

УДК 517.977

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УЧЁТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ НА СОСТОЯНИЯ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА БЭКСТЕППИНГА

© А. Е. Голубев

*Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлунского РАН, г. Москва**e-mail: v-algolu@hotmail.com**Поступила в редакцию 27.10.2023 г., после доработки 18.01.2024 г.; принята к публикации 13.02.2024 г.*

Решена задача стабилизации нулевого значения вектора состояния нелинейных динамических систем специального вида с учётом ограничений на абсолютные величины переменных состояния. Управление построено на основе метода бэкстеппинга с использованием логарифмических барьерных функций Ляпунова. Полученные стабилизирующие обратные связи, в отличие от аналогичных известных результатов, основаны на использовании линейных виртуальных стабилизирующих функций, у которых отсутствует свойство неограниченного роста при приближении переменных состояния к граничным значениям. В качестве примера рассмотрено решение задачи позиционирования подводного объекта в заданной точке пространства с учётом ограничений на состояние.

Ключевые слова: стабилизация, нелинейная динамическая система, бэкстеппинг, ограничение на состояние, управление механической системой.

DOI: 10.31857/S0374064124050074, EDN: LBJSHT

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Одним из популярных направлений исследований последних лет в области нелинейных систем управления является построение законов управления с учётом различных ограничений на переменные состояния и управления системы. Наиболее эффективный аналитический подход к синтезу стабилизирующих обратных связей с учётом ограничений на состояние или выход объекта управления основан на использовании метода бэкстеппинга [1, гл. 2] в сочетании с барьерными функциями Ляпунова [2–14]. По аналогии с барьерными функциями в методах оптимизации [15, гл. 11] барьерные функции Ляпунова представляют собой специальный класс функций Ляпунова, неограниченно возрастающих при стремлении аргумента к граничным значениям переменных состояния или выходных переменных. Применение метода бэкстеппинга для построения стабилизирующих обратных связей с учётом ограничений, как правило, основывается на использовании логарифмических [2, 3] или тангенциальных [4, 6] барьерных функций Ляпунова. Логарифмические барьерные функции в качестве функции Ляпунова замкнутой обратной связью системы впервые предложены в работе [2], где при помощи метода бэкстеппинга синтезирована стабилизирующая обратная связь, гарантирующая выполнение заданных ограничений на абсолютные значения переменных состояния системы. Учёт ограничений на значения выходных переменных системы при синтезе управления на основе метода бэкстеппинга исследовался в работах [3–7]. Решения различных прикладных задач с использованием барьерных функций Ляпунова представлены, например, в статьях [8, 9, 12–14].

Отметим, что для достижения максимального качества и производительности системы управления может потребоваться функционирование объекта в режиме, когда соответствующие переменные принимают значения, близкие к граничным. Однако рассматриваемые в большинстве работ обратные связи могут приводить к значениям управляющих переменных, неограниченно возрастающим при приближении выходных переменных или переменных состояния к граничным значениям [2, 3, 5, 7]. При этом неограниченный рост переменных управления является нежелательным, так как может приводить к насыщению управляющих воздействий и перерасходу ресурса управления.

В статье [14] для механических систем, описываемых уравнениями Эйлера–Лагранжа, предложена процедура построения стабилизирующих обратных связей, гарантирующих выполнение заданных ограничений на абсолютные величины обобщённых координат, скоростей и ускорений, а также отсутствие неограниченного роста переменных управления при приближении переменных состояния к граничным значениям.

Настоящая работа посвящена развитию подхода, предложенного в [14], для задачи стабилизации нулевого значения вектора состояния нелинейной динамической системы, которая может быть представлена как совокупность подсистем

$$\dot{x}_{1i} = x_{2i}, \quad \dots, \quad \dot{x}_{r_i-1,i} = x_{r_i i}, \quad \dot{x}_{r_i i} = f_i(x) + g_i(x)u_i, \quad i \in \overline{1, l}, \quad (1)$$

$x_i = (x_{1i}, \dots, x_{r_i i})^T \in \mathbb{R}^{r_i}$, $x = (x_1^T, \dots, x_l^T)^T \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $u = (u_1, \dots, u_l)^T$ — вектор управляющих воздействий, функции $f_i(x)$ и $g_i(x)$ локально липшицевы, $g_i(x) \neq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Задача. Для произвольных заданных положительных констант $M_{ji} > 0$, $j \in \overline{1, r_i}$, $i \in \overline{1, l}$, требуется найти компоненты вектора управляющих воздействий u в системе (1) в виде обратных связей по состоянию, обеспечивающих при любых начальных значениях $x(0)$ таких, что $|x_{ji}(0)| < M_{ji}$, $j \in \overline{1, r_i}$, $i \in \overline{1, l}$, выполнение условия $\|x(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ с учётом ограничений

$$|x_{ji}(t)| < M_{ji}, \quad j \in \overline{1, r_i}, \quad i \in \overline{1, l}, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

В п. 2 для решения рассматриваемой задачи стабилизации системы (1) с ограничениями (2) синтезирована обратная связь по состоянию на основе метода бэкстеппинга с использованием логарифмических барьерных функций Ляпунова. Исследованы различные варианты выбора виртуальных стабилизирующих функций. В п. 3 в качестве примера решена задача позиционирования подводного объекта в заданной точке пространства с учётом ограничений на состояние.

2. ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ С УЧЁТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ

Стабилизирующее управление будем искать с помощью метода бэкстеппинга [1, гл. 2]. Справедлива следующая

Теорема. Пусть

$$\begin{aligned} \alpha_{1i}(x_{1i}) &= -c_{1i}z_{1i}, \quad z_{1i} = x_{1i}, \\ \alpha_{ji}(x_{1i}, \dots, x_{ji}) &= \sum_{s=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1,i}}{\partial x_{si}} x_{s+1,i} - c_{ji}z_{ji} - N_{ji}^2 z_{ji}, \\ z_{ji} &= x_{ji} - \alpha_{j-1,i}(x_{1i}, \dots, x_{j-1,i}), \quad j \in \overline{2, r_i}, \quad i \in \overline{1, l}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $c_{1i} > 0$, $N_{ji} > 0$, $c_{ji} > 0$ — положительные постоянные, удовлетворяющие неравенствам

$$N_{2i} \leq M_{2i} - c_{1i}M_{1i},$$

$$N_{ji} \leq M_{ji} - \sum_{s=1}^{j-2} \left| \frac{\partial \alpha_{j-2,i}}{\partial x_{si}} \right| M_{s+1,i} - c_{j-1,i} N_{j-1,i} - N_{j-1,i}^3, \quad j \in \overline{3, r_i}, \quad i \in \overline{1, l}. \quad (4)$$

