_3}^{(i)}$ симплекса $\Omega^{(i)}$. В силу симметричности матрицы в скобках достаточно рассмотреть индексы $k_2 \leqslant k_3$. Кроме того, нужно перебрать все значения $k = \overline{1, n_x+1}$. Получена система из $(n_x+1)^3(n_x+2)/2$ скалярных неравенств (для каждого фиксированного симплекса с номером i).

Оценим теперь второе слагаемое в (13):

$$\sum_{k=1}^{n_x+1} \Big\langle \big(H_k^{(i)}\big)^T \big\langle \bar{x}, \bar{P}_k^{(i)} \bar{x} \big\rangle + 2\alpha_k^{(i)}(x) \bar{I} \bar{P}_k^{(i)} \bar{x}, R(t,x) \Big\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x \in \Omega^{(i)}} \left\{ \rho \left(\sum_{k=1}^{n_x+1} \Big(\big(H_k^{(i)}\big)^T \big\langle \bar{x}, \bar{P}_k^{(i)} \bar{x} \big\rangle + 2\alpha_k^{(i)}(x) \bar{I} \bar{P}_k^{(i)} \bar{x} \Big) \middle| \mathcal{Q}^{(i)} \right) \right\}, \quad x \in \Omega^{(i)}. \tag{15}$$

Здесь $\rho(\,\cdot \mid \mathcal{Q}^{(i)})$ — опорная функция, значения которой могут быть найдены следующим образом:

$$\rho\big(l \mid \mathcal{Q}^{(i)}\big) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n_x} \big((R_{s,-}^{(i)} + R_{s,+}^{(i)}) l_s + (R_{s,+}^{(i)} - R_{s,-}^{(i)}) |l_s| \big), \quad l \in \mathbb{R}^{n_x}.$$

Для упрощения вычислений можно исключить задачу максимизации негладкой функции в (15). Для этого можно оценить компоненты вектора, являющегося первым аргументом опорной функции:

$$\max_{x \in \Omega^{(i)}} \left\{ \rho \left(\sum_{k=1}^{n_x+1} \big(H_k^{(i)}\big)^T \big\langle \bar{x}, \bar{P}_k^{(i)} \bar{x} \big\rangle + 2\alpha_k^{(i)}(x) \bar{I} \bar{P}_k^{(i)} \bar{x} \middle| \mathcal{Q}^{(i)} \right) \right\} \leqslant \eta^{(i)}(t) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n_x} \Big(\max\big\{ \big(R_{s,-}^{(i)} + R_{s,+}^{(i)}\big) \lambda_s^-, \big(R_{s,-}^{(i)} + R_{s,+}^{(i)}\big) \lambda_s^+ \big\} + \big(R_{s,+}^{(i)} - R_{s,-}^{(i)}\big) \max\{|\lambda_s^-|, |\lambda_s^+|\} \Big),$$

$$\lambda_s^- = \min_r \Big\{ \lambda_{\min}\big(\tilde{P}_s^{(i)}\big) \sqrt{1 + \big\|g_r^{(i)}\big\|^2} \Big\}, \quad \lambda_s^+ = \max_r \Big\{ \lambda_{\max}\big(\tilde{P}_s^{(i)}\big) \sqrt{1 + \big\|g_r^{(i)}\big\|^2} \Big\},$$

$$\tilde{P}_s^{(i)} = \sum_{k=1}^{n_x+1} \Big(H_{ks}^{(i)} \bar{P}_k^{(i)} + \big(\bar{H}_k^{(i)}\big)^T \big(\bar{P}_k^{(i)}\big)_s + \big(\bar{P}_k^{(i)}\big)_s^T \bar{H}_k^{(i)} \Big).$$

Здесь $\lambda_{\min}(Q)$ и $\lambda_{\max}(Q)$ — минимальное и максимальное собственные значения симметричной матрицы Q; $\big(\bar{P}_k^{(i)}\big)_s$ — s-я строка матрицы $\bar{P}_k^{(i)}$. Квадратные корни в формулах являются характеристиками симплексов и могут быть подсчитаны один раз, до расчёта матриц $\bar{P}_k^{(i)}(t)$, что упростит вычисление оценки для второго слагаемого в (13).

