

УДК 517.977

ЗАДАЧИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИФФУЗИОННО-ДРЕЙФОВОЙ МОДЕЛИ ЗАРЯДКИ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛЯРНОГО ДИЭЛЕКТРИКА

© Р. В. Бризицкий¹, Н. Н. Максимова²¹Институт прикладной математики ДВО РАН, г. Владивосток²Амурский государственный университет, г. Благовещенскe-mail: ¹mlnwizard@mail.ru, ²knnamursu@mail.ru

Поступила в редакцию 22.11.2023 г., после доработки 22.01.2024 г.; принята к публикации 13.02.2024 г.

Исследуется двухпараметрическая задача мультипликативного управления для модели электронно-индуцированной зарядки неоднородного полярного диэлектрика. Выводятся точные оценки локальной устойчивости её оптимальных решений относительно малых возмущений как функционалов качества, так и заданной функции краевой задачи. Для одного из управлений устанавливается свойство релейности или принцип bang–bang.

Ключевые слова: задача мультипликативного управления, система оптимальности, оценка локальной устойчивости, принцип bang–bang, модель дрейфа–диффузии электронов.

DOI: 10.31857/S0374064124050062, EDN: LBKGWR

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

При моделировании процессов зарядки диэлектриков в неравновесных внешних условиях часто используется диффузионно-дрейфовое приближение. С практической точки зрения это обосновано необходимостью прогнозирования состояния функциональных диэлектрических материалов при диагностике и модификации их свойств методами растровой электронной микроскопии (см. работы [1, 2] и библиографию в них).

Математическая модель процесса зарядки неоднородного полярного диэлектрика может быть представлена следующей краевой задачей, рассматриваемой в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ :

$$-\operatorname{div}(d \nabla \rho) + \mu_n \mathbf{E} \cdot \nabla \rho + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} \beta |\rho| \rho = f \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho \quad \text{в } \Omega, \quad (2)$$

$$\rho = 0, \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{на } \Gamma. \quad (3)$$

Здесь ρ — объёмная плотность заряда, $\mathbf{E}$ — вектор-функция напряжённости электрического поля, $d(\mathbf{x}) > 0$ — коэффициент диффузии электронов, μ_n — дрейфовая подвижность электронов, ε — диэлектрическая проницаемость материала, ε_0 — электрическая постоянная, f — генерационное слагаемое, отвечающее за действие объёмного источника зарядов в объекте, $\beta(\mathbf{x}) > 0$ — нормализованный коэффициент потери заряда.

Ниже на задачу (1)–(3) будем ссылаться как на задачу 1.

Несмотря на длительное использование модели (1)–(3) на практике, глобальная разрешимость и локальная единственность решения задачи 1 впервые доказаны в 2022 г. в статье [3]

при $\beta = 1$. Краевые и экстремальные задачи для модели дрейфа–диффузии электронов с переменным коэффициентом β , учитывающим неоднородность потери заряда в пространстве, исследованы в [4]. В частности, для задачи 1 доказана разрешимость задачи управления с двумя мультипликативными управлениями d и β и с распределённым управлением f . Для указанной задачи получена система оптимальности и на основе её анализа доказана локальная единственность решения задачи распределённого управления.

Из близких по тематике отметим работы [5–11], посвящённые моделям диффузии–реакции–конвекции и сложного теплообмена с переменными коэффициентами, а также статьи [12–14], обобщающие приближение Буссинеска, и [15–17], в которых рассматриваются задачи оптимизации для моделей неньютоновских жидкостей с переменной вязкостью. В нашем случае аналогом скорости является вектор $\mathbf{E}$.

В настоящей работе выводятся оценки локальной устойчивости оптимальных решений двухпараметрической задачи мультипликативного управления, роль управлений в которой играют коэффициенты d и β , относительно малых возмущений как функционала качества, так и заданной функции f (см. также [6]). В п. 6 для экстремальной задачи с одним управлением β устанавливается свойство релейности такого управления или справедливость принципа bang–bang. Последнее означает, что управление β в зависимости от $\mathbf{x} \in \Omega$ может принимать только два значения: отвечающие верхней и нижней границе множества управлений. Другими словами, происходит скачок управления из одного состояния в другое (bang–bang) или его переключение между ними (релейность) (см. [5, 11]).

Отметим, что в рамках оптимизационного подхода к рассматриваемым задачам мультипликативного управления могут быть сведены обратные задачи восстановления неизвестных коэффициентов диффузии электронов d и потери заряда β по дополнительной информации о решении $(\rho, \mathbf{E})$ задачи 1 (см., например, [18]).

2. РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

При анализе краевой задачи будем использовать функциональные пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает либо область Ω , либо некоторую подобласть $Q \subset \Omega$, либо границу Γ . Через $\|\cdot\|_{s,Q}$, $|\cdot|_{s,Q}$ и $(\cdot, \cdot)_{s,Q}$ будем записывать норму, полунорму и скалярное произведение в $H^s(Q)$. Нормы и скалярные произведения в пространствах $L^2(Q)$ и $L^2(\Omega)$ будем обозначать соответственно через $\|\cdot\|_Q$ и $(\cdot, \cdot)_Q$, $\|\cdot\|_\Omega$ и $(\cdot, \cdot)_\Omega$.

Введём функциональные пространства

$$H^1(\Delta, \Omega) = \{h \in H^1(\Omega) : \Delta h \in L^2(\Omega)\}, \quad H_N^1(\Omega) = \{\mathbf{h} \in H^1(\Omega)^3 : \mathbf{h} \times \mathbf{n}|_\Gamma = \mathbf{0}\},$$

$$\tilde{H}_N^1(\Omega) = H_N^1(\Omega) \cap \ker(\operatorname{rot}),$$

функциональные множества $L_{d_0}^p(\Omega) = \{h \in L^p(\Omega) : h \geq d_0 > 0 \text{ п.в. в } \Omega\}$, $1 \leq p \leq \infty$, $H_{d_0}^s(\Omega) = \{h \in H^s(\Omega) : h \geq d_0 > 0 \text{ п.в. в } \Omega\}$, $s \geq 0$, где d_0 — положительная константа, и произведение пространств $X = H_0^1(\Omega) \times \tilde{H}_N^1(\Omega)$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

- (i) Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$;
- (ii) $f \in L^2(\Omega)$, $d \in H_{d_0}^s(\Omega)$, $s > 3/2$;
- (iii) $\beta \in L_{\beta_0}^4(\Omega)$, $\beta_0 \geq 1/2$.

Напомним, что в силу теоремы вложения Соболева пространство $H^1(\Omega)$ вкладывается в пространство $L^s(\Omega)$ непрерывно при $s \leq 6$, компактно при $s < 6$ и с некоторой константой C_s , зависящей от s и Ω , справедлива оценка

$$\|h\|_{L^s(\Omega)} \leq C_s \|h\|_{1,\Omega} \quad \text{для любой } h \in H^1(\Omega). \quad (4)$$

При $s=2$ мы полагаем $C_2=1$.

Справедливы следующие леммы (см. [3; 19, п. 6.1.3]).

Лемма 1. При выполнении условий (i), $\mathbf{E} \in H^1(\Omega)^3$ существуют положительные константы C_0 , δ_1 , γ'_1 и γ_1 , зависящие от Ω , такие, что

$$\begin{aligned} |(\nabla h, \nabla \eta)| &\leq C_0 \|h\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega}, \\ |(\mathbf{E} \cdot \nabla h, \eta)| &\leq \gamma'_1 \|\mathbf{E}\|_{L^4(\Omega)^3} \|h\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega} \leq \gamma_1 \|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega} \quad h, \eta \in H^1(\Omega), \\ (\nabla h, \nabla h) &\geq \delta_1 \|h\|_{1,\Omega}^2, \quad h \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Если функции $\mathbf{E} \in H^1(\Omega)^3$ и $\rho \in H_0^1(\Omega)$ связаны вторым соотношением в (2), то справедливо равенство

$$(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, h) = -(\nabla h \cdot \mathbf{E}, \rho) - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} (h, \rho^2), \quad h \in H_0^1(\Omega),$$

принимаяющее при $h=\rho$ следующий вид:

$$\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \rho) = -\frac{\mu_n}{2\varepsilon \varepsilon_0} (\rho, \rho^2).$$

Лемма 2. При выполнении условия (i) для любой функции $\sigma \in L^2(\Omega)$ существует единственное решение $\mathbf{E} \in \tilde{H}_N^1(\Omega)$ задачи $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$, $\operatorname{div} \mathbf{E} = \sigma$ в Ω , $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ на Γ , для которого справедлива оценка $\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leq C_N \|\sigma\|_\Omega$, где C_N — положительная константа, зависящая от Ω .