Тогда система (1), замкнутая обратной связью $u = u(x)$, покомпонентно заданной соотношениями

$$u_i = \frac{1}{g_i(x)} (-f_i(x) + \alpha_{r_i i}(x_{1i}, \dots, x_{r_i i})), \quad i \in \overline{1, l}, \quad (5)$$

асимптотически устойчива в точке $x = 0$, причём при любых начальных значениях $x(0)$ таких, что $|z_{ji}(0)| < N_{ji}$, $j \in \overline{1, r_i}$, $i \in \overline{1, l}$, выполнено условие $\|x(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ и справедливы неравенства (2). Дополнительно имеют место рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_{1i}} &= -c_{1i}, & \frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial x_{1i}} &= \frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_{1i}}(c_{2i} + N_{2i}^2), & \frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial x_{2i}} &= \frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_{1i}} - (c_{2i} + N_{2i}^2), \\ \frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial x_{1i}} &= \frac{\partial \alpha_{j-1,i}}{\partial x_{1i}}(c_{ji} + N_{ji}^2), & \frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial x_{si}} &= \frac{\partial \alpha_{j-1,i}}{\partial x_{si}}(c_{ji} + N_{ji}^2) + \frac{\partial \alpha_{j-1,i}}{\partial x_{s-1,i}}, & s &= \overline{2, j-1}, \\ \frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial x_{ji}} &= \frac{\partial \alpha_{j-1,i}}{\partial x_{j-1,i}} - (c_{ji} + N_{ji}^2), & j &\in \overline{3, r_i}, & i &\in \overline{1, l}. \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство. Рассмотрим z_{ji} , $j \in \overline{1, r_i}$, $i \in \overline{1, l}$, определяемые равенствами (3), как новые переменные состояния системы (1) и используем далее обозначения $z_i = (z_{1i}, \dots, z_{r_i i})^T \in \mathbb{R}^{r_i}$, $z = (z_1^T, \dots, z_l^T)^T \in \mathbb{R}^n$. Отметим, что соотношения (3) задают диффеоморфизм из $\mathbb{R}^n = \{x\}$ в $\mathbb{R}^n = \{z\}$, причём нулевое значение вектора состояния x взаимно-однозначно отображается в нулевое значение вектора состояния z . В переменных z система (1), замкнутая обратной связью $u = u(x)$, покомпонентно заданная выражениями (5), примет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1i} &= z_{2i} - c_{1i}z_{1i}, & \dot{z}_{2i} &= z_{3i} - c_{2i}z_{2i} - N_{2i}^2 z_{2i}, & \dots \\ \dots, & & \dot{z}_{r_i-1,i} &= z_{r_i i} - c_{r_i-1,i} z_{r_i-1,i} - N_{r_i-1,i}^2 z_{r_i-1,i}, & \dot{z}_{r_i i} &= -c_{r_i i} z_{r_i i} - N_{r_i i}^2 z_{r_i i}, & i &\in \overline{1, l}. \end{aligned} \quad (7)$$

Покажем, что положение равновесия $z = 0$ системы (7) асимптотически устойчиво. В качестве функции Ляпунова для системы (7) рассмотрим барьерную функцию

$$V(z) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{r_i} \kappa_{ji} \ln \frac{N_{ji}^2}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2}, \quad (8)$$

где $\kappa_{ji} > 0$ — произвольные постоянные, $N_{1i} = M_{1i}$. Заметим, что функция $V(z)$ является положительно определённой в области $\{z \in \mathbb{R}^n : |z_{ji}| < N_{ji}, j \in \overline{1, r_i}, i \in \overline{1, l}\}$ и неограниченно возрастает $V(z) \rightarrow +\infty$ при стремлении $|z_{ji}| \rightarrow N_{ji} - 0$ хотя бы для одной пары значений j и i , $1 \leq j \leq r_i$, $1 \leq i \leq l$.

Производная по времени функции $V(z)$ в силу системы (7) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z) &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\kappa_{ji} z_{ji} \dot{z}_{ji}}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2} = \sum_{i=1}^l \left(- \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\kappa_{ji} c_{ji} z_{ji}^2}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2} - \sum_{j=2}^{r_i} \frac{\kappa_{ji} N_{ji}^2 z_{ji}^2}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2} + \sum_{j=1}^{r_i-1} \frac{\kappa_{ji} z_{ji} z_{j+1,i}}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^l \left(- \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\kappa_{ji} c_{ji} z_{ji}^2}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2} - \sum_{j=2}^{r_i} \frac{\kappa_{ji} (N_{ji}^2 - z_{ji}^2) z_{ji}^2}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2} - \sum_{j=2}^{r_i} \frac{\kappa_{ji} z_{ji}^4}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2} + \sum_{j=1}^{r_i-1} \frac{\kappa_{ji} z_{ji} z_{j+1,i}}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2} \right) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i=1}^l \left(- \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\kappa_{ji} c_{ji} z_{ji}^2}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2} + \sum_{j=1}^{r_i-1} \frac{\kappa_{ji} z_{ji} z_{j+1,i}}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2} - \sum_{j=2}^{r_i} \kappa_{ji} z_{ji}^2 \right).$$

В результате выделения полных квадратов справедлива оценка

$$\begin{aligned} \dot{V}(z) &\leq \sum_{i=1}^l \left(- \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\kappa_{ji} c_{ji} z_{ji}^2}{2(N_{ji}^2 - z_{ji}^2)} - \sum_{j=1}^{r_i-1} z_{j+1,i}^2 \left(\kappa_{j+1,i} - \frac{\kappa_{ji}}{2c_{ji}(N_{ji}^2 - z_{ji}^2)} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{r_i-1} \left(z_{ji} \sqrt{\frac{\kappa_{ji} c_{ji}}{2(N_{ji}^2 - z_{ji}^2)}} - z_{j+1,i} \sqrt{\frac{\kappa_{ji}}{2c_{ji}(N_{ji}^2 - z_{ji}^2)}} \right)^2 \right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^l \left(- \sum_{j=1}^{r_i-1} z_{j+1,i}^2 \left(\kappa_{j+1,i} - \frac{\kappa_{ji}}{2c_{ji}(N_{ji}^2 - z_{ji}^2)} \right) - \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\kappa_{ji} c_{ji} z_{ji}^2}{2(N_{ji}^2 - z_{ji}^2)} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Следовательно, производная по времени функции $V(z)$ в силу системы (7) отрицательно определена в области

$$\left\{ z \in \mathbb{R}^n : |z_{ji}| < \sqrt{N_{ji}^2 - \kappa_{ji}/(2\kappa_{j+1,i}c_{ji})}, \quad |z_{ri}| < N_{ri}, \quad j \in \overline{1, r_i-1}, \quad i \in \overline{1, l} \right\}.$$

Заметим, что для любых коэффициентов усиления $c_{ji} > 0$ в управлениях (5) за счёт выбора положительных постоянных κ_{ji} и $\kappa_{j+1,i}$ в функции Ляпунова $V(z)$ значения величин $N_{ji}^2 - \kappa_{ji}/(2\kappa_{j+1,i}c_{ji})$ можно сделать положительными и сколь угодно близкими к значениям соответствующих констант N_{ji}^2 , $j \in \overline{1, r_i-1}$, $i \in \overline{1, l}$.