На основании полученных неравенств теперь может быть сформулировано и доказано следующее утверждение о внутренних оценках множеств разрешимости.

Теорема 2. *Пусть для каждых $t \in [t_0, t_1]$, $i = \overline{1, N}$, каждой четверки вершин $g_k^{(i)}$, $g_{k_1}^{(i)}$, $g_{k_2}^{(i)}$, $g_{k_3}^{(i)}$, $k_2 \leqslant k_3$, симплекса $\Omega^{(i)}$, для некоторых кусочно-непрерывных вектор-функций $y_j(t) \in \mathcal{P}(t)$, $j = \overline{1, S}$, и дифференцируемых матричнозначных функций $\bar{P}_k^{(i)}(t)$ вида (6) выполнены дифференциальные неравенства (14), а также условия непрерывности функций $V(t,x)$ (формула (5) или (8)) и $u(t,x)$ (формула (12)). Пусть значения матриц $\bar{P}_k^{(i)}(t_1)$ выбраны в соответствии с формулами (9), (10), а $\eta(\tau) = \max_i \eta^{(i)}(\tau)$. Тогда множество*

$$\mathcal{W}^{int}(t) = \left\{ x \in \Omega \colon V(t,x) \leqslant -\int\limits_t^{t_1} \eta(\tau) d\tau \right\}$$

является внутренней оценкой множества разрешимости $\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1)$ нелинейной системы (1).

Доказательство. Заметим, что построенная функция $V(\tau,x)$ является дифференцируемой по любому направлению $l\in\mathbb{R}^{n_x+1}$ в любой точке (τ,x), $\tau\in[t_0,t_1]$, $x\in\Omega$. Более того, из (13) следует, что

$$V'\big(\tau,x;(1,\mathbf{f}(\tau,x)+\mathbf{g}(\tau,x)Y^{(i)}(\tau)\bar{H}^{(i)}\bar{x})^T\big)\leqslant\eta^{(i)}(\tau),$$

если $x\in\Omega^{(i)}$ для некоторого $i\in\{1,\ldots,N\}$. Для любой начальной (в момент времени t) точки $x(t)\in\mathcal{W}^{int}(t)$ построим траекторию системы (1), замкнутой управлением вида (11). Условие (12) гарантирует допустимость этого управления и существование траектории $x(\tau)$, $\tau\in[t,t_1]$. Подставим траекторию в формулу для производной функции $V(\tau,x)$ и проинтегрируем на отрезке $\tau\in[t,t_1]$:

$$V(t_1,x(t_1))-V(t,x(t))\leqslant\int\limits_t^{t_1}\eta^{i(x(\tau))}(\tau)\,d\tau\leqslant\int\limits_t^{t_1}\eta(\tau)\,d\tau.$$

Здесь $i(x(\tau))$ — номер симплекса, в котором находится точка $x(\tau)$. Если $x(\tau)$ лежит на общей границе нескольких симплексов, то в качестве $i(x(\tau))$ можно взять любой из номеров этих симплексов.

Из (9), (10) следует, что $\phi_{\mathcal{X}_1}(x(t_1))\leqslant V(t_1,x(t_1))$. Объединяя неравенства, получаем

$$\phi_{\mathcal{X}_1}(x(t_1))\leqslant V(t,x(t))+\int\limits_t^{t_1}\eta(\tau)\,d\tau\leqslant 0,$$

т.е. $x(t_1)\in\mathcal{X}_1$, а значит, $x(t)\in\mathcal{W}(t,t_1,\mathcal{X}_1)$. Теорема доказана.