Пусть $(\rho, \mathbf{E}) \in (C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})) \times (C^1(\Omega)^3 \cap \tilde{H}_N^1(\Omega))$ — классическое решение задачи 1. Умножив уравнение (1) на функцию $h \in H_0^1(\Omega)$ и проинтегрировав по Ω с помощью формулы Грина, приходим к слабой формулировке задачи 1

$$(d \nabla \rho, \nabla h) + \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, h) + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta |\rho| \rho, h) = (f, h), \quad h \in H_0^1(\Omega), \quad (5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho \quad \text{в } \Omega. \quad (6)$$

Справедлива следующая

Теорема 1 [4]. При выполнении условий (i)–(iii) существует слабое решение $(\rho, \mathbf{E}) \in X$ задачи 1 и справедливы оценки

$$\|\rho\|_{1,\Omega} \leq C_* \|f\|_\Omega, \quad C_* = (d_0 \delta_1)^{-1}, \quad \|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} C_N C_* \|f\|_\Omega.$$

Если к тому же выполняется условие

$$\frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\gamma_1 C_N + C_4^3 \|\beta\|_{L^4(\Omega)}) \|f\|_\Omega < \lambda_*^2, \quad \lambda_* = d_0 \delta_1,$$

то слабое решение задачи 1 единственно.

Пусть в дополнение к (i)–(iii) выполняется условие

(iv) $0 \leq f \leq f_{\max}$ п.в. в Ω , где $f_{\max}$ — положительная константа.

Справедлив следующий принцип максимума для плотности заряда ρ (см. [4]).

Теорема 2. При выполнении условий (i)–(iv) для компоненты $\rho \in H_0^1(\Omega)$ слабого решения задачи 1 справедлив следующий принцип минимума и максимума:

$$0 \leq \rho \leq M \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad M = \left(\frac{f_{\max} \varepsilon \varepsilon_0}{\mu_n \beta_0} \right)^{1/2}.$$

3. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ И СИСТЕМА ОПТИМАЛЬНОСТИ

В данном пункте исследуется задача управления на слабых решениях задачи 1 с мультипликативными управлениями d и β .

Будем считать, что функции d и β могут изменяться, соответственно, во множествах K_1 и K_2 , удовлетворяющих условию

(j) $K_1 \subset H_{d_0}^s(\Omega)$, $s > 3/2$, $K_2 \subset H_{\beta_0}^r(\Omega)$, $r > 3/4$, — непустые выпуклые замкнутые множества.

Введём функциональные пространства $X = H_0^1(\Omega) \times \tilde{H}_N^1(\Omega)$, $Y = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ и положим $\mathbf{x} = (\rho, \mathbf{E}) \in X$, $u = (d, \beta) \in K$, где $K = K_1 \times K_2$. Далее введём оператор $F = (F_1, F_2): X \times K \rightarrow Y$ как

$$\langle F_1(\mathbf{x}, u), h \rangle = (d \nabla \rho, \nabla h) + \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, h) + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta |\rho| \rho, h) - (f, h), \quad h \in H_0^1(\Omega),$$

$$F_2(\mathbf{x}) = \operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho \quad \text{в } \Omega$$

и перепишем слабую формулировку задачи 1 в виде операторного уравнения $F(\mathbf{x}, u) = 0$.

Пусть $I: X \rightarrow \mathbb{R}$ — слабо полунепрерывный снизу функционал. Рассмотрим следующую задачу управления:

$$J(\mathbf{x}, u) \equiv \frac{\mu_0}{2} I(\mathbf{x}) + \frac{\mu_1}{2} \|d\|_{s, \Omega}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\beta\|_{r, \Omega}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\mathbf{x}, u) = 0, \quad (\mathbf{x}, u) \in X \times K. \quad (7)$$

Через $Z_{ad} = \{(\mathbf{x}, u) \in X \times K: F(\mathbf{x}, u) = 0, J(\mathbf{x}, u) < \infty\}$ обозначим множество допустимых пар для задачи (7).

Пусть в дополнение к (j) выполняется условие

(jj) $\mu_0 > 0$, $\mu_i \geq 0$, $i = 1, 2$, множество K ограничено или $\mu_i > 0$, $i = 0, 1, 2$, и функционал I ограничен снизу.

Будем использовать следующие функционалы качества:

$$I_1(\rho) = \|\rho - \rho^d\|_Q^2, \quad I_2(\mathbf{E}) = \|\mathbf{E} - \mathbf{E}^d\|_Q^2. \quad (8)$$

Здесь $\rho^d \in L^2(Q)$ обозначает заданное поле концентрации в подобласти $Q \subset \Omega$. Функция $\mathbf{E}^d$ имеет аналогичный смысл для электрического поля.

Из результатов статьи [4] вытекает следующая

Теорема 3. Пусть выполняются условия (i)–(iii) и (j), (jj), функционал $I: X \rightarrow \mathbb{R}$ слабо полунепрерывен снизу и $Z_{ad} \neq \emptyset$. Тогда существует по крайней мере одно решение $(\mathbf{x}, u) \in X \times K$ задачи управления (7).

Замечание. Очевидно, что все функционалы качества из (8) удовлетворяют условиям теоремы 3.

Далее получим для задачи (7) систему оптимальности, которая играет ключевую роль при выводе оценок устойчивости оптимальных решений указанной задачи управления.

Через

$$X^* = H^{-1}(\Omega) \times \tilde{H}_N^1(\Omega)^*, \quad Y^* = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

обозначим пространства, двойственные к пространствам X и Y .

Несложно показать, что производная Фреше от оператора $F: X \times K \rightarrow Y$ по состоянию $\mathbf{x}$ в любой точке $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) = (\hat{\rho}, \hat{\mathbf{E}}, \hat{d}, \hat{\beta})$ является линейным непрерывным оператором $F'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}): X \rightarrow Y$, который каждому элементу $(\tau, \mathbf{E}) \in X$ ставит в соответствие элемент

$$F'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})(\tau, \mathbf{E}) = (\hat{y}_1, \hat{y}_2) \in Y.$$

Здесь $\hat{y}_1 \in H^{-1}(\Omega)$ и $\hat{y}_2 \in L_0^2(\Omega)$ определяются по паре $(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{E}})$ и $(\tau, \mathbf{E})$ как

$$\langle \hat{y}_1, (\tau, \mathbf{E}) \rangle = (\hat{d} \nabla \tau, \nabla h) + \mu_n(\hat{\mathbf{E}} \cdot \nabla \tau, h) + \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \hat{\rho}, h) + \frac{2}{\varepsilon \varepsilon_0} \mu_n(\hat{\beta} |\hat{\rho}| \tau, h),$$

$$\hat{y}_2 = \operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \tau, \quad (\tau, \mathbf{E}) \in X.$$

Следуя общей теории гладко-выпуклых экстремальных задач (см. [20, гл. 2, § 1]), введём элемент $\mathbf{y}^* = (\theta, \sigma) \in Y^* = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, на который будем ссылаться как на сопряжённое состояние, и введём лагранжиан $\mathcal{L}: X \times K \times \mathbb{R} \times Y^* \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, u, \lambda_0, \mathbf{y}^*) = \lambda_0 J(\mathbf{x}, u) + \langle \mathbf{y}^*, F(\mathbf{x}, u) \rangle_{Y^* \times Y} \equiv \lambda_0 J(\mathbf{x}, u) + \langle F_1(\mathbf{x}, u), \theta \rangle + \langle F_2(\mathbf{x}), \sigma \rangle.$$

Через $F'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})^*: Y^* \rightarrow X^*$ обозначим сопряжённый к $F'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ оператор.

Следующая теорема также вытекает из результатов работы [4].

Теорема 4. Пусть выполняются условия (i)–(iii) и (j), (jj), а элемент $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) \in X \times K$ является точкой локального минимума для задачи (7). Предположим, что функционал качества $I: X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируем по Фреше по состоянию $\mathbf{x}$ в точке $\hat{\mathbf{x}}$. Тогда

1) существует ненулевой множитель Лагранжа $(\lambda_0, \mathbf{y}^*) = (\lambda_0, \theta, \sigma) \in \mathbb{R}^+ \times Y^*$, с которым выполняется уравнение Эйлера–Лагранжа $F'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})^* \mathbf{y}^* = -\lambda_0 J'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ в X^* , эквивалентное соотношениям

$$(\hat{d} \nabla \tau, \nabla \theta) + \mu_n(\hat{\mathbf{E}} \cdot \nabla \tau, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\hat{\beta} |\hat{\rho}| \tau, \theta) - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} (\tau, \sigma) = -\lambda_0 \frac{\mu_0}{2} \langle I'_\rho(\hat{\mathbf{x}}), \tau \rangle, \quad \tau \in H_0^1(\Omega), \quad (9)$$

$$\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \hat{\rho}, \theta) + (\operatorname{div} \mathbf{E}, \sigma) = -\lambda_0 \frac{\mu_0}{2} \langle I'_\mathbf{E}(\hat{\mathbf{x}}), \mathbf{E} \rangle, \quad \mathbf{E} \in \tilde{H}_N^1(\Omega), \quad (10)$$

и справедлив принцип минимума $\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \leq \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, u, \lambda_0, \mathbf{y}^*)$ для всех $u \in K$, эквивалентный неравенствам

$$\lambda_0 \mu_1 (\hat{d}, d - \hat{d})_{s, \Omega} + ((d - \hat{d}) \nabla \hat{\rho}, \nabla \theta) \geq 0, \quad d \in K_1, \quad (11)$$

$$\lambda_0 \mu_2 (\hat{\beta}, \beta - \hat{\beta})_{r, \Omega} + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} ((\beta - \hat{\beta}) |\hat{\rho}| \hat{\rho}, \theta) \geq 0, \quad \beta \in K_2; \quad (12)$$

2) если к тому же выполняется условие

$$\frac{\gamma_1 \mu_n C_N}{\varepsilon \varepsilon_0} \|f\|_\Omega \leq \lambda_*^2,$$

то любой нетривиальный множитель Лагранжа $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$, удовлетворяющий (9)–(12), является регулярным, т.е. имеет вид $(1, \mathbf{y}^*)$, и определяется единственным образом по заданной паре $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$.

4. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Обозначим через $(\mathbf{x}_1, u_1) = (\rho_1, \mathbf{E}_1, d_1, \beta_1) \in X \times K$ решение задачи (7), отвечающее заданной функции $f = f_1 \in L^2(\Omega)$. Через $(\mathbf{x}_2, u_2) = (\rho_2, \mathbf{E}_2, d_2, \beta_2) \in X \times K$ обозначим решение задачи

$$\tilde{J}(\mathbf{x}, u) = \frac{\mu_0}{2} \tilde{I}(\mathbf{x}) + \frac{\mu_1}{2} \|d\|_{s, \Omega}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\beta\|_{r, \Omega}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\mathbf{x}, u, \tilde{f}) = 0, \quad (\mathbf{x}, u) \in X \times K, \quad (13)$$

которое получается из (7) заменой функционала $I: X \rightarrow \mathbb{R}$ функционалом $\tilde{I}: X \rightarrow \mathbb{R}$ и заменой функции f функцией $f_2 = \tilde{f} \in L^2(\Omega)$. Считая множество K ограниченным, а функционалы $I(\mathbf{x})$ и $\tilde{I}(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируемыми на X , выведем одно важное для дальнейшего анализа неравенство для разности решений задач (7) и (13). Напомним, что в силу теоремы 1 справедливы следующие оценки для ρ_i и $\mathbf{E}_i$:

$$\|\rho\|_{1,\Omega} \leq M_\rho \equiv \sup_{u \in K} C_* \|f\|_\Omega, \quad \|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leq M_{\mathbf{E}} \equiv \sup_{u \in K} \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} C_N C_* \|f\|_\Omega, \quad C_* = \lambda_*^{-1}. \quad (14)$$

Ясно, что $M_\rho < \infty$ и $M_{\mathbf{E}} < \infty$ в случае, когда множество K ограничено.

Предполагая, что выполняются условия теоремы 4, запишем (9), (10) при $\lambda_0 = 1$ для $(\mathbf{x}_i, \mathbf{E}_i) = (\rho_i, \mathbf{E}_i, d_i, \beta_i)$ и отвечающих им множителей Лагранжа (θ_i, σ_i) . Будем иметь

$$(d_i \nabla \tau, \nabla \theta_i) + \mu_n(\mathbf{E}_i \cdot \nabla \tau, \theta_i) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_i |\rho_i| \tau, \theta_i) - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} (\tau, \sigma_i) = -\frac{\mu_0}{2} \langle I'_\rho(\mathbf{x}_i), \tau \rangle, \quad \tau \in H_0^1(\Omega), \quad (15)$$

$$\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho_i, \theta_i) + (\operatorname{div} \mathbf{E}, \sigma_i) = -\frac{\mu_0}{2} \langle I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_i), \mathbf{E} \rangle, \quad \mathbf{E} \in \tilde{H}_N^1(\Omega). \quad (16)$$

Положим

$$\begin{aligned} d &= d_1 - d_2, \quad \beta = \beta_1 - \beta_2, \quad \rho = \rho_1 - \rho_2, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2, \\ \theta &= \theta_1 - \theta_2, \quad \sigma = \sigma_1 - \sigma_2, \quad f = f_1 - f_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Вычитая уравнения (5), (6), записанные при $(\mathbf{x}_2, u_2) = (\rho_2, \mathbf{E}_2, d_2, \beta_2)$ и f_2 , из уравнений (5), (6) для $(\mathbf{x}_1, u_1) = (\rho_1, \mathbf{E}_1, d_1, \beta_1)$ и f_1 , с учётом обозначений (17) получаем

$$\begin{aligned} (d_1 \nabla \rho, \nabla h) + \mu_n(\mathbf{E}_1 \cdot \nabla \rho, h) + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 |\rho_1| \rho, h) &= -(d \nabla \rho_2, \nabla h) - \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho_2, h) - \\ &- \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho_2, h) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta |\rho_2| \rho_2, h) + (f, h), \quad h \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho \quad \text{в } \Omega. \quad (19)$$

Далее вычтем уравнения (15), (16) при $(\mathbf{x}_2, u_2, \theta_2, \sigma_2)$ из уравнений (15), (16) при $(\mathbf{x}_1, u_1, \theta_1, \sigma_1)$ и будем иметь

$$\begin{aligned} (d_1 \nabla \tau, \nabla \theta) + \mu_n(\mathbf{E}_1 \cdot \nabla \tau, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 |\rho_1| \tau, \theta) - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} (\tau, \sigma) &= -(d \nabla \tau, \nabla \theta_2) - \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \tau, \theta_2) - \\ &- \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta |\rho_2| \tau, \theta_2) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \tau, \theta_2) - \frac{\mu_0}{2} \langle I'_\rho(\mathbf{x}_1) - I'_\rho(\mathbf{x}_2), \tau \rangle, \quad \tau \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \theta_1) + \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho_2, \theta) + (\operatorname{div} \mathbf{E}, \sigma) = -\frac{\mu_0}{2} \langle I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_1) - I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_2), \mathbf{E} \rangle, \quad \mathbf{E} \in \tilde{H}_N^1(\Omega). \quad (21)$$

Положим $h = \theta$ в (18). Далее умножим (19) на $\sigma \in L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω . Приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} (d_1 \nabla \rho, \nabla \theta) + \mu_n(\mathbf{E}_1 \cdot \nabla \rho, \theta) + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 |\rho_1| \rho, \theta) &= -(d \nabla \rho_2, \nabla \theta) - \\ &- \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho_2, \theta) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho_2, \theta) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta |\rho_2| \rho_2, \theta) + (f, \theta), \end{aligned} \quad (22)$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{E}, \sigma) = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} (\rho, \sigma). \quad (23)$$

Полагая $\tau = \rho$ в (20) и $\mathbf{e} = \mathbf{E}$ в (21), найдём

$$\begin{aligned} (d_1 \nabla \rho, \nabla \theta) + \mu_n(\mathbf{E}_1 \cdot \nabla \rho, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta_1 |\rho_1| \rho, \theta) - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0}(\rho, \sigma) = \\ = -(d \nabla \rho, \nabla \theta_2) - \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \theta_2) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta |\rho_2| \rho, \theta_2) - \\ - \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho, \theta_2) - \frac{\mu_0}{2} \langle I'_\rho(\mathbf{x}_1) - I'_\rho(\mathbf{x}_2), \rho \rangle, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \theta_1) + \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho_2, \theta) + (\operatorname{div} \mathbf{E}, \sigma) = -\frac{\mu_0}{2} \langle I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_1) - I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_2), \mathbf{E} \rangle. \quad (25)$$

Вычитая (22) из (24), а (23) из (25), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta_1 |\rho_1| \rho, \theta) - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0}(\rho, \sigma) = (d \nabla \rho_2, \nabla \theta) - (d \nabla \rho, \nabla \theta_2) + \\ + \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho_2, \theta) - \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \theta_2) + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta |\rho_2| \rho_2, \theta) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta |\rho_2| \rho, \theta_2) + \\ + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho_2, \theta) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho, \theta_2) - (f, \theta) - \frac{\mu_0}{2} \langle I'_\rho(\mathbf{x}_1) - I'_\rho(\mathbf{x}_2), \rho \rangle, \\ \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \theta_1) + \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho_2, \theta) + \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0}(\rho, \sigma) = -\frac{\mu_0}{2} \langle I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_1) - I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_2), \mathbf{E} \rangle. \end{aligned}$$

Сложив полученные соотношения, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta_1 |\rho_1| \rho, \theta) = (d \nabla \rho_2, \nabla \theta) - (d \nabla \rho, \nabla \theta_2) - \\ - \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \theta_1 + \theta_2) + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta |\rho_2| \rho_2, \theta) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta |\rho_2| \rho, \theta_2) + \\ + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho_2, \theta) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho, \theta_2) - (f, \theta) - \\ - \frac{\mu_0}{2} \langle I'_\rho(\mathbf{x}_1) - I'_\rho(\mathbf{x}_2), \rho \rangle - \frac{\mu_0}{2} \langle I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_1) - I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_2), \mathbf{E} \rangle. \end{aligned} \quad (26)$$