Тогда согласно монографии [16, гл. 4] положение равновесия $z=0$ системы (7) асимптотически устойчиво с областью притяжения

$$\{z \in \mathbb{R}^n : |z_{ji}| < N_{ji}, \quad j \in \overline{1, r_i}, \quad i \in \overline{1, l}\}, \quad (10)$$

являющейся положительно инвариантным множеством. Таким образом, для любого решения $z=z(t)$ системы (7) с начальной точкой в множестве (10) выполнено условие $\|z(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ и справедливы ограничения

$$|z_{ji}(t)| < N_{ji}, \quad j \in \overline{1, r_i}, \quad i \in \overline{1, l}, \quad t \geq 0. \quad (11)$$

Отметим, что для любых положительных постоянных M_{ji} , $j \in \overline{1, r_i}$, $i \in \overline{1, l}$, найдутся константы $c_{ji} > 0$ и $N_{ji} > 0$, $j \in \overline{1, r_i}$, $i \in \overline{1, l}$, такие, что справедливы неравенства (4). Следовательно, с учётом соотношений (3) и (4) положение равновесия $x=0$ замкнутой системы (1) асимптотически устойчиво и для любых начальных значений $x(0)$, удовлетворяющих условиям $|z_{ji}(0)| < N_{ji}$, $j \in \overline{1, r_i}$, $i \in \overline{1, l}$, выполнено $\|x(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, причём в силу неравенств (11) при всех $t \geq 0$ имеют место оценки

$$|x_{1i}(t)| = |z_{1i}(t)| < N_{1i} = M_{1i},$$

$$|x_{2i}(t)| = |z_{2i}(t) + \alpha_{1i}(x_{1i}(t))| \leq |z_{2i}(t)| + |\alpha_{1i}(x_{1i}(t))| \leq |z_{2i}(t)| + c_{1i}|x_{1i}(t)| < N_{2i} + c_{1i}M_{1i} \leq M_{2i},$$

$$|x_{ji}(t)| = |z_{ji}(t) + \alpha_{j-1,i}(x_{1i}(t), \dots, x_{j-1,i}(t))| \leq |z_{ji}(t)| + |\alpha_{j-1,i}(x_{1i}(t), \dots, x_{j-1,i}(t))| \leq$$

$$\leq |z_{ji}(t)| + \sum_{s=1}^{j-2} \left| \frac{\partial \alpha_{j-2,i}}{\partial x_{si}} \right| |x_{s+1,i}(t)| + c_{j-1,i} |z_{j-1,i}(t)| + N_{j-1,i}^2 |z_{j-1,i}(t)| <$$

$$< N_{ji} + \sum_{s=1}^{j-2} \left| \frac{\partial \alpha_{j-2,i}}{\partial x_{si}} \right| M_{s+1,i} + c_{j-1,i} N_{j-1,i} + N_{j-1,i}^3 \leq M_{ji}, \quad j \in \overline{3, r_i}, \quad i \in \overline{1, l}.$$

Наконец, докажем справедливость соотношений (6) с помощью метода математической индукции. Для произвольного значения i , $1 \leq i \leq l$, запишем функцию

$$\alpha_{2i}(x_{1i}, x_{2i}) = \frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_{1i}} x_{2i} - c_{2i} z_{2i} - N_{2i}^2 z_{2i},$$

где $\partial \alpha_{1i} / \partial x_{1i} = -c_{1i}$, $z_{2i} = x_{2i} - \alpha_{1i}(x_{1i})$. Получим

$$\frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial x_{1i}} = \frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_{1i}} (c_{2i} + N_{2i}^2) = -c_{1i} (c_{2i} + N_{2i}^2), \quad \frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial x_{2i}} = \frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_{1i}} - (c_{2i} + N_{2i}^2) = -c_{1i} - (c_{2i} + N_{2i}^2).$$

Далее рассмотрим функцию

$$\alpha_{3i}(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = \frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial x_{1i}} x_{2i} + \frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial x_{2i}} x_{3i} - c_{3i} z_{3i} - N_{3i}^2 z_{3i},$$

где $z_{3i} = x_{3i} - \alpha_{2i}(x_{1i}, x_{2i})$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{3i}}{\partial x_{1i}} &= \frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial x_{1i}} (c_{3i} + N_{3i}^2) = -c_{1i} (c_{2i} + N_{2i}^2) (c_{3i} + N_{3i}^2), \\ \frac{\partial \alpha_{3i}}{\partial x_{2i}} &= \frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial x_{2i}} (c_{3i} + N_{3i}^2) + \frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial x_{1i}} = -(c_{1i} + c_{2i} + N_{2i}^2) (c_{3i} + N_{3i}^2) - c_{1i} (c_{2i} + N_{2i}^2), \\ \frac{\partial \alpha_{3i}}{\partial x_{3i}} &= \frac{\partial \alpha_{2i}}{\partial x_{2i}} - (c_{3i} + N_{3i}^2) = -c_{1i} - (c_{2i} + N_{2i}^2) - (c_{3i} + N_{3i}^2). \end{aligned}$$

Предположим, что соотношения (6) справедливы для $\alpha_{ki}(x_{1i}, \dots, x_{ki})$ при произвольном k , $3 < k < r_i$. Тогда для функции

$$\alpha_{k+1,i}(x_{1i}, \dots, x_{k+1,i}) = \sum_{s=1}^k \frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial x_{si}} x_{s+1,i} - c_{k+1,i} z_{k+1,i} - N_{k+1,i}^2 z_{k+1,i},$$