6. О ВЫЧИСЛЕНИИ $\bar{P}_k(t)$, $y_k(t)$

При вычислении внутренних оценок множеств разрешимости следует выбирать векторы $y_k(t)\in\mathcal{P}(t)$ таким образом, чтобы минимизировать отклонение величин из (14) от нуля при выполнении указанных неравенств. При известных матрицах $\bar{P}_k(t)$ получим совокупность задач оптимизации относительно неизвестных $\dot{\bar{P}}_j(t)$ и $y_j(t)$, которые нужно решить для получения $\bar{P}_k(t+0)$ в каждый следующий момент времени. В зависимости от нормы, в которой минимизируется погрешность выполнения уравнения ГЯБ, эти задачи могут быть, например, либо задачами линейного программирования, либо задачами минимизации квадратичных функций с линейными ограничениями. Второй вариант является более предпочтительным с точки зрения непрерывности полученного решения по исходным данным. В результате получим следующие соотношения:

$$\sum_{i,k,l_1,l_2,l_3}\delta^2_{i,k,l_1,l_2,l_3}\to\min,\tag{16}$$

$$\delta_{i,k,l_1,l_2,l_3}\geqslant 0,\qquad\text{выполнены равенства (12)},\tag{17}$$

$$\big\langle\bar{g}_{l_1},\dot{\bar{P}}^{(i)}_{\sigma(i,l_3)}(t)\bar{g}_{l_2}\big\rangle=\big\langle\bar{g}_{l_1},\dot{\bar{P}}^{(j)}_{\sigma(j,l_3)}(t)\bar{g}_{l_2}\big\rangle,\tag{18}$$

$$\begin{gathered}(\bar{g}_{l_1})^T\Bigg(\dot{\bar{P}}^{(i)}_k+\bar{P}^{(i)}_k\bar{I}^T(\bar{A}^{(i)}+B^{(i)}Y^{(i)}\bar{H}^{(i)})+(\bar{A}^{(i)}+B^{(i)}Y^{(i)}\bar{H}^{(i)})^T\bar{I}\bar{P}^{(i)}_k+\\+\sum_{s=1}^{n_x+1}(H^{(i)}_s(\bar{A}^{(i)}\bar{g}_{l_3}+B^{(i)}y_{l_3}))\bar{P}^{(i)}_s\Bigg)\bar{g}_{l_2}+\delta_{i,k,l_1,l_2,l_3}=0,\end{gathered}\tag{19}$$

где минимизация проводится по совокупности переменных $\dot{\bar{P}}_j(t)$, $y_j(t)$, а также вспомогательных величин δ_{i,k,l_1,l_2,l_3}, соответствующих погрешностям выполнения уравнения ГЯБ в вершинах симплексов. Здесь (i,k,l_1,l_2,l_3), $i\in\{1,\ldots,N\}$, $k\in\{1,\ldots,n_x+1\}$, $l_1,l_2,l_3\in\{1,\ldots,S\}$, — все возможные наборы индексов, для которых $g_{l_1}\in\Omega^{(i)}$, $g_{l_2}\in\Omega^{(i)}$, $g_{l_3}\in\Omega^{(i)}$, $l_1\leqslant l_2$. Условия (18) должны быть выписаны только для тех наборов индексов (i,j,l_1,l_2,l_3), для которых $g_{l_1}\in\Omega^{(i)}\cap\Omega^{(j)}$, $g_{l_2}\in\Omega^{(i)}\cap\Omega^{(j)}$, $g_{l_3}\in\Omega^{(i)}\cap\Omega^{(j)}$.

Рассмотрим ситуацию, когда сначала некоторым образом фиксируется управление, а затем уже пересчитываются значения $\dot{\bar{P}}_j(t)$. Управления в вершинах симплексов можно определить, например, по аналогии с методом, ранее применённым для случая кусочно-аффинных функций цены в [3, 4]. А именно, для заданной вершины g_k рассмотрим все номера i_1, $\ldots$, i_r симплексов, содержащих эту вершину. Для каждой пары k, i, где $i\in\{i_1,\ldots,i_r\}$, найдём минимизатор выражения (13) при $x\in\Omega^{(i)}$ в точке $x=g_k$:

$$y^{(i),*}_{\sigma(i,k)}=\arg\min_{y_k\in\mathcal{P}(t)}\bigg\{2(\bar{g}_k)^T\bar{P}^{(i)}_k\bar{I}^TB^{(i)}y_k+\sum_{s=1}^{n_x+1}(H^{(i)}_sB^{(i)}y_k)(\bar{g}_k)^T\bar{P}^{(i)}_s\bar{g}_k\bigg\}.$$