Из (26) с учётом соотношений

$$\begin{aligned} (d \nabla \rho_2, \nabla \theta) - (d \nabla \rho, \nabla \theta_2) = -[(d \nabla \rho_2, \nabla \theta_2) - (d \nabla \rho_1, \nabla \theta_1) + (d \nabla \rho, \nabla (\theta_1 + \theta_2))], \\ \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta |\rho_2| \rho_2, \theta) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta |\rho_2| \rho, \theta_2) = -\frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}[(\beta |\rho_2| \rho_2, \theta_2) - (\beta |\rho_2| \rho_1, \theta_1) + (\beta |\rho_2| \rho, \theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

ВЫВОДИМ

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{2} \langle I'_\rho(\mathbf{x}_1) - I'_\rho(\mathbf{x}_2), \rho \rangle + \frac{\mu_0}{2} \langle I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_1) - I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_2), \mathbf{E} \rangle + [(d \nabla \rho_2, \nabla \theta_2) - (d \nabla \rho_1, \nabla \theta_1)] + \\ + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}[(\beta |\rho_2| \rho_2, \theta_2) - (\beta |\rho_1| \rho_1, \theta_1)] = -(d \nabla \rho, \nabla (\theta_1 + \theta_2)) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta |\rho_2| \rho, \theta_1 + \theta_2) + \\ + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho_2, \theta) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho, \theta_2) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta_1 |\rho_1| \rho, \theta) - \\ - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho_1, \theta_1) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0}(\beta |\rho_2| \rho, \theta_2) - \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \theta_1 + \theta_2) - (f, \theta). \end{aligned} \quad (27)$$

Положив $d = d_1$ в неравенстве (11) (при $\lambda_0 = 1$), записанном для (d_2, ρ_2, θ_2) , и $d = d_2$ в (11) при (d_1, ρ_1, θ_1) , будем иметь

$$\mu_1(d_2, d)_{s,\Omega} + (d \nabla \rho_2, \nabla \theta_2) \geq 0, \quad -\mu_1(d_1, d)_{s,\Omega} - (d \nabla \rho_1, \nabla \theta_1) \geq 0.$$

Складывая эти неравенства, приходим к оценке

$$(d \nabla \rho_2, \nabla \theta_2) - (d \nabla \rho_1, \nabla \theta_1) \geq \mu_1 \|d\|_{s,\Omega}^2. \quad (28)$$

Пусть $\beta = \beta_1$ в (12) (при $\lambda_0 = 1$), записанном для $(\beta_2, \rho_2, \theta_2)$, и пусть $\beta = \beta_2$ в (12) при $(\beta_1, \rho_1, \theta_1)$, тогда справедливы неравенства

$$\mu_2(\beta_2, \beta)_{r,\Omega} + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta |\rho_2| \rho_2, \theta_2) \geq 0, \quad -\mu_2(\beta_1, \beta)_{r,\Omega} - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta |\rho_1| \rho_1, \theta_1) \geq 0,$$

сложение которых даёт оценку

$$\frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} ((\beta |\rho_2| \rho_2, \theta_2) - (\beta |\rho_1| \rho_1, \theta_1)) \geq \mu_2 \|\beta\|_{r,\Omega}^2. \quad (29)$$

Наконец, сложив (27) с (28) и (29), выводим основное неравенство относительно разностей состояний и управлений:

$$\frac{\mu_0}{2} \langle I'_\rho(\mathbf{x}_1) - I'_\rho(\mathbf{x}_2), \rho \rangle + \frac{\mu_0}{2} \langle I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_1) - I'_\mathbf{E}(\mathbf{x}_2), \mathbf{E} \rangle + \mu_1 \|d\|_{s,\Omega}^2 + \mu_2 \|\beta\|_{r,\Omega}^2 \leq \mathcal{R} + \mathcal{E} - (f, \theta), \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & -(d \nabla \rho, \nabla (\theta_1 + \theta_2)) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta |\rho_2| \rho, \theta_1 + \theta_2) + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho_2, \theta) - \\ & - \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho, \theta_2) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 |\rho_1| \rho, \theta) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho_1, \theta_1) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta |\rho_2| \rho, \theta_2), \\ \mathcal{E} = & -\mu_n (\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

Теперь получим оценку норм разностей состояний ρ и $\mathbf{E}$ через нормы разностей управлений d и β и норму разности возмущений f . Из (19) в силу леммы 2 вытекает оценка

$$\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} C_N \|\rho\|_{1,\Omega}. \quad (31)$$

Полагая в (18) $h = \rho$, запишем

$$\begin{aligned} & (d_1 \nabla \rho, \nabla \rho) + \mu_n (\mathbf{E}_1 \cdot \nabla \rho, \rho) + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 |\rho_1| \rho, \rho) = \\ & = -(d \nabla \rho_2, \nabla \rho) - \mu_n (\mathbf{E} \cdot \nabla \rho_2, \rho) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho_2, \rho) - \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta |\rho_2| \rho_2, \rho) + (f, \rho). \end{aligned}$$

С учётом (31) при выполнении условия

$$(\gamma_1 C_N + C_4^3 C_\beta) \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} M_\rho \leq \lambda_*/2 \quad (32)$$

из неравенства

$$\lambda_* \|\rho\|_{1,\Omega}^2 \leq \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\gamma_1 C_N + C_4^3 C_\beta) M_\rho \|\rho\|_{1,\Omega}^2 + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 M_\rho^2 \|\beta\|_{r,\Omega} \|\rho\|_{1,\Omega} + C_0 \|d\|_{s,\Omega} M_\rho \|\rho\|_{1,\Omega} + \|f\|_\Omega \|\rho\|_{1,\Omega}$$

приходим к оценке

$$\|\rho\|_{1,\Omega} \leq 2C_*(a \|d\|_{s,\Omega} + b \|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_\Omega), \quad a = C_0 M_\rho, \quad b = \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 M_\rho^2, \quad (33)$$

ввиду которой соотношение (31) примет вид

$$\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leq \frac{2}{\varepsilon \varepsilon_0} C_N C_*(a\|d\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_{\Omega}). \quad (34)$$

Полученный результат обобщает

Теорема 5. Пусть в дополнение к условиям (i) и (j) $K \subset H_{d_0}^s(\Omega) \times H_{\beta_0}^r(\Omega)$ — ограниченное множество; пары $(\mathbf{x}_1, u_1) \in X \times K$ и $(\mathbf{x}_2, u_2) \in X \times K$ являются решениями соответственно задач (7) при $f = f_1 \in L^2(\Omega)$ и (13) при $f = f_2 \in L^2(\Omega)$; $(\theta_i, \sigma_i) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ — множители Лагранжа, отвечающие решениям $(\mathbf{x}_i, u_i)$, $i = 1, 2$; функционалы I и $\tilde{I}$ непрерывно дифференцируемы по $\mathbf{x}$. Тогда для разностей ρ , $\mathbf{E}$, d , β , θ , σ и f , введённых в (17), при выполнении условия (32) справедливы оценки (33), (34) и выполняется неравенство (30).

5. ОЦЕНКИ ЛОКАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Опираясь на теорему 5, установим достаточные условия единственности и устойчивости решений конкретных экстремальных задач. Начнём с анализа следующей экстремальной задачи, отвечающей функционалу качества $I_1(\rho) = \|\rho - \rho^d\|_Q^2$:

$$J(\rho, u) = \frac{\mu_0}{2} I_1(\rho) + \frac{\mu_1}{2} \|d\|_{s,\Omega}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\beta\|_{r,\Omega}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\mathbf{x}, u, f) = 0, \quad (\mathbf{x}, u) \in X \times K. \quad (35)$$

Обозначим через $(\mathbf{x}_1, u_1)$ решение задачи (35), отвечающее заданным функциям $\rho^d = \rho_1^d \in L^2(Q)$ и $f = f_1 \in L^2(\Omega)$. Через $(\mathbf{x}_2, u_2)$ обозначим решение задачи (35), отвечающее возмущённым функциям $\tilde{\rho}^d = \rho_2^d \in L^2(Q)$ и $\tilde{f} = f_2 \in L^2(\Omega)$. Полагая $\rho^d = \rho_1^d - \rho_2^d$, в дополнение к (17) в силу (8) имеем

$$\langle I'_1(\rho_i), \tau \rangle = 2(\rho_i - \rho_i^d, \tau)_Q, \quad \langle I'_1(\rho_1) - \tilde{I}'_1(\rho_2), \tau \rangle = 2((\rho, \tau)_Q - (\rho^d, \tau)_Q), \quad i = 1, 2. \quad (36)$$