где $z_{k+1,i} = x_{k+1,i} - \alpha_{ki}(x_{1i}, \dots, x_{ki})$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{k+1,i}}{\partial x_{1i}} &= \frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial x_{1i}} (c_{k+1,i} + N_{k+1,i}^2) = -c_{1i} (c_{2i} + N_{2i}^2) \dots (c_{ki} + N_{ki}^2) (c_{k+1,i} + N_{k+1,i}^2), \\ \frac{\partial \alpha_{k+1,i}}{\partial x_{ji}} &= \frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial x_{ji}} (c_{k+1,i} + N_{k+1,i}^2) + \frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial x_{j-1,i}}, \quad j = \overline{2, k}, \\ \frac{\partial \alpha_{k+1,i}}{\partial x_{k+1,i}} &= \frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial x_{ki}} - (c_{k+1,i} + N_{k+1,i}^2) = -c_{1i} - (c_{2i} + N_{2i}^2) - \dots - (c_{ki} + N_{ki}^2) - (c_{k+1,i} + N_{k+1,i}^2). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Дополнительно отметим, что при $|z_{ks}| \rightarrow N_{ks} - 0$ для какой-либо пары значений k и s , $1 \leq k \leq r_i$, $1 \leq s \leq l$, функции $\alpha_{ji}(x_{1i}, \dots, x_{ji})$, заданные соотношениями (3), в силу линейности не являются неограниченно возрастающими и имеют конечный предел. В этом свойстве виртуальных стабилизирующих функций $\alpha_{ji}(x_{1i}, \dots, x_{ji})$, используемых в обратных связях (5), заключается существенное отличие предлагаемого в работе способа применения метода бэкстепинга от используемых в других работах (см., например, [2, 3]). Полученные в статьях [2, 3] обратные связи на основе метода бэкстепинга могут приводить к значениям виртуальных стабилизирующих функций, а следовательно, и управляющих переменных, неограниченно возрастающим при приближении переменных состояния к граничным значениям.

По аналогии с результатами работы [14] можно также использовать следующие виртуальные стабилизирующие функции в управлениях (5):

$$\alpha_{ji}(x_{1i}, \dots, x_{ji}) = \sum_{s=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1,i}}{\partial x_{si}} x_{s+1,i} - c_{ji} z_{ji} - z_{ji}(N_{ji}^2 - z_{ji}^2), \quad j \in \overline{2, r_i}. \quad (12)$$

Рассматривая производную функции (8) в силу соответствующей замкнутой системы в переменных z , которая примет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1i} &= z_{2i} - c_{1i} z_{1i}, \quad \dot{z}_{2i} = z_{3i} - c_{2i} z_{2i} - z_{2i}(N_{2i}^2 - z_{2i}^2), \quad \dots \\ \dots, \quad \dot{z}_{r_i-1,i} &= z_{r_i i} - c_{r_i-1,i} z_{r_i-1,i} - z_{r_i-1,i}(N_{r_i-1,i}^2 - z_{r_i-1,i}^2), \\ \dot{z}_{r_i i} &= -c_{r_i i} z_{r_i i} - z_{r_i i}(N_{r_i i}^2 - z_{r_i i}^2), \quad i \in \overline{1, l}, \end{aligned} \quad (13)$$

и рассуждая аналогичным образом, легко показать, что справедлива оценка (9) и имеет место асимптотическая устойчивость положения равновесия $z=0$ системы (13) с областью притяжения (10), являющейся положительно инвариантным множеством. Тем не менее отметим, что виртуальные стабилизирующие функции, заданные соотношениями (3), предпочтительнее функций (12) в силу линейности и более простых соотношений между постоянными M_{ji} , c_{ji} и N_{ji} , $j \in \overline{1, r_i}$, $i \in \overline{1, l}$, имеющими вид (4).

Далее, согласно работам [2, 3], также возможными виртуальными стабилизирующими функциями в управлениях (5) являются

$$\alpha_{ji}(x_{1i}, \dots, x_{ji}) = \sum_{s=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{j-1,i}}{\partial x_{si}} x_{s+1,i} - c_{ji} z_{ji} - \frac{\kappa_{j-1,i} z_{j-1,i} (N_{ji}^2 - z_{ji}^2)}{\kappa_{ji} (N_{j-1,i}^2 - z_{j-1,i}^2)}, \quad j \in \overline{2, r_i}. \quad (14)$$

Соответствующая замкнутая система в переменных z запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1i} &= z_{2i} - c_{1i} z_{1i}, \quad \dot{z}_{2i} = z_{3i} - c_{2i} z_{2i} - \frac{\kappa_{1i} z_{1i} (N_{2i}^2 - z_{2i}^2)}{\kappa_{2i} (N_{1i}^2 - z_{1i}^2)}, \quad \dots \\ \dots, \quad \dot{z}_{r_i-1,i} &= z_{r_i i} - c_{r_i-1,i} z_{r_i-1,i} - \frac{\kappa_{r_i-2,i} z_{r_i-2,i} (N_{r_i-1,i}^2 - z_{r_i-1,i}^2)}{\kappa_{r_i-1,i} (N_{r_i-2,i}^2 - z_{r_i-2,i}^2)}, \\ \dot{z}_{r_i i} &= -c_{r_i i} z_{r_i i} - \frac{\kappa_{r_i-1,i} z_{r_i-1,i} (N_{r_i i}^2 - z_{r_i i}^2)}{\kappa_{r_i i} (N_{r_i-1,i}^2 - z_{r_i-1,i}^2)}, \quad i \in \overline{1, l}. \end{aligned} \quad (15)$$

Производная функции (8) в силу системы (15) имеет вид

$$\dot{V}(z) = - \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\kappa_{ji} c_{ji} z_{ji}^2}{N_{ji}^2 - z_{ji}^2}$$

и является отрицательно определённой в области (10). Следовательно, положение равновесия $z=0$ системы (15) асимптотически устойчиво с областью притяжения (10), являющейся положительно инвариантным множеством.

Однако в отличие от функций, заданных соотношениями (3) и (12), при $|z_{j-1,i}| \rightarrow N_{j-1,i} - 0$ хотя бы для одной пары значений j и i , $2 \leq j \leq r_i$, $1 \leq i \leq l$, соответствующая виртуальная стабилизирующая функция $\alpha_{ji}(x_{1i}, \dots, x_{ji})$ (14) может неограниченно возрастать, что приведёт к неограниченному росту соответствующего управления (5).