Среди этих векторов найдём минимизатор для следующего выражения:

$$\min_y\max_{i\in\{i_1,\ldots,i_r\}}\bigg\{2(\bar{g}_k)^T\bar{P}^{(i)}_k\bar{I}^T(\bar{A}^{(i)}\bar{g}_k+B^{(i)}y)+\sum_{s=1}^{n_x+1}(H^{(i)}_s(\bar{A}^{(i)}\bar{g}_k+B^{(i)}y))(\bar{g}_k)^T\bar{P}^{(i)}_s\bar{g}_k\bigg\},$$

где внешний минимум берётся только по

$$y\in\big\{y^{(i_1),*}_{\sigma(i_1,k)},\ldots,y^{(i_r),*}_{\sigma(i_r,k)}\big\}.$$

Найденный минимизатор используем в качестве вектора y_k. Эту процедуру следует проделать отдельно для каждой из вершин симплексов.

При фиксированных управлениях в вершинах симплексов задача оптимизации (16)–(19) для поиска $\dot{\bar{P}}_j(t)$ упрощается. Теперь условие (19) можно переписать в виде

$$(\bar{g}_{l_1})^T\big(\dot{\bar{P}}^{(i)}_k+\Xi^{(i)}_{k,l_3}\big)\bar{g}_{l_2}+\delta_{i,k,l_1,l_2,l_3}=0, \tag{20}$$

где $\Xi^{(i)}_{k,l_3}$ — некоторая известная матрица. Минимизация теперь проводится по переменным $\dot{\bar{P}}_j(t)$ и вспомогательным величинам δ_{i,k,l_1,l_2,l_3}.

Покажем, что множество допустимых (т.е. удовлетворяющих (18), (20)) величин $\dot{\bar{P}}_j(t)$, δ_{i,k,l_1,l_2,l_3} не пусто. Пусть снова i_1, $\ldots$, i_r — все номера симплексов, содержащих некоторую фиксированную вершину g_s. Рассмотрим некоторый вспомогательный, достаточно большой симплекс $\tilde{\Omega}\subset\mathbb{R}^{n_x}$, для которого $\Omega^{(i)}\subset\tilde{\Omega}$, $i\in\{i_1,\ldots,i_r\}$. Пусть h_1, $\ldots$, h_{n_x+1} — вершины этого симплекса. Существует единственная симметричная матрица $\Lambda\in\mathbb{R}^{(n_x+1)\times(n_x+1)}$, для которой

$$(\bar{h}_{s_1})^T\Lambda\bar{h}_{s_2}=\min_{i,l_3}\big\{-(\bar{h}_{s_1})^T\Xi^{(i)}_{\sigma(i,s),l_3}\bar{h}_{s_2}\big\},\quad s_1,s_2\in\{1,\ldots,n_x+1\},$$

где минимум нужно взять по всем $i\in\{i_1,\ldots,i_r\}$, $l_3\in\{1,\ldots,S\}$, для которых $g_{l_3}\in\Omega^{(i)}$. Значит, выполнены неравенства

$$(\bar{h}_{j_1})^T\big(\Lambda+\Xi^{(i)}_{\sigma(i,s),l_3}\big)\bar{h}_{j_2}\leqslant 0,\quad j_1,j_2\in\{1,\ldots,n_x+1\},\ \ i\in\{i_1,\ldots,i_r\}.$$

Поскольку любая точка $g^{(i)}_k$, $i\in\{i_1,\ldots,i_r\}$, $k=\overline{1,n_x+1}$, лежит внутри $\tilde{\Omega}$, то

$$\bar{g}^{(i)}_k=\sum_{j=1}^{n_x+1}\tilde{\alpha}_j(\bar{g}^{(i)}_k)\bar{h}_j,\quad \tilde{\alpha}_j(\bar{g}^{(i)}_l)\in[0,1].$$