Ввиду (36) равенства (15), (16) для множителей Лагранжа $(\theta_i, \sigma_i) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, отвечающие решениям $(\mathbf{x}_i, u_i)$, $i = 1, 2$, принимают вид

$$(d_i \nabla \tau, \nabla \theta_i) + \mu_n(\mathbf{E}_i \cdot \nabla \tau, \theta_i) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_i |\rho_i| \tau, \theta_i) - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} (\tau, \sigma_i) = -\mu_0(\rho_i - \rho_i^d, \tau)_Q, \quad \tau \in H_0^1(\Omega), \quad (37)$$

$$\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho_i, \theta_i) + (\operatorname{div} \mathbf{E}, \sigma_i) = 0, \quad \mathbf{E} \in \tilde{H}_N^1(\Omega). \quad (38)$$

В (20), (21) подставим производную Фреше от конкретного функционала качества и запишем (20) в виде уравнения относительно разности $\theta = \theta_1 - \theta_2$:

$$(d_1 \nabla \tau, \nabla \theta) + \mu_n(\mathbf{E}_1 \cdot \nabla \tau, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 |\rho_1| \tau, \theta) - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} (\tau, \sigma) = -(d \nabla \tau, \nabla \theta_2) - \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \tau, \theta_2) - \\ - \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta |\rho_2| \tau, \theta_2) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \tau, \theta_2) - \mu_0(\rho - \rho^d, \tau)_Q, \quad \tau \in H_0^1(\Omega), \quad (39)$$

$$\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \theta_1) + \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho_2, \theta) + (\operatorname{div} \mathbf{E}, \sigma) = 0, \quad \mathbf{E} \in \tilde{H}_N^1(\Omega). \quad (40)$$

Тогда (30) примет следующий вид:

$$\mu_0(\|\rho\|_Q^2 - (\rho^d, \rho)_Q) + \mu_1 \|d\|_{s,\Omega}^2 + \mu_2 \|\beta\|_{r,\Omega}^2 \leq \mathcal{R} + \mathcal{E} - (f, \theta). \quad (41)$$

Получим оценки множителей Лагранжа θ_i и σ_i . В силу (14) и оценок $\|\rho_i\|_Q \leq \|\rho_i\|_{1,\Omega}$, $\|\tau\|_Q \leq \|\tau\|_{1,\Omega}$ имеем

$$|(\rho_i - \rho_i^d, \tau)_Q| \leq M_\rho^0 \|\tau\|_{1,\Omega}, \quad \tau \in H^1(\Omega), \quad M_\rho^0 \equiv M_\rho + \max\{\|\rho_1^d\|_Q, \|\rho_2^d\|_Q\}.$$

Согласно лемме 2 существуют функции $\tilde{\mathbf{E}}_i$ такие, что $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{E}}_i = \sigma_i$ и $\|\tilde{\mathbf{E}}_i\|_{1,\Omega} \leq C_N \|\sigma_i\|_\Omega$, $i = 1, 2$. Полагая $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}_i$ в (38), приходим к неравенству

$$\|\sigma_i\|_\Omega \leq \mu_n \gamma_1 C_N M_\rho \|\theta_i\|_{1,\Omega}, \quad i = 1, 2. \quad (42)$$

Полагая $\tau = \theta_i$ в (37), с учётом лемм 1 и 2 и оценки (42) при выполнении условия

$$\frac{\mu_n \gamma_1 C_N}{\varepsilon \varepsilon_0} M_\rho \leq \frac{\lambda_*}{2} \quad (43)$$

получаем оценку для θ_i :

$$\|\theta_i\|_{1,\Omega} \leq \mu_0 M_\theta, \quad M_\theta \equiv 2C_*(M_\rho + \|\rho^d\|_Q), \quad i = 1, 2. \quad (44)$$

В силу (44) из (42) находим оценку для σ_i :

$$\|\sigma_i\|_\Omega \leq \mu_0 M_\sigma, \quad M_\sigma \equiv 2\mu_n \gamma_1 C_N M_\rho M_\theta, \quad i = 1, 2. \quad (45)$$

Получим далее оценки норм разностей $\theta = \theta_1 - \theta_2$ и $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$.

Рассуждая аналогично выводу (45), из (40) с учётом (33) получаем к неравенство

$$\begin{aligned} \|\sigma\|_\Omega &\leq \mu_0 \mu_n \gamma_1 M_\theta C_N \|\rho\|_{1,\Omega} + \mu_n \gamma_1 M_\rho C_N \|\theta\|_{1,\Omega} \leq \\ &\leq 2\mu_0 \mu_n \gamma_1 C_* M_\theta C_N (a\|d\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_\Omega) + \mu_n \gamma_1 M_\rho C_N \|\theta\|_{1,\Omega}. \end{aligned} \quad (46)$$

Подставим $\tau = \theta$ в (39). Применяя неравенство Гёльдера и оценки леммы 1, с учётом (33), (34) будем иметь

$$\begin{aligned} \lambda_* \|\theta\|_{1,\Omega} &\leq \mu_0 C_0 M_\theta \|d\|_{s,\Omega} + \mu_0 \mu_n \gamma_1 M_\theta \|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} + \mu_0 \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_\beta M_\theta \|\rho\|_{1,\Omega} + \\ &+ \mu_0 \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 M_\rho M_\theta \|\beta\|_{r,\Omega} + \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \|\sigma\|_\Omega + \mu_0 (\|\rho\|_{1,\Omega} + \|\rho^d\|_Q). \end{aligned} \quad (47)$$

Ввиду оценок (33), (34) и (46) неравенство (47) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \lambda_* \|\theta\|_{1,\Omega} &\leq \mu_0 C_0 M_\theta \|d\|_{s,\Omega} + \mu_0 \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} \gamma_1 M_\theta C_N C_*(a\|d\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_\Omega) + \\ &+ 2\mu_0 C_* \left[\frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_\beta M_\theta + 1 + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} \gamma_1 M_\theta C_N \right] (a\|d\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_\Omega) + \\ &+ \mu_0 \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 M_\rho M_\theta \|\beta\|_{r,\Omega} + \mu_0 \|\rho^d\|_Q + \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} \gamma_1 M_\rho C_N \|\theta\|_{1,\Omega}. \end{aligned} \quad (48)$$

При выполнении условия (43) из (48) выводим оценку для разности θ :

$$\begin{aligned} \|\theta\|_{1,\Omega} &\leq 2\mu_0 C_*(\alpha_1 \|d\|_{s,\Omega} + \alpha_2 \|\beta\|_{r,\Omega} + \alpha_3 \|f\|_\Omega + \|\rho^d\|_Q), \\ \alpha_1 &= C_0 M_\theta + 2C_* + \frac{4\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_* M_\theta (\gamma_1 C_N + C_4^3 C_\beta) a, \\ \alpha_2 &= \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 M_\rho M_\theta + 2C_* + \frac{4\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_* M_\theta (\gamma_1 C_N + C_4^3 C_\beta) b, \\ \alpha_3 &= 2C_* + \frac{4\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_* M_\theta (\gamma_1 C_N + C_4^3 C_\beta). \end{aligned} \quad (49)$$

С учётом (49) из (46) получаем оценку для разности σ :

$$\begin{aligned}\|\sigma\|_{\Omega} &\leq 2\mu_0 C_*(\kappa_1 \|d\|_{s,\Omega} + \kappa_2 \|\beta\|_{r,\Omega} + \kappa_3 \|f\|_{\Omega} + \kappa_4 \|\rho^d\|_Q), \\ \kappa_1 &= \mu_n \gamma_1 C_N (M_{\theta} a + M_{\rho} \alpha_1), \quad \kappa_2 = \mu_n \gamma_1 C_N (M_{\theta} b + M_{\rho} \alpha_2), \\ \kappa_3 &= \mu_n \gamma_1 C_N (M_{\theta} + M_{\rho} \alpha_3), \quad \kappa_4 = \mu_n \gamma_1 C_N M_{\rho}.\end{aligned}$$