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ПОДВОДНОГО ОБЪЕКТА

Рассмотрим уравнения пространственного движения подводного аппарата, записанные в векторной форме [14; 17, гл. 2]:

$$M_\eta(\eta)\ddot{\eta} + C_\eta(\eta, \nu)\dot{\eta} + D_\eta(\eta, \nu)\dot{\eta} + \tilde{g}(\eta) = \tau, \quad \nu = J^{-1}(\eta)\dot{\eta}, \quad (16)$$

где $\eta = (\eta_1^T, \eta_2^T)^T$, $\nu = (\nu_1^T, \nu_2^T)^T$, $\eta_1 = (x, y, z)^T$ — координаты начала O_b неинерциальной системы координат, жёстко связанной с корпусом подводного аппарата, в инерциальной неподвижной системе координат; $\eta_2 = (\varphi, \theta, \psi)^T$ — угловые координаты поворота неинерциальной системы координат относительно инерциальной системы координат; φ — угол крена; θ — угол тангажа; ψ — угол рысканья; $\nu_1 = (u, v, w)^T$ — координаты вектора скорости точки O_b в неинерциальной системе координат; $\nu_2 = (p, q, r)^T$ — координаты вектора угловых скоростей вращения корпуса аппарата относительно осей неинерциальной системы координат; $M_\eta(\eta) = MJ^{-1}(\eta)$, $C_\eta(\eta, \nu) = [C(\nu) - MJ^{-1}(\eta)\dot{J}(\eta)]J^{-1}(\eta)$, $D_\eta(\eta, \nu) = D(\nu)J^{-1}(\eta)$, $M = M_{RB} + M_A$, $C(\nu) = C_{RB}(\nu) + C_A(\nu)$, M_{RB} — матрица инерции твёрдого тела; M_A — матрица добавочной инерции; $C_{RB}(\nu)$ — матрица кориолисовых и центробежных сил; $C_A(\nu)$ — матрица гидродинамических кориолисовых и центробежных сил; $D(\nu)$ — матрица гидродинамического демпфирования; слагаемое $\tilde{g}(\eta)$ характеризует действие силы тяжести и выталкивающей силы на корпус аппарата; $J(\eta)$ — матрица Якоби линейных и угловых скоростей; вектор $\tau \in \mathbb{R}^6$ представляет собой силы и моменты, создаваемые управляющими органами аппарата.

Согласно монографии [17, гл. 2] соответствующие матрицы системы (16) покомпонентно имеют следующий вид:

$$M_{RB} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_G & -my_G \\ 0 & m & 0 & -mz_G & 0 & mx_G \\ 0 & 0 & m & my_G & -mx_G & 0 \\ 0 & -mz_G & my_G & I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ mz_G & 0 & -mx_G & -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -my_G & mx_G & 0 & -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix},$$

$$C_{RB}(\nu) = \begin{pmatrix} O_{3 \times 3} & -\bar{C}_{RB}^T(\nu) \\ \bar{C}_{RB}(\nu) & J_{RB}(\nu) \end{pmatrix},$$

$$\bar{C}_{RB}(\nu) = \begin{pmatrix} -m(y_G q + z_G r) & m(y_G p + w) & m(z_G p - v) \\ m(x_G q - w) & -m(z_G r + x_G p) & m(z_G q + u) \\ m(x_G r + v) & m(y_G r - u) & -m(x_G p + y_G q) \end{pmatrix},$$

$$J_{RB}(\nu) = \begin{pmatrix} 0 & -I_{yz}q - I_{xz}p + I_z r & I_{yz}r + I_{xy}p - I_y q \\ I_{yz}q + I_{xz}p - I_z r & 0 & -I_{xz}r - I_{xy}q + I_x p \\ -I_{yz}r - I_{xy}p + I_y q & I_{xz}r + I_{xy}q - I_x p & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_A(\nu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_{\dot{w}}w & Y_{\dot{v}}v \\ 0 & 0 & 0 & Z_{\dot{w}}w & 0 & -X_{\dot{u}}u \\ 0 & 0 & 0 & -Y_{\dot{v}}v & X_{\dot{u}}u & 0 \\ 0 & -Z_{\dot{w}}w & Y_{\dot{v}}v & 0 & -N_{\dot{r}}r & M_{\dot{q}}q \\ Z_{\dot{w}}w & 0 & -X_{\dot{u}}u & N_{\dot{r}}r & 0 & -K_{\dot{p}}p \\ -Y_{\dot{v}}v & X_{\dot{u}}u & 0 & -M_{\dot{q}}q & K_{\dot{p}}p & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_A = -\text{diag}(X_{\dot{u}}, Y_{\dot{v}}, Z_{\dot{w}}, K_{\dot{p}}, M_{\dot{q}}, N_{\dot{r}}),$$

$$D(\nu) = -\text{diag}(X_u + X_{u|u}|u|, Y_v + Y_{v|v}|v|, Z_w + Z_{w|w}|w|, K_p + K_{p|p}|p|, M_q + M_{q|q}|q|, N_r + N_{r|r}|r|),$$

$$\tilde{g}(\eta) = \begin{pmatrix} (W-B)\sin\theta \\ -(W-B)\cos\theta\sin\varphi \\ -(W-B)\cos\theta\cos\varphi \\ -(y_G W - y_B B)\cos\theta\cos\varphi + (z_G W - z_B B)\cos\theta\sin\varphi \\ (z_G W - z_B B)\sin\theta + (x_G W - x_B B)\cos\theta\cos\varphi \\ -(x_G W - x_B B)\cos\theta\sin\varphi - (y_G W - y_B B)\sin\theta \end{pmatrix},$$

$$J(\eta) = \begin{pmatrix} J_1(\eta_2) & O_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & J_2(\eta_2) \end{pmatrix},$$

$$J_1(\eta_2) = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\varphi\sin\theta - \cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\sin\theta \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\sin\theta & \cos\varphi\sin\psi\sin\theta - \cos\psi\sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix},$$

$$J_2(\eta_2) = \begin{pmatrix} 1 & \sin\varphi\operatorname{tg}\theta & \cos\varphi\operatorname{tg}\theta \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi/\cos\theta & \cos\varphi/\cos\theta \end{pmatrix},$$

где $O_{3 \times 3}$ — нулевая матрица порядка 3×3 ; M_A и $D(\nu)$ — диагональные 6×6 -матрицы с соответствующими элементами на главной диагонали; m — масса аппарата; $r_G = (x_G, y_G, z_G)^T$ — координаты центра масс корпуса аппарата в неинерциальной системе координат; I_x, I_y, I_z — моменты инерции корпуса относительно соответствующих осей неинерциальной системы координат; I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} — центробежные моменты инерции; $X_{\dot{u}}, Y_{\dot{v}}, Z_{\dot{w}}, K_{\dot{p}}, M_{\dot{q}}, N_{\dot{r}}, X_u, Y_v, Z_w, K_p, M_q, N_r, X_{u|u}, Y_{v|v}, Z_{w|w}, K_{p|p}, M_{q|q}, N_{r|r}$ — некоторые отрицательные коэффициенты; $r_B = (x_B, y_B, z_B)^T$ — координаты центра плавучести корпуса аппарата в неинерциальной системе координат; $W = mg, B = \rho g \bar{V}$ — величины, соответственно, силы тяжести и выталкивающей силы, действующих на корпус аппарата, ρ — плотность воды, $\bar{V}$ — объём вытесненной корпусом аппарата жидкости.