Следовательно, для любых $k_1, k_2 \in \{1, \ldots, n_x+1\}$ и $i \in \{i_1, \ldots, i_r\}$ выполнено неравенство

$$(\bar{g}_{k_1}^{(i)})^T (\Lambda + \Xi_{\sigma(i,s),l_3}^{(i)}) \bar{g}_{k_2}^{(i)} = \sum_{j_1=1}^{n_x+1} \sum_{j_2=1}^{n_x+1} \tilde{\alpha}_{j_1}(\bar{g}_{k_1}^{(i)}) \tilde{\alpha}_{j_2}(\bar{g}_{k_2}^{(i)}) (\bar{h}_{j_1})^T (\Lambda + \Xi_{\sigma(i,s),l_3}^{(i)}) \bar{h}_{j_2} \leqslant 0.$$

Если в качестве $\dot{\bar{P}}_s(t)$ взять построенную матрицу Λ, то найдутся такие неотрицательные δ_{i,k,l_1,l_2,l_3}, для которых будут выполнены условия (18), (20). Отсюда также следует непустота множества допустимых параметров для исходной задачи (16)–(19). Конечно, построенная матрица Λ не является решением данной задачи, а может быть использована лишь в качестве оценки решения.

Отметим, что задача (16)–(18), (20) может быть переформулирована в терминах задачи квадратичного выпуклого программирования и далее эффективно решена численно (см. [8, 9]).

Рассмотрим частный случай решения указанной выше задачи оптимизации, когда $P_k(t) \equiv 0$, $p_k(t) \equiv 0$. Тогда в матрице $\bar{P}_k(t)$ ненулевым будет только элемент $\pi_k(t) = V(t, g_k)$, соответствующий постоянной (не зависящей от x) величине в квадратичной форме $\langle \bar{x}, \bar{P}_k(t)\bar{x}\rangle$, при этом $\bar{I}\bar{P}_k = 0$ и неравенства (14) примут вид

$$\dot{\pi}_k^{(i)} + \sum_{s=1}^{n_x+1} \big(H_s^{(i)}\big(\bar{A}^{(i)}\bar{g}_{l_1}^{(i)} + B^{(i)}y_{l_1}^{(i)}\big)\big)\pi_s^{(i)} \leqslant 0,$$

что соответствует неравенствам, полученным ранее для случая непрерывных кусочно-аффинных функций цены в [3, 4]. Таким образом, можно утверждать, что разработанный выше метод поиска кусочно-кубической функции цены является более общим, чем использованный авторами ранее. В то же время за счёт дополнительных переменных можно добиться меньших погрешностей решения уравнения ГЯБ даже при использовании того же синтеза управлений, что и в случае кусочно-аффинной функции цены.

7. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

В качестве примера рассмотрим задачу управления движением маятника с электромотором, ранее использованную для демонстрации применения кусочно-квадратичных функций цены в работе [5]. Система дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{MgL}{J}\sin x_1 - \frac{k_2}{J}x_2 + \frac{k_1}{J}u,$$

переменная x_1 соответствует углу отклонения маятника от вертикального положения, а x_2 — угловой скорости. Выбраны следующие значения параметров: $J = 2$, $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $M = 0.1$, $L = 1$. На управление наложено ограничение $u \in [-1, 1]$. Требуется перевести траекторию из точки $x_0 = [1.2\ \ 0.5]^T$ в начальный момент времени $t_0 = 0$ в точку $x_1 = [\pi/2\ \ 0]^T$ в конечный момент времени $t_1 = 1$.

При реализации численного метода сначала были зафиксированы вершины $g_k \in \mathbb{R}^2$, расположенные на правильной сетке со сторонами длиной $\Delta = 0.15$, которые затем были использованы для разбиения области Ω на симплексы $\Omega^{(i)}$ с помощью триангуляции Делоне [10]. На рисунке показано, что при одинаковом разбиении кусочно-кубические функции могут давать лучшую апостериорную точность, чем кусочно-квадратичные (итоговое расстояние до целевого множества равно 0.018 в стандартной метрике пространства $\mathbb{R}^2$ для представленного алгоритма и 0.139 для метода из работы [5]). Штриховая линия в каждом из случаев показывает границу множества, куда априорно гарантируется попадание траектории при замыкании системы управлением вида (11).