С помощью полученных выше неравенств (33), (34) и (49) оценим теперь слагаемые, входящие в выражение для величин $\mathcal{R}$, $\mathcal{E}$ и (f, θ) в (41). Учитывая (4) и неравенство Юнга $2ab \leq \varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon$ для $a \geq 0$, $b \geq 0$, $\varepsilon > 0$, последовательно оценим каждое из семи слагаемых, входящих в $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned}& |(d \nabla \rho, \nabla(\theta_1 + \theta_2))| \leq \mu_0 4C_0 C_* M_{\theta} \|d\|_{s,\Omega} (a \|d\|_{s,\Omega} + b \|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_{\Omega}) \leq \\& \leq \mu_0 4C_0 C_* M_{\theta} [(a+1) \|d\|_{s,\Omega}^2 + 0.5b^2 \|\beta\|_{r,\Omega}^2 + 0.5 \|f\|_{\Omega}^2], \\& \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} |(\beta |\rho_2| \rho, \theta_1 + \theta_2)| \leq \mu_0 \frac{4\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_* M_{\rho} M_{\theta} \|\beta\|_{r,\Omega} (a \|d\|_{s,\Omega} + b \|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_{\Omega}) \leq \\& \leq \mu_0 \frac{4\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_* M_{\rho} M_{\theta} [0.5a^2 \|d\|_{s,\Omega}^2 + (b+1) \|\beta\|_{r,\Omega}^2 + 0.5 \|f\|_{\Omega}^2], \\& \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} |(\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho_2, \theta)| \leq \mu_0 \frac{4\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_*^2 C_{\beta} M_{\rho} (a \|d\|_{s,\Omega} + b \|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_{\Omega}) \times \\& \times (\alpha_1 \|d\|_{s,\Omega} + \alpha_2 \|\beta\|_{r,\Omega} + \alpha_3 \|f\|_{\Omega} + \|\rho^d\|_Q) \leq \mu_0 \frac{4\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_*^2 C_{\beta} M_{\rho} [(a\alpha_1 + 1.5a^2 + \alpha_1^2) \|d\|_{s,\Omega}^2 + \\& + (b\alpha_2 + 1.5b^2 + \alpha_2^2) \|\beta\|_{r,\Omega}^2 + (\alpha_3^2 + \alpha_3 + 1.5) \|f\|_{\Omega}^2 + 1.5 \|\rho^d\|_Q^2], \\& \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} |(\beta_1 (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho, \theta_2)| \leq \mu_0 \frac{8\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_*^2 C_{\beta} M_{\theta} (a \|d\|_{s,\Omega} + b \|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_{\Omega})^2 \leq \\& \leq \mu_0 \frac{8\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_*^2 C_{\beta} M_{\theta} [3a^2 \|d\|_{s,\Omega}^2 + 3b^2 \|\beta\|_{r,\Omega}^2 + 3 \|f\|_{\Omega}^2], \\& \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} |(\beta_1 |\rho_1| \rho, \theta)| \leq \mu_0 \frac{4\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_*^2 C_{\beta} M_{\rho} (a \|d\|_{s,\Omega} + b \|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_{\Omega}) \times \\& \times (\alpha_1 \|d\|_{s,\Omega} + \alpha_2 \|\beta\|_{r,\Omega} + \alpha_3 \|f\|_{\Omega} + \|\rho^d\|_Q) \leq \mu_0 \frac{4\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_*^2 C_{\beta} M_{\rho} [(a\alpha_1 + 1.5a^2 + \alpha_1^2) \|d\|_{s,\Omega}^2 + \\& + (b\alpha_2 + 1.5b^2 + \alpha_2^2) \|\beta\|_{r,\Omega}^2 + (\alpha_3^2 + \alpha_3 + 1.5) \|f\|_{\Omega}^2 + 1.5 \|\rho^d\|_Q^2], \\& \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} |(\beta (|\rho_1| - |\rho_2|) \rho_1, \theta_1)| \leq \mu_0 \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_* M_{\rho} M_{\theta} \|\beta\|_{r,\Omega} (a \|d\|_{s,\Omega} + b \|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_{\Omega}) \leq \\& \leq \mu_0 \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_* M_{\rho} M_{\theta} [0.5a^2 \|d\|_{s,\Omega}^2 + (b+1) \|\beta\|_{r,\Omega}^2 + 0.5 \|f\|_{\Omega}^2], \\& \frac{\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} |(\beta |\rho_2| \rho, \theta_2)| \leq \mu_0 \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_* M_{\rho} M_{\theta} \|\beta\|_{r,\Omega} (a \|d\|_{s,\Omega} + b \|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_{\Omega}) \leq \\& \leq \mu_0 \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} C_4^3 C_* M_{\rho} M_{\theta} [0.5a^2 \|d\|_{s,\Omega}^2 + (b+1) \|\beta\|_{r,\Omega}^2 + 0.5 \|f\|_{\Omega}^2].\end{aligned}\tag{50}$$

Выражение для $\mathcal{E}$ содержит только одно слагаемое:

$$\mu_n |(\mathbf{E} \cdot \nabla \rho, \theta_1 + \theta_2)| \leq 2\mu_0 \mu_n \gamma_1 M_{\theta} \|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \|\rho\|_{1,\Omega} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mu_0 \frac{8\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_*^2 C_N \gamma_1 M_\theta (a\|d\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{r,\Omega} + \|f\|_\Omega)^2 \leq \\
&\leq \mu_0 \frac{8\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_*^2 C_N \gamma_1 M_\theta [3a^2\|d\|_{s,\Omega}^2 + 3b^2\|\beta\|_{r,\Omega}^2 + 3\|f\|_\Omega^2].
\end{aligned} \tag{51}$$

Наконец, получим оценку для последнего слагаемого в правой части (41):

$$\begin{aligned}
|(f, \theta)| &\leq \|f\|_\Omega \|\theta\|_{1,\Omega} \leq \mu_0 2C_* \|f\|_\Omega (\alpha_1\|d\|_{s,\Omega} + \alpha_2\|\beta\|_{r,\Omega} + \alpha_3\|f\|_\Omega + \|\rho^d\|_Q) \leq \\
&\leq \mu_0 2C_* [0.5\alpha_1^2\|d\|_{s,\Omega}^2 + 0.5\alpha_2^2\|\beta\|_{r,\Omega}^2 + (\alpha_3 + 1.5)\|f\|_\Omega^2 + 0.5\|\rho^d\|_Q^2].
\end{aligned} \tag{52}$$

Используя (50)–(52), для величин $\mathcal{R}$, $\mathcal{E}$ и (f, θ) , определённых в (41), имеем

$$|\mathcal{R}| + |\mathcal{E}| + |(f, \theta)| \leq \mu_0 (\omega_1^2\|d\|_{s,\Omega}^2 + \omega_2^2\|\beta\|_{r,\Omega}^2 + \omega_3^2\|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2\|\rho^d\|_Q^2). \tag{53}$$

Здесь положительные константы ω_i , $i = \overline{1, 4}$, зависящие от величин M_ρ и M_θ , определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\omega_1^2 &= 4C_0 C_* M_\theta (a + 1) + C_* \alpha_1^2 + \frac{4\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_4^3 C_* M_\rho M_\theta a^2 + \\
&+ \frac{8\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_*^2 (C_4^3 C_\beta M_\rho (a\alpha_1 + 1.5a^2 + \alpha_1^2) + 3a^2 M_\theta (C_4^3 C_\beta + C_N \gamma_1)), \\
\omega_2^2 &= 2C_0 C_* M_\theta b^2 + C_* \alpha_2^2 + \frac{8\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_4^3 C_* M_\rho M_\theta (b + 1) + \\
&+ \frac{8\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_*^2 (C_4^3 C_\beta M_\rho (b\alpha_2 + 1.5b^2 + \alpha_2^2) + 3b^2 M_\theta (C_4^3 C_\beta + C_N \gamma_1)), \\
\omega_3^2 &= 2C_0 C_* M_\theta + C_* (2\alpha_3 + 3) + \frac{4\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_4^3 C_* M_\rho M_\theta + \\
&+ \frac{8\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_*^2 (C_4^3 C_\beta M_\rho (\alpha_3^2 + \alpha_3 + 1.5) + 3M_\theta (C_4^3 C_\beta + C_N \gamma_1)), \\
\omega_4^2 &= C_* + \frac{12\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_4^3 C_*^2 C_\beta M_\rho.
\end{aligned} \tag{54}$$

Пусть исходные данные задачи (35) таковы, что выполняются условия

$$\mu_0 \omega_1^2 < \mu_1 (1 - \varepsilon_1), \quad \mu_0 \omega_2^2 < \mu_2 (1 - \varepsilon_2), \tag{55}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, 1)$ — произвольные числа. При выполнении (55) оценка (53) принимает вид

$$|\mathcal{R}| + |\mathcal{E}| + |(f, \theta)| \leq \mu_1 (1 - \varepsilon_1) \|d\|_{s,\Omega}^2 + \mu_2 (1 - \varepsilon_2) \|\beta\|_{r,\Omega}^2 + \mu_0 (\omega_3^2 \|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2 \|\rho^d\|_Q^2). \tag{56}$$

Используя (56), из неравенства (41) получаем

$$\mu_0 \|\rho\|_Q^2 \leq \mu_0 (\rho, \rho^d)_Q - \varepsilon_1 \mu_1 \|d\|_{s,\Omega}^2 - \varepsilon_2 \mu_2 \|\beta\|_{r,\Omega}^2 + \mu_0 (\omega_3^2 \|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2 \|\rho^d\|_Q^2), \tag{57}$$

откуда, отбрасывая неположительные слагаемые $-\varepsilon_1 \mu_1 \|d\|_{s,\Omega}^2$ и $-\varepsilon_2 \mu_2 \|\beta\|_{r,\Omega}^2$ в правой части, следует оценка

$$\|\rho\|_Q^2 \leq \|\rho\|_Q \|\rho^d\|_Q + \omega_3^2 \|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2 \|\rho^d\|_Q^2. \tag{58}$$