Отметим, что динамическая система (16) может быть представлена как

$$\ddot{\eta} = M_\eta^{-1}(\eta)(-C_\eta(\eta, \nu)\dot{\eta} - D_\eta(\eta, \nu)\ddot{\eta} - \tilde{g}(\eta)) + u, \quad \nu = J^{-1}(\eta)\dot{\eta}, \quad (17)$$

где $u \in \mathbb{R}^6$ — новые переменные управления, $u = M_\eta^{-1}(\eta)\tau$. Рассмотрим задачу позиционирования корпуса аппарата в точке с координатами $\eta_1 = 0$ и угловой ориентацией $\eta_2 = 0$, соответствующую задаче стабилизации нулевого значения вектора состояния $(\eta^T, \dot{\eta}^T)^T$ системы (17), с учётом заданных ограничений на абсолютные значения переменных состояния.

Используем далее обозначения $x_{11} = x, x_{21} = \dot{x}, x_{12} = y, x_{22} = \dot{y}, x_{13} = z, x_{23} = \dot{z}, x_{14} = \varphi, x_{24} = \dot{\varphi}, x_{15} = \theta, x_{25} = \dot{\theta}, x_{16} = \psi, x_{26} = \dot{\psi}$ для переменных состояния системы (17). С учётом введённых обозначений система (17) имеет вид (1), где $r_i = 2, g_i(x) = 1, f_i(x)$ представляет собой i -ю компоненту вектор-функции $M_\eta^{-1}(\eta)(-C_\eta(\eta, \nu)\dot{\eta} - D_\eta(\eta, \nu)\ddot{\eta} - \tilde{g}(\eta)), i \in \overline{1, 6}$. Тогда управление $u = u(x)$, являющееся решением рассматриваемой задачи стабилизации системы (17), при заданных значениях констант $M_{ji}, j \in \overline{1, 2}, i \in \overline{1, 6}$, в ограничениях (2) покомпонентно имеет вид (5), где $i \in \overline{1, 6}$.

Результаты численного моделирования системы (17) с соответствующими управлениями (5) для значений физических и геометрических параметров модели подводного аппарата Kambara [14, 18] $m = 117$ кг, $g = 9.81$ м·с⁻², $B = 1108$ Н, $I_x = 10.7$ кг·м², $I_y = 11.8$ кг·м², $I_z = 13.4$ кг·м², $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ кг·м², $x_G = 0$ м, $y_G = 0$ м, $z_G = 0$ м, $x_B = -0.017$ м, $y_B = 0$ м, $z_B = -0.115$ м, $X_{\dot{u}} = -58.4$ кг, $Y_{\dot{v}} = -23.8$ кг, $Z_{\dot{w}} = -23.8$ кг, $K_{\dot{p}} = -3.38$ кг·м²/рад, $M_{\dot{q}} = -1.18$ кг·м²/рад, $N_{\dot{r}} = -2.67$ кг·м²/рад, $X_u = -120$ кг/с, $Y_v = -90$ кг/с, $Z_w = -150$ кг/с,

$K_p = -15$ Н·м·с/рад, $M_q = -15$ Н·м·с/рад, $N_r = -18$ Н·м·с/рад, $X_{u|u} = -90$ кг/м, $Y_{v|v} = -90$ кг/м, $Z_{w|w} = -120$ кг/м, $K_{p|p} = -10$ кг·м²/рад², $M_{q|q} = -12$ кг·м²/рад², $N_{r|r} = -15$ кг·м²/рад² представлены на рисунке. Использованы следующие начальные значения переменных состояния: $\eta(0) = (10, 20, 25, \pi/3, \pi/6, \pi/8)^T$ и $\dot{\eta}(0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$, а также значения параметров управлений (5): M_{2i} задано как i -я компонента строки $(0.7, 0.7, 0.8, 0.1, 0.2, 0.3)$, $M_{1i} = 1.001|\eta_i(0)|$, $c_{1i} = 0.999M_{2i}/M_{1i}$, $c_{2i} = 1$, $N_{1i} = M_{1i}$, $N_{2i} = 0.001M_{2i}$, $i = \overline{1, 6}$.