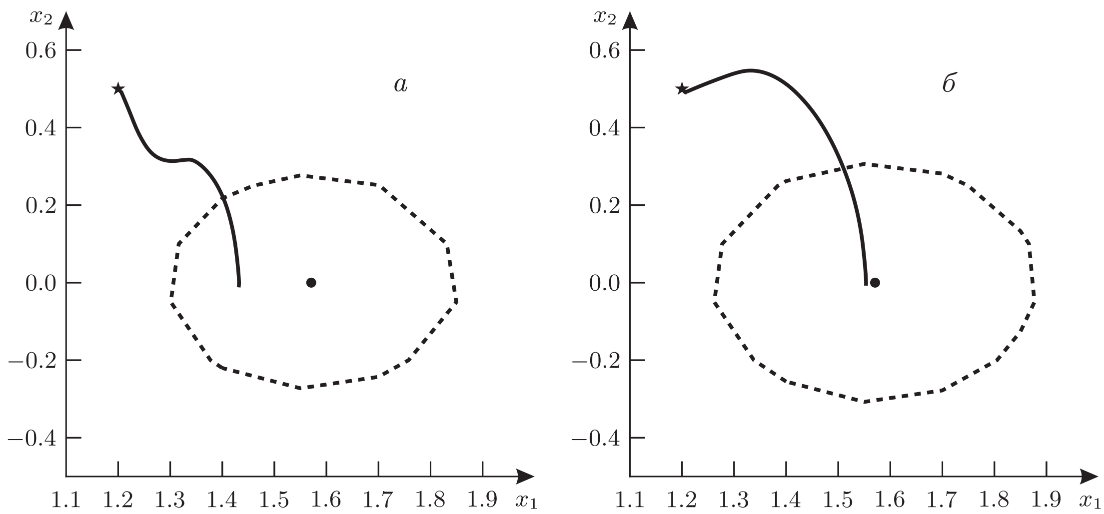

Рисунок. Траектории (сплошная линия) при использовании кусочно-квадратичной (*а*) и кусочно-кубической (*б*) функций цены: $\star$ — начальная точка; $\bullet$ — целевое множество.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведённые в данной работе формулы и вспомогательные задачи оптимизации позволяют построить непрерывную кусочно-кубическую функцию, задающую оценку функции цены для задачи целевого управления. Соответствующий численный метод, конечно, является более сложным, чем в случаях с кусочно-аффинной или кусочно-квадратичной оценкой, однако за счёт дополнительных параметров можно получить более точную оценку неизвестной истинной функции цены. Предложенный метод может быть использован при решении задач управления сложными нелинейными системами с небольшой размерностью фазового пространства.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kurzhanski, A.B. Dynamics and Control of Trajectory Tubes / A.B. Kurzhanski, P. Varaiya. — Basel : Birkhäuser, 2014. — 445 p.
2. Куржанский, А.Б. Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона–Якоби в теории управления / А.Б. Куржанский // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2006. — Т. 12, № 1. — С. 173–183.
3. Точилин, П.А. О построении кусочно-аффинной функции цены в задаче оптимального управления на бесконечном отрезке времени / П.А. Точилин // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2020. — Т. 26, № 1. — С. 223–238.
4. Точилин, П.А. О построении разрывного кусочно-аффинного синтеза управлений в задаче целевого управления / П.А. Точилин, И.А. Чистяков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2021. — Т. 27, № 3. — С. 194–210.