Неравенство (58) представляет собой квадратичное неравенство относительно $\|\rho\|_Q$. Решив его, приходим к следующей оценке для $\|\rho\|_Q$:

$$\|\rho\|_Q \leq (\omega_4 + 1)\|\rho^d\|_Q + \omega_3\|f\|_\Omega.$$

Поскольку $\rho = \rho_1 - \rho_2$, $\rho^d = \rho_1^d - \rho_2^d$, $f = f_1 - f_2$, то это неравенство эквивалентно оценке

$$\|\rho_1 - \rho_2\|_Q \leq (\omega_4 + 1)\|\rho_1^d - \rho_2^d\|_Q + \omega_3\|f_1 - f_2\|_\Omega. \quad (59)$$

В случае когда $Q = \Omega$ (59) имеет смысл $L^2(\Omega)$ -оценки устойчивости компоненты $\hat{\rho}$ решения $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ задачи (35) относительно малых возмущений функций $\rho^d \in L^2(\Omega)$ и $f \in L^2(\Omega)$. При $f_1 = f_2$ (59) переходит в оценку

$$\|\rho_1 - \rho_2\|_Q \leq (\omega_4 + 1)\|\rho_1^d - \rho_2^d\|_Q,$$

справедливую при выполнении условия (55). Если, кроме того, $\rho_1^d = \rho_2^d$, то из неё следует, что $\rho_1 = \rho_2$ в Q . Это даёт вместе с (57) при $\mu_1 > 0$ и $\mu_2 > 0$, что $d = 0$ и $\beta = 0$, а из (33) при $d = 0$, $\beta = 0$ и $f = 0$ тогда следует, что $\rho = 0$, т.е. $\rho_1 = \rho_2$ в Ω . Последнее означает единственность решения задачи (13) при выполнении условия (55).

В общем случае, когда $f_1 \neq f_2$, используя неравенство

$$\|\rho\|_Q \|\rho^d\|_Q \leq \|\rho\|_Q^2 + \frac{1}{4}\|\rho^d\|_Q^2,$$

вытекающее из неравенства Юнга, из (57) выводим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \mu_1 \|d\|_{s,\Omega}^2 + \varepsilon_2 \mu_2 \|\beta\|_{r,\Omega}^2 &\leq -\mu_0 \|\rho\|_Q^2 + \mu_0 (\rho, \rho^d)_Q + \mu_0 (\omega_3^2 \|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2 \|\rho^d\|_Q^2) \leq \\ &\leq \frac{\mu_0}{4} \|\rho^d\|_Q^2 + \mu_0 (\omega_3^2 \|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2 \|\rho^d\|_Q^2). \end{aligned} \quad (60)$$

Из (60) следуют оценки

$$\|d\|_{s,\Omega} \leq \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1 \mu_1}} (\omega_3 \|f\|_\Omega + (\omega_4 + 0.5) \|\rho^d\|_Q),$$

$$\|\beta\|_{r,\Omega} \leq \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2 \mu_2}} (\omega_3 \|f\|_\Omega + (\omega_4 + 0.5) \|\rho^d\|_Q),$$

которые с учётом (17) примут вид

$$\|d_1 - d_2\|_{s,\Omega} \leq \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1 \mu_1}} (\omega_3 \|f_1 - f_2\|_\Omega + (\omega_4 + 0.5) \|\rho_1^d - \rho_2^d\|_Q), \quad (61)$$

$$\|\beta_1 - \beta_2\|_{r,\Omega} \leq \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2 \mu_2}} (\omega_3 \|f_1 - f_2\|_\Omega + (\omega_4 + 0.5) \|\rho_1^d - \rho_2^d\|_Q). \quad (62)$$

Из (61), (62) и (33), (34) вытекают следующие оценки для разностей $\rho_1 - \rho_2$ и $\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$:

$$\|\rho_1 - \rho_2\|_{1,\Omega} \leq 2C_*(A\omega_3 + 1)\|f_1 - f_2\|_\Omega + 2C_*A(\omega_4 + 0.5)\|\rho_1^d - \rho_2^d\|_Q, \quad (63)$$

$$\|\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2\|_{1,\Omega} \leq \frac{2}{\varepsilon \varepsilon_0} C_N C_*(A\omega_3 + 1)\|f_1 - f_2\|_\Omega + \frac{2}{\varepsilon \varepsilon_0} C_N C_* A(\omega_4 + 0.5)\|\rho_1^d - \rho_2^d\|_Q, \quad (64)$$

где $A = a\sqrt{\mu_0/(\varepsilon_1 \mu_1)} + b\sqrt{\mu_0/(\varepsilon_2 \mu_2)}$.

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 6. Пусть в дополнение к условиям (i) и (j) K — ограниченное множество и пара $(\mathbf{x}_i, u_i) \in X \times K$ является решением задачи (35), отвечающим заданным функциям $\rho_i^d \in L^2(Q)$ и $f_i \in L^2(\Omega)$, $i=1, 2$, где $Q \subset \Omega$ — произвольное открытое ограниченное множество. Предположим, что $\mu_0 > 0$ и выполняются условия (32), (55). Тогда справедливы оценки устойчивости (59) и (61)–(64), где ω_i , $i=\overline{1, 4}$, определены в (54).

Следствие. Пусть в дополнение к условиям (i) и (j) K — ограниченное множество, $\rho_1^d = \rho_2^d$ в Q и $f_1 = f_2$ в Ω . Тогда если $\mu_0 > 0$ и выполняются условия (32), (55), то решение $(\mathbf{x}, u) \in X \times K$ задачи (35) единственно.

6. РЕЛЕЙНОСТЬ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим однопараметрическую задачу мультипликативного управления

$$J(\rho) \equiv \mu_0 \|\rho - \rho^d\|_Q^2 \rightarrow \inf, \quad F(\mathbf{x}, \beta) = 0, \quad (\rho, \beta) \in H_0^1(\Omega) \times K_\beta. \quad (65)$$

Пусть выполняется условие

(j') $1/4 < \beta_0 \leq \beta \leq \beta_{\max}$ п.в. в Ω для всех $\beta \in K_\beta$, где $\beta_{\max}$ — положительное число.

Разрешимость задачи управления (65) при $\beta \in L_{\beta_0}^4(\Omega)$ вытекает из результатов статьи [4], в которой также выведены соответствующие системы оптимальности. В частности, неравенство (12) принимает вид

$$((\beta - \hat{\beta})|\hat{\rho}|\hat{\rho}, \theta) \geq 0, \quad \beta \in K_\beta. \quad (66)$$

Из (66) методом от противного получаем неравенство

$$(\beta - \hat{\beta})|\hat{\rho}|\hat{\rho}\theta \geq 0 \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \beta \in K_\beta, \quad (67)$$

откуда вытекает, что в зависимости от знака произведения функций $|\hat{\rho}|\hat{\rho}\theta$ управление β принимает либо значение β_0 , либо значение $\beta_{\max}$. Такое свойство управления называется *релейностью*, так как поведение β аналогично его переключению между двумя состояниями β_0 и $\beta_{\max}$. Иначе говоря, происходит скачок управления из одного состояния в другое (bang–bang) и имеет место свойство bang–bang, или справедлив принцип bang–bang (см. подробнее в [5, 11]).

Если выполняется условие (iv), при котором справедлив принцип максимума и минимума для плотности заряда ρ (см. теорему 2), то переход управления из одного состояния в другое происходит при смене знака множителя Лагранжа θ , поскольку $\hat{\rho} \geq 0$ п.в. в Ω . Однако при $\hat{\rho} = 0$ или $\theta = 0$, как вытекает из (67), управление β может как перейти из одного состояния в другое, так и не переходить. В таком случае свойство релейности называют *нестрогим*. Отметим работу [11], в которой установлено строгое свойство релейности для конкретных задач управления, что скорее является исключением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы дополняющие друг друга свойства оптимальных решений задач мультипликативного управления. Единственность и устойчивость таких задач может быть доказана только с использованием регуляризации, в то время как релейность устанавливается только при её отсутствии. Последнее свойство для управления β было получено за счёт низких требований к его гладкости: $\beta \in L^4(\Omega)$. Для сравнения, $d \in H^s(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $s > 1/2$, что исключает “скачки” (см. [4]).

Отметим также недавно опубликованную статью [21], в которой доказана локальная единственность решения задачи управления для модели (1)–(3) при $\beta = 1$ с одним мультипликативным управлением d .