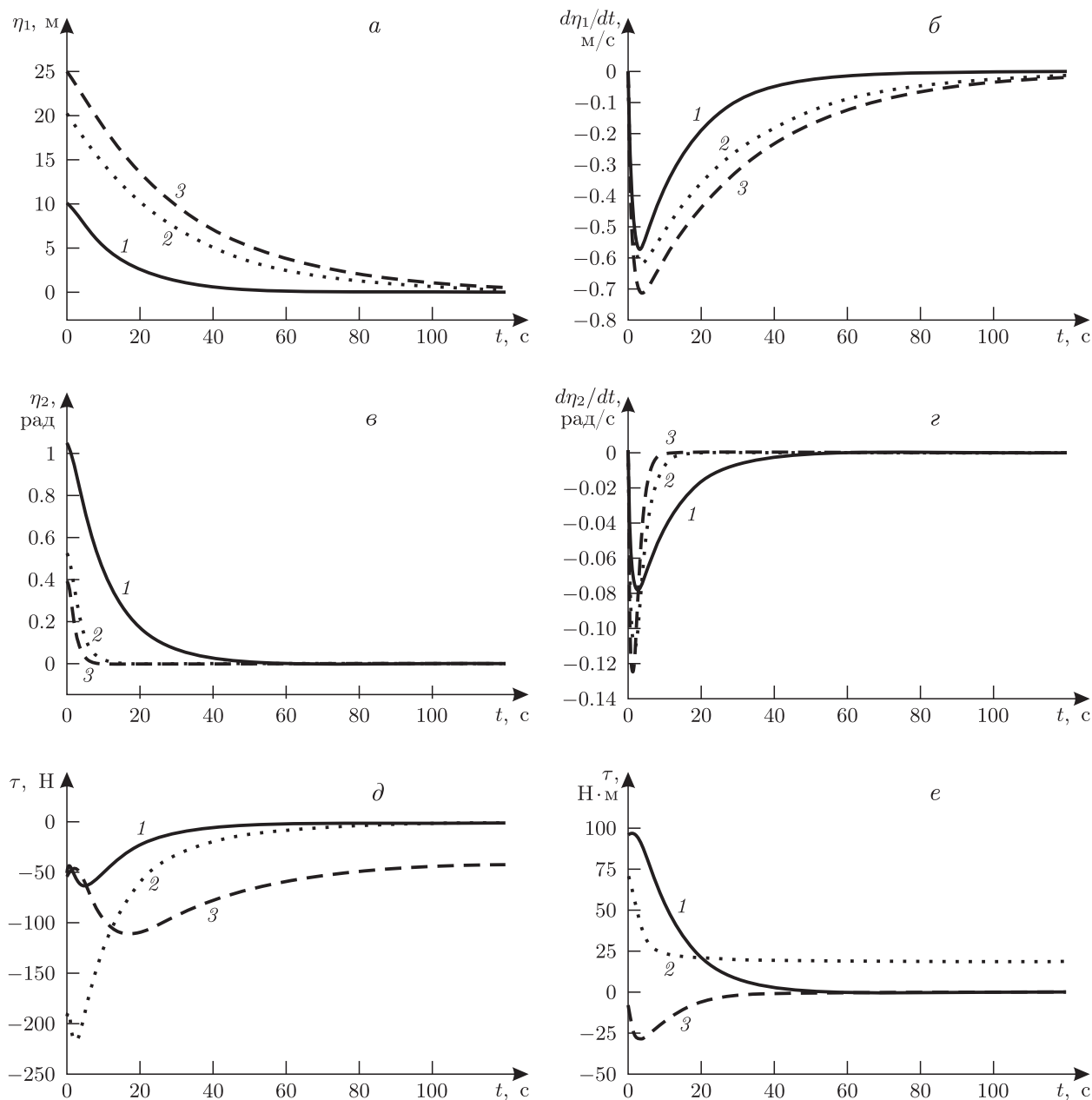


Рисунок. Параметры модели как функции времени: *a* — координаты $\eta_1 = (x, y, z)^T$ центра масс: $x(t)$ (1), $y(t)$ (2), $z(t)$ (3); *б* — координаты вектора скорости $\dot{\eta}_1 = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$ поступательного движения центра масс: $dx(t)/dt$ (1), $dy(t)/dt$ (2), $dz(t)/dt$ (3); *в* — угловые координаты $\eta_2 = (\varphi, \theta, \psi)^T$ вращения корпуса аппарата вокруг центра масс: $\varphi(t)$ (1), $\theta(t)$ (2), $\psi(t)$ (3); *г* — угловые скорости $\dot{\eta}_2 = (\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})^T$ вращения корпуса аппарата вокруг центра масс: $d\varphi(t)/dt$ (1), $d\theta(t)/dt$ (2), $d\psi(t)/dt$ (3); *д* — управляющие силы τ_1 (1), τ_2 (2), τ_3 (3); *е* — управляющие моменты τ_4 (1), τ_5 (2), τ_6 (3).

Заметим, что выбор коэффициентов усиления c_{1i} , $i \in \overline{1, 6}$, при заданных ограничениях (2) на состояние системы (17), характеризуемых значениями постоянных M_{ji} , $j \in \overline{1, 2}$, $i \in \overline{1, 6}$, в силу соотношений (4) обусловлен необходимостью выполнения неравенств $M_{2i} - c_{1i}M_{1i} > 0$, $i \in \overline{1, 6}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача стабилизации нулевого значения вектора состояния нелинейных динамических систем специального вида с учётом ограничений на абсолютные величины переменных состояния. Для построения стабилизирующих законов управления применён метод бэкстеппинга в сочетании с логарифмическими барьерными функциями Ляпунова. Полученные стабилизирующие обратные связи, в отличие от аналогичных известных результатов, основаны на использовании линейных виртуальных стабилизирующих функций, у которых отсутствует свойство неограниченного роста при приближении переменных состояния к граничным значениям. В качестве примера решена задача позиционирования подводного объекта в заданной точке пространства с учётом ограничений на состояние. Отметим, что необходимые и достаточные условия существования и, соответственно, методы поиска замен переменных состояния, в которых нелинейная динамическая система с управлением произвольного вида может быть представлена в форме (1), хорошо известны и описаны, например, в монографиях [19, гл. 5; 20, гл. 2].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской федерации в рамках государственного задания № 124012500443-0.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Krstić, M. Nonlinear and Adaptive Control Design / M. Krstić, I. Kanellakopoulos, P.V. Kokotović. — New York : John Wiley and Sons, 1995. — 592 p.
2. Ngo, K.B. Integrator backstepping using barrier functions for systems with multiple state constraints / K.B. Ngo, R. Mahony, Z.P. Jiang // Proc. 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference. — Seville, Spain, 2005. — P. 8306–8312.
3. Tee, K.P. Barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems / K.P. Tee, S.S. Ge, E.H. Tay // Automatica. — 2009. — V. 45, № 4. — P. 918–927.
4. Tang, Z.L. Tangent barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems / Z.L. Tang, K.P. Tee, W. He // IFAC Proceedings Volumes. — 2013. — V. 46, № 20. — P. 449–455.
5. Niu, B. Barrier Lyapunov functions for the output tracking control of constrained nonlinear switched systems / B. Niu, J. Zhao // Systems and Control Letters. — 2013. — V. 62, № 10. — P. 963–971.
6. Xu, J. Adaptive finite-time fault-tolerant tracking control for a class of MIMO nonlinear systems with output constraints / J. Xu // Int. J. of Robust and Nonlin. Control. — 2017. — V. 27, № 5. — P. 722–741.
7. Sachan, K. Barrier Lyapunov function based output-constrained control of nonlinear Euler–Lagrange systems / K. Sachan, R. Padhi // Proc. 15th Int. Conf. on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV). — Singapore, 2018. — P. 686–691.
8. Golubev, A.E. Backstepping control of aircraft take-off in windshear / A.E. Golubev, N.D. Botkin, A.P. Krishchenko // IFAC-PapersOnLine. — 2019. — V. 52, № 16. — P. 712–717.
9. 3D UAV navigation with moving-obstacle avoidance using barrier Lyapunov functions / E. Restrepo, I. Sarras, A. Loria, J. Marzat // IFAC-PapersOnLine. — 2019. — V. 52, № 12. — P. 49–54.