5. Чистяков, И.А. Применение кусочно-квадратичных функций цены для приближённого решения нелинейной задачи целевого управления / И.А. Чистяков, П.А. Точилин // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 11. — С. 1545–1554.
6. Чистяков, И.А. Построение разрывных кусочно-квадратичных функций цены в задаче целевого управления / И.А. Чистяков, П.А. Точилин // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2022. — Т. 28, № 3. — С. 259–273.
7. Половинкин, Е.С. Многозначный анализ и дифференциальные включения / Е.С. Половинкин. — М. : Физматлит, 2015. — 524 с.
8. Interior-point methods for large-scale cone programming / M.S. Andersen, J. Dahl, Z. Liu, L. Vandenberghe // Optimization for Machine Learning / Eds. S. Sra, S. Nowozin, S.J. Wright. — Cambridge ; London : The MIT Press, 2011. — P. 55–83.
9. OSQP: an operator splitting solver for quadratic programs / B. Stellato, G. Banjac, P. Goulart [et al.] // Math. Prog. Comp. — 2020. — V. 12. — P. 637–672.
10. Скворцов, А.В., Мирза Н.С. Алгоритмы построения и анализа триангуляции / А.В. Скворцов, Н.С. Мирза. — Томск : Изд-во Томск. ун-та, 2006. — 168 с.

ON PIECEWISE CUBIC ESTIMATES OF THE VALUE FUNCTION IN THE PROBLEM OF TARGET CONTROL FOR A NONLINEAR SYSTEM

P. A. Tochilin[1], I. A. Chistyakov[2]

[1,2]*Lomonosov Moscow State University, Russia*
[1]*Shenzhen MSU-BIT University, China*
e-mail: [1]tochilin@cs.msu.ru, [2]chistyakov.ivan@yahoo.com

A nonlinear system of ordinary differential equations with control parameters is considered. Pointwise restrictions are imposed on the possible values of these parameters. It is required to solve the problem of transferring the trajectory of the system from an arbitrary initial position to the smallest possible neighborhood of a given target set at a fixed time interval by selecting the appropriate feedback control. To solve this problem, it is proposed to construct a continuous piecewise cubic function of a special kind. The level sets of this function correspond to internal estimates of the solvability sets of the system. Using this function, it is also possible to construct a feedback control function that solves the target control problem at a fixed time interval. The paper proposes formulas for calculating the values of a piecewise cubic function, examines its properties, and considers an algorithm for searching for parameters defining this function.

Keywords: nonlinear dynamics, position control, dynamic programming, comparison principle.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the agreement no. 075-15-2022-284.

REFERENCES

1. Kurzhanski, A.B. and Varaiya, P., *Dynamics and Control of Trajectory Tubes*, Basel: Birkhäuser, 2014.
2. Kurzhanski, A.B., Comparison principle for equations of the Hamilton–Jacobi type in control theory, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2006, vol. 253, pp. S185–S195.
3. Tochilin, P.A., On the construction of a piecewise affine value function in an infinite-horizon optimal control problem, *Tr. In-ta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 223–238.
4. Tochilin, P.A. and Chistyakov, I.A., On the construction of a discontinuous piecewise affine synthesis in a target control problem, *Tr. In-ta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 194–210.
5. Chistyakov, I.A. and Tochilin, P.A., Application of piecewise quadratic value functions to the approximate solution of a nonlinear target control problem, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 11. pp. 1513–1523.

6. Chistyakov, I.A. and Tochilin, P.A., Construction of discontinuous piecewise quadratic value functions in a target control problem, *Tr. In-ta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 259–273.
7. Polovinkin, E.S., *Mnogoznachniy analiz i differentialnie vkluchenia* (Set-valued Analysis and Differential Inclusions), Moscow: Fizmatlit, 2015.
8. Andersen, M.S., Dahl, J., Liu, Z., and Vandenberghe, L., Interior-point methods for large-scale cone programming, in *Optimization for Machine Learning*, Eds. S. Sra, S. Nowozin, S.J. Wright, Cambridge; London: The MIT Press, 2011, pp. 55–83.
9. Stellato, B., Banjac, G., Goulart, P., Bemporad, A., and Boyd, S., OSQP: an operator splitting solver for quadratic programs, *Math. Prog. Comp.*, 2020, vol. 12, pp. 637–672.
10. Skvortsov, A.V. and Mirza, N.S., *Algoritmi postroenia i analiza trianguliacii* (Algorithms of Construction and Analysis of Triangulations), Tomsk: Tomsk Univ. Press, 2006.