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках госзадания Института прикладной математики ДВО РАН (№ 075-00459-24-00) и при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 122082400001-8).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Maslovskaya, A.G. Physical and mathematical modeling of the electron-beam-induced charging of ferroelectrics during the process of domain structure switching / A.G. Maslovskaya // J. Surf. Investig. — 2013. — V. 7. — P. 680–684.
2. Pavelchuk, A.V. Approach to numerical implementation of the drift-diffusion model of field effects induced by a moving source / A.V. Pavelchuk, A.G. Maslovskaya // Russ. Phys. J. — 2020. — V. 63. — P. 105–112.
3. Бризицкий, Р.В. Теоретический анализ и численная реализация стационарной диффузионно-дрейфовой модели зарядки полярных диэлектриков / Р.В. Бризицкий, Н.Н. Максимова, А.Г. Масловская // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2022. — Т. 62, № 10. — С. 1696–1706.
4. Бризицкий, Р.В. Обратные задачи для диффузионно-дрейфовой модели зарядки неоднородного полярного диэлектрика / Р.В. Бризицкий, Н.Н. Максимова, А.Г. Масловская // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2023. — Т. 63, № 9. — С. 1537–1552.
5. Бризицкий, Р.В. Анализ некоторых краевых и экстремальных задач для нелинейного уравнения реакции–диффузии–конвекции / Р.В. Бризицкий, В.С. Быстрова, Ж.Ю. Саричкая // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 5. — С. 635–648.
6. Бризицкий, Р.В. Об устойчивости решений задач управления для нелинейной модели реакции–диффузии–конвекции / Р.В. Бризицкий, П.А. Максимов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 3. — С. 409–421.
7. Ковтаниук, А.Е. Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом / А.Е. Ковтаниук, А.Ю. Чеботарев // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 12. — С. 1590–1597.
8. Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions / A.Yu. Chebotarev, G.V. Grenkin, A.E. Kovtanyuk [et al.] // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2018. — V. 57. — P. 290–298.
9. Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange / A.Yu. Chebotarev, G.V. Grenkin, A.E. Kovtanyuk [et al.] // J. Math. Anal. Appl. — 2018. — V. 460, № 2. — P. 737–744.
10. Chebotarev, A.Yu. Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type / A.Yu. Chebotarev, A.E. Kovtanyuk, N.D. Botkin // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2019. — V. 75. P. 262–269.
11. Чеботарев, А.Ю. Задачи оптимального управления для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения / А.Ю. Чеботарев // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2022. — Т. 62, № 3. — С. 381–390.
12. Baranovskii, E.S. Optimal boundary control of the Boussinesq approximation for polymeric fluids / E.S. Baranovskii // J. Optim. Theory Appl. — 2021. — V. 189. — P. 623–645.
13. Brizitskii, R.V. Multiplicative control problems for nonlinear reaction–diffusion–convection model / R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia // J. Dynam. Control Syst. — 2021. — V. 27, № 2. — P. 379–402.
14. Барановский Е.С. Задача оптимального стартового управления для двумерных уравнений Буссинеска / Е.С. Барановский // Изв. РАН. Сер. мат. — 2022. — Т. 86, № 2. — С. 3–24.
15. Baranovskii, E.S. Existence of optimal control for a nonlinear-viscous fluid model / E.S. Baranovskii, M.A. Artemov // Int. J. Differ. Equat. — 2016. — V. 2016. — Art. 9428128.
16. Барановский, Е.С. Оптимальное граничное управление течением нелинейно-вязкой жидкости / Е.С. Барановский // Мат. сб. — 2020. — Т. 211, № 4. — С. 27–43.

17. Барановский, Е.С. Задача оптимального управления с обратной связью для сетевой модели движения вязкой жидкости / Е.С. Барановский // Мат. заметки. — 2022. — Т. 112, № 1. — С. 31–47.
18. Brizitskii, R.V. Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection-diffusion-reaction equation / R.V. Brizitskii, Zh.Yu. Saritskaya // J. Inv. Ill-Posed Probl. — 2018. — V. 26, № 6. — P. 821–833.
19. Алексеев, Г.В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики / Г.В. Алексеев. — М.: Научный мир, 2010. — 410 с.
20. Фурсиков, А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А.В. Фурсиков. — Новосибирск: Научная книга, 1999. — 350 с.
21. Бризицкий, Р.В. О единственности решения задачи мультипликативного управления для модели дрейфа-диффузии электронов / Р.В. Бризицкий, Н.Н. Максимова // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2024. — Т. 34, № 1. — С. 3–18.

MULTIPLICATIVE CONTROL PROBLEMS FOR THE DIFFUSION-DRIFT CHARGING MODEL OF AN INHOMOGENEOUS POLAR DIELECTRIC

R. V. Brizitskii¹, N. N. Maksimova²

¹*Institute of Applied Mathematics, Far East Branch of RAS, Vladivostok, Russia*

²*Amur State University, Blagoveshchensk, Russia*

e-mail: ¹mlnwizard@mail.ru, ²knnamursu@mail.ru

A two-parameter multiplicative control problem is studied for a model of electron-induced charging of an inhomogeneous polar dielectric. Exact estimates of the local stability of its optimal solutions with respect to small perturbations of both the cost functionals and the given function of the boundary value problem are derived. For one of the controls, the relay property or the bang-bang principle is established.

Keywords: multiplicative control problem, optimality system, local stability estimate, bang-bang principle, diffusion-drift model.

FUNDING

This work was supported by the state assignment of Institute of Applied Mathematics FEB RAS (no. 075-00459-24-00) and by the Ministry of Science and Higher Education of Russian Federation (Project no. 122082400001-8).

REFERENCES

1. Maslovskaya, A.G., Physical and mathematical modeling of the electron-beam-induced charging of ferroelectrics during the process of domain structure switching, *J. Surf. Investig.*, 2013, vol. 7, pp. 680–684.
2. Pavelchuk, A.V. and Maslovskaya, A.G., Approach to numerical implementation of the drift-diffusion model of field effects induced by a moving source, *Russ. Phys. J.*, 2020, vol. 63, pp. 105–112.
3. Brizitskii, R.V., Maksimova, N.N., and Maslovskaya, A.G., Theoretical analysis and numerical implementation of a stationary diffusion-drift model of polar dielectric charging, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2022, vol. 62, no. 10, pp. 1680–1690.
4. Brizitskii, R.V., Maksimova, N.N., and Maslovskaya, A.G., Inverse problems for the diffusion-drift model of charging of an inhomogeneous polar dielectric, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2023, vol. 63, no. 9, pp. 1685–1699.
5. Brizitskii, R.V., Bystrova, V.S., and Saritskaia, Zh.Yu., Analysis of boundary value and extremum problems for a nonlinear reaction-diffusion-convection equation, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 5, pp. 615–629.
6. Brizitskii, R.V. and Maksimov, P.A., On the stability of solutions to control problems for a nonlinear reaction-diffusion-convection model, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 3, pp. 414–427.
7. Kovtanyuk, A.E. and Chebotarev, A.Yu., Stationary free convection problem with radiative heat exchange, *Differ. Equat.*, 2014, vol. 50, no. 12, pp. 1592–1599.

8. Chebotarev, A.Yu., Grenkin, G.V., Kovtanyuk, A.E., Botkin N.D., and Hoffmann, K.-H., Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018, vol. 57, pp. 290–298.
9. Chebotarev, A.Yu., Grenkin, G.V., Kovtanyuk, A.E., Botkin, N.D., and Hoffmann, K.-H., Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange, *J. Math. Anal. Appl.*, 2018, vol. 460, no. 2, pp. 737–744.
10. Chebotarev, A.Yu., Kovtanyuk, A.E., and Botkin, N.D., Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, vol. 75, pp. 262–269.
11. Chebotarev, A.Yu., Optimal control problems for complex heat transfer equations with Fresnel matching conditions, *Comp. Math. Math. Phys.*, 2022, vol. 62, no. 3, pp. 372–381.
12. Baranovskii, E.S., Optimal boundary control of the Boussinesq approximation for polymeric fluids, *J. Optim. Theory Appl.*, 2021, vol. 189, pp. 623–645.
13. Brizitskii, R.V. and Saritskaia, Z.Y., Multiplicative control problems for nonlinear reaction–diffusion–convection model, *J. Dynam. Control Syst.*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 379–402.
14. Baranovskii, E.S., The optimal start control problem for 2D Boussinesq equations, *Izvestiya: Mathematics*, 2022, vol. 86, no. 2, pp. 221–242.
15. Baranovskii, E.S. and Artemov M.A., Existence of optimal control for a nonlinear–viscous fluid model, *Int. J. Differ. Equat.*, 2016, vol. 2016, art. 9428128.
16. Baranovskii, E.S., Optimal boundary control of nonlinear-viscous fluid flows, *Sbornik: Mathematics*, 2020, vol. 211, no. 4, pp. 505–520.
17. Baranovskii, E.S., Feedback optimal control problem for a network model of viscous fluid flows, *Math. Notes*, 2022, vol. 112, no. 1, pp. 26–39.
18. Brizitskii, R.V. and Saritskaya, Zh.Yu., Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection–diffusion–reaction equation, *J. Inv. Ill-Posed Probl.*, 2018, vol. 26, iss. 6, pp. 821–833.
19. Alekseev, G.V., *Optimizatsiya v stationarnykh zadachakh teplomassoperenosa i magnitnoy gidrodinamiki* (Optimization in the Stationary Problems of the Heat-Mass Transfer and Magnetic Hydrodynamics), Moscow: Nauchiy Mir, 2010.
20. Fursikov, A.V., *Optimal control of distributed systems: Theory and applications*, Providence: Am. Math. Soc., 2000.
21. Brizitskii, R.V. and Maksimova, N.N., On the uniqueness of a solution to the multiplicative control problem for the electron drift–diffusion model, *Vestn. Udmurt. Un-ta: Matematika, Mekhanika, Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, no. 1, pp. 3–18.