10. Garg, T. Barrier Lyapunov function based controller design for Euler-Lagrange systems with reduced control effort / T. Garg, S.B. Roy // IFAC-PapersOnLine. — 2020. — V. 53, № 1. — P. 459–464.
11. Barrier Lyapunov function-based fixed-time FTC for high-order nonlinear systems with predefined tracking accuracy / X. Wang, J. Xu, M. Lv [et al.] // Nonlinear Dynamics. — 2022. — V. 110. — P. 381–394.
12. Golubev, A. Modeling of cerebral blood flow autoregulation using mathematical control theory / A. Golubev, A. Kovtanyuk, R. Lampe // Mathematics. — 2022. — V. 10, № 12. — Art. 2060.
13. Barrier Lyapunov function-based finite-time reliable trajectory tracking control of fixed-wing UAV with error constraints / Y. Xu, R. Zhou, Z. Yu [et al.] // IFAC-PapersOnLine. — 2022. — V. 55, № 6. — P. 597–602.
14. Голубев, А.Е. Стабилизация программных движений механических систем с учётом ограничений / А.Е. Голубев // Изв. РАН. ТиСУ. — 2023. — № 4. — С. 153–167.
15. Boyd, S. Convex Optimization / S. Boyd, L. Vandenberghe. — Cambridge : Cambridge University Press, 2009. — 699 p.
16. Khalil, H.K. Nonlinear Systems. 3d ed. / H.K. Khalil. — Upper Saddle River, New Jersey : Prentice Hall, 2002. — 750 p.
17. Fossen T.I. Guidance and Control of Ocean Vehicles / T.I. Fossen. — Chichester : John Wiley and Sons, 1994. — 494 p.
18. Silpa-Anan, C. Kambara: past, present, and future / C. Silpa-Anan, A. Zelinsky // Proc. 2001 Australian Conference on Robotics and Automation. — 2001. — P. 61–66.
19. Isidori, A. Nonlinear Control Systems. 3rd ed. / A. Isidori. — London : Springer-Verlag, 1995. — 549 p.
20. Краснощеченко, В.И. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза / В.И. Краснощеченко, А.П. Крищенко. — М. : Изд-во МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2005. — 519 с.

BACKSTEPPING STABILIZATION OF NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS UNDER STATE CONSTRAINTS

A. E. Golubev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia
e-mail: v-algolu@hotmail.com

The problem of stabilizing the zero value of the state vector of constrained nonlinear dynamical systems written in a special form is solved. The proposed control design accounts for magnitude constraints on the values of state variables and is based on the integrator backstepping approach using logarithmic Lyapunov barrier functions. The obtained stabilizing feedbacks, in contrast to similar known results, are based on the use of linear virtual stabilizing functions that do not grow unbounded as state variables approach the boundary values. As an example, we consider a state constraints aware solution to the control problem of positioning an autonomous underwater vehicle at a given point in space.

Keywords: stabilization, nonlinear dynamical system, integrator backstepping, state constraint, control of mechanical system.

FUNDING

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education within the framework of the Russian State Assignment under contract no. 124012500443-0.

REFERENCES

1. Krstić, M., Kanellakopoulos, I., and Kokotović, P.V., *Nonlinear and Adaptive Control Design*, New York: John Wiley and Sons, 1995.
2. Ngo, K.B., Mahony, R., and Jiang, Z.P., Integrator backstepping using barrier functions for systems with multiple state constraints, *Proc. 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*, Seville, Spain, 2005, pp. 8306–8312.

3. Tee, K.P., Ge, S.S., and Tay, E.H., Barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems, *Automatica*, 2009, vol. 45, no. 4, pp. 918–927.
4. Tang, Z.L., Tee, K.P., and He, W., Tangent barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems, *IFAC Proceedings Volumes*, 2013, vol. 46, no. 20, pp. 449–455.
5. Niu, B. and Zhao, J., Barrier Lyapunov functions for the output tracking control of constrained nonlinear switched systems, *Systems and Control Letters*, 2013, vol. 62, no. 10, pp. 963–971.
6. Xu, J., Adaptive finite-time fault-tolerant tracking control for a class of MIMO nonlinear systems with output constraints, *Int. J. of Robust and Nonlin. Control*, 2017, vol. 27, № 5, pp. 722–741.
7. Sachan, K. and Padhi, R., Barrier Lyapunov function based output-constrained control of nonlinear Euler–Lagrange systems, *Proc. 15th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV)*, Singapore, 2018, pp. 686–691.
8. Golubev, A.E., Botkin, N.D., and Krishchenko, A.P., Backstepping control of aircraft take-off in windshear, *IFAC-PapersOnLine*, 2019, vol. 52, no. 16, pp. 712–717.
9. Restrepo, E., Sarras, I., Loria, A., and Marzat, J., 3D UAV navigation with moving-obstacle avoidance using barrier Lyapunov functions, *IFAC-PapersOnLine*, 2019, vol. 52, no. 12, pp. 49–54.
10. Garg, T. and Roy, S.B., Barrier Lyapunov function based controller design for Euler–Lagrange systems with reduced control effort, *IFAC-PapersOnLine*, 2020, vol. 53, no. 1, pp. 459–464.
11. Wang, X., Xu, J., Lv, M., Zhang, L., and Zhao, Z., Barrier Lyapunov function-based fixed-time FTC for high-order nonlinear systems with predefined tracking accuracy, *Nonlinear Dynamics*, 2022, vol. 110, pp. 381–394.
12. Golubev, A., Kovtanyuk, A., and Lampe, R., Modeling of cerebral blood flow autoregulation using mathematical control theory, *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 12, art. 2060.
13. Xu, Y., Zhou, R., Yu, Z., Chen, F., and Zhang, Y., Barrier Lyapunov function-based finite-time reliable trajectory tracking control of fixed-wing UAV with error constraints, *IFAC-PapersOnLine*, 2022, vol. 55, no. 6, pp. 597–602.
14. Golubev, A.E., Stabilization of programmed motions of constrained mechanical systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2023, vol. 62, no. 4, pp. 695–709.
15. Boyd, S. and Vandenberghe, L., *Convex Optimization*, Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
16. Khalil, H.K., *Nonlinear Systems. 3d edition*, Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2002.
17. Fossen, T.I., *Guidance and Control of Ocean Vehicles*, Chichester: John Wiley and Sons, 1994.
18. Silpa-Anan, C. and Zelinsky, A., Kambara: past, present, and future, *Proc. 2001 Australian Conference on Robotics and Automation*, 2001, pp. 61–66.
19. Isidori, A., *Nonlinear Control Systems. 3rd edition*, London: Springer-Verlag, 1995.
20. Krasnoshchchenko, V.I. and Krishchenko, A.P., *Nelinejnye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza* (Nonlinear Systems: Geometric Methods of Analysis and Synthesis), Moscow: Izdatel'stvo MGTU imeni N.E. Baumana (Bauman Press), 2